$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

O sistema $\mathbf{w}' = P^{-1}AP\mathbf{w}$ tem a forma abaixo.

$$\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} w_1' &= -3w_1 \\ w_2' &= 5w_2 \end{aligned}$$

A solução deste sistema de equações é

$$\begin{aligned} w_1 &= C_1 e^{-3t} \\ w_2 &= C_2 e^{5t}. \end{aligned}$$

Para retornar às variáveis originais y_1 e y_2, use a substituição $\mathbf{y} = P\mathbf{w}$ e escreva

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

o que implica que a solução é

$$\begin{aligned} y_1 &= w_1 + w_2 = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{5t} \\ y_2 &= -3w_1 + w_2 = -3C_1 e^{-3t} + C_2 e^{5t}. \end{aligned}$$

Se A tem autovalores com multiplicidade maior que 1 ou se A tiver autovalores complexos, então a técnica para resolver o sistema deve ser modificada.

1. *Autovalores com multiplicidade maior que 1*: a matriz de coeficientes do sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -4y_1 + 4y_2 \end{aligned} \quad \text{é} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

O único autovalor de A é $\lambda = 2$ e a solução do sistema é

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} \\ y_2 &= (2C_1 + C_2)e^{2t} + 2C_2 t e^{2t}. \end{aligned}$$

2. *Autovalores complexos*: a matriz de coeficientes do sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 \end{aligned} \quad \text{é} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de A são $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$ e a solução do sistema é

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t \\ y_2 &= -C_2 \cos t + C_1 \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Verifique estas soluções, derivando e substituindo nos sistemas originais de equações.

FORMAS QUADRÁTICAS

Os autovalores e os autovetores podem ser usados para resolver o problema de rotação de eixos introduzido na Seção 4.8. Lembre-se de que classificar o gráfico da equação quadrática

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad \text{Equação quadrática}$$

é bastante simples, desde que a equação não tenha termo xy (ou seja, $b = 0$). Porém, se a equação tem um termo xy, a classificação é alcançada mais facilmente realizando primeiro uma rotação de eixos que elimine o termo xy. A equação resultante (em relação aos novos eixos $x'y'$) será então da forma

$$a'(x')^2 + c'(y')^2 + d'x' + e'y' + f' = 0.$$

Você verá que os coeficientes a' e c' são autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

A expressão

$$ax^2 + bxy + cy^2 \qquad \text{Forma quadrática}$$

é a **forma quadrática** associada à equação quadrática

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

e a matriz A é a **matriz da forma quadrática**. Observe que a matriz A é *simétrica*. Além disso, a matriz A será diagonal se e somente se sua forma quadrática correspondente não tiver o termo xy, conforme ilustrado no Exemplo 5.

EXEMPLO 5 Determinação da matriz da forma quadrática

Encontre a matriz da forma quadrática associada a cada equação quadrática.

a. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ **b.** $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$

SOLUÇÃO

a. $a = 4$, $b = 0$ e $c = 9$, de modo que a matriz é

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}. \qquad \text{Matriz diagonal (sem termo } xy\text{)}$$

b. $a = 13$, $b = -10$ e $c = 13$, de modo que a matriz é

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}. \qquad \text{Matriz não diagonal (termo } xy\text{)}$$

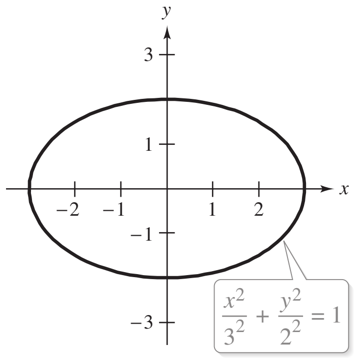


Figura 7.2

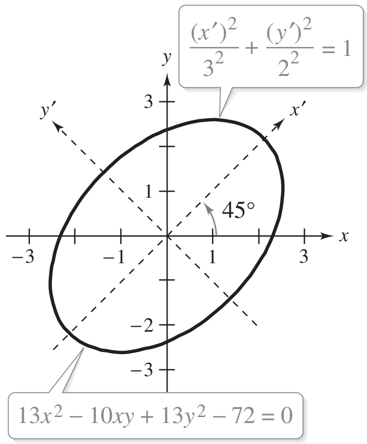


Figura 7.3

Na forma padrão, a equação $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ é

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

que é a equação da elipse mostrada na Figura 7.2. Embora não seja aparente por inspeção, o gráfico da equação $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$ é similar. De fato, quando você gira os eixos x e y no sentido anti-horário de 45° para formar um novo sistema de coordenadas $x'y'$, esta equação assume a forma

$$\frac{(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1$$

(verifique isso) que é a equação da elipse mostrada na Figura 7.3.

Para ver como usar a matriz de uma forma quadrática para realizar uma rotação de eixos, seja

$$X = [x \quad y]^T.$$

Então, a expressão quadrática $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ pode ser escrita na forma matricial como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} X^TAX + [d \quad e]X + f &= [x \quad y]\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d \quad e]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f \\ &= ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \end{aligned}$$

Se $b = 0$, então não é necessária uma rotação. Mas se $b \neq 0$, então use o fato de que A é simétrica e aplique o Teorema 7.10 para concluir que existe uma matriz ortogonal P tal que $P^TAP = D$ é diagonal. Assim, se você formar

$$P^TX = X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

segue que $X = PX'$ donde $X^TAX = (PX')^TA(PX') = (X')^TP^TAPX' = (X')^TDX'$.

OBSERVAÇÃO

Para simplificar, as matrizes de 1×1 $[f]$ e $[ax^2 + bxy + cy^2 + ey + f]$ não são mostradas entre colchetes.

A escolha da matriz P deve ser feita com cuidado. P é ortogonal, então o seu determinante será ± 1. Pode ser mostrado (veja o Exercício 67) que se P for escolhido de modo que $|P| = 1$, então P será da forma

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

onde θ é o ângulo de rotação da cônica medido do eixo x positivo ao eixo x' positivo. Isso leva ao **Teorema dos Eixos Principais**.

OBSERVAÇÃO

Observe que o produto de matrizes $[d \quad e]PX'$ tem a forma

$$(d\cos\theta + e\,\text{sen}\,\theta)\,x' + (-d\,\text{sen}\,\theta + e\cos\theta)\,y'$$

Teorema dos Eixos Principais

Para uma cônica cuja equação é $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, a rotação $X = PX'$ elimina o termo xy quando P é uma matriz ortogonal, com $|P| = 1$, que diagonaliza a matriz da forma quadrática A. Isto é,

$$P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

onde λ_1 e λ_2 são autovalores de A. A equação da cônica girada é

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + [d \quad e]PX' + f = 0.$$

EXEMPLO 6 Rotação de uma cônica

Faça uma rotação de eixos para eliminar o termo xy na equação quadrática

$$13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0.$$

SOLUÇÃO

A matriz da forma quadrática associada a esta equação é

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é $(\lambda - 8)(\lambda - 18)$ (verifique isso), então segue que os autovalores de A são $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 18$. Então, a equação da cônica girada é

$$8(x')^2 + 18(y')^2 - 72 = 0$$

que, quando escrita na forma padrão

$$\frac{(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1,$$

é a equação de uma elipse. (Veja a Figura 7.3.)

No Exemplo 6, os autovetores da matriz A são

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

os quais você pode normalizar para formar as colunas de P, como mostrado abaixo.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Observe primeiro que $|P| = 1$, o que implica que P é uma rotação. Além disso, $45° = 1/\sqrt{2} = \text{sen}\,45°$, de modo que o ângulo de rotação é 45 ° como mostrado na Figura 7.3.

A matriz ortogonal P especificada no Teorema dos Eixos Principais não é única. Seus elementos dependem da ordem dos autovalores λ_1 e λ_2 e da escolha subsequente de autovetores $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$. Por exemplo, na solução do Exemplo 6, qualquer das escolhas de P mostradas a seguir teria funcionado.

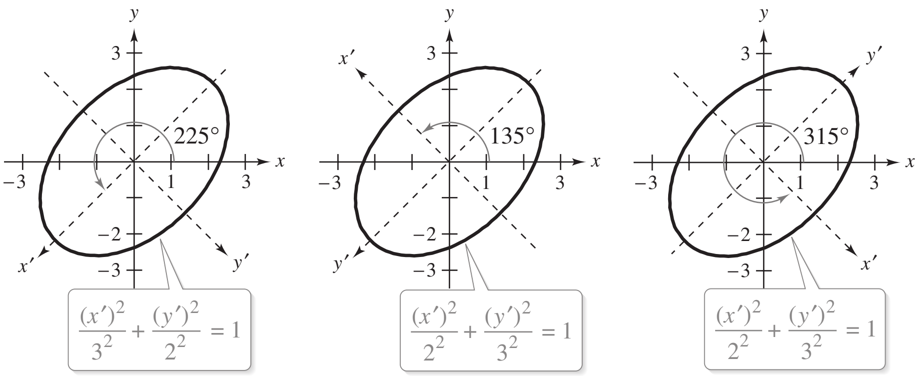
$$\begin{array}{cc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 18 \qquad \lambda_1 = 18, \lambda_2 = 8 \qquad \lambda_1 = 18, \lambda_2 = 8$$

$$\theta = 225° \qquad \theta = 135° \qquad \theta = 315°$$

Para qualquer uma dessas escolhas de P, o gráfico da cônica girada será, naturalmente, o mesmo. (Veja abaixo.)



A lista a seguir resume os passos usados para aplicar o Teorema dos Eixos Principais.

1. Forme a matriz A e encontre seus autovalores λ_1 e λ_2.

2. Encontre os autovetores associados a λ_1 e λ_2. Normalize esses autovetores para formar as colunas de P.

3. Se $|P| = -1$, então multiplique uma das colunas de P por -1 para obter uma matriz da forma

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

4. O ângulo θ representa o ângulo de rotação da cônica.

5. A equação da cônica girada é $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + [d \quad e]PX' + f = 0$.

O Exemplo 7 mostra como aplicar o Teorema dos Eixos Principais para girar uma cônica cujo centro está transladado para fora da origem.

EXEMPLO 7 Rotação de uma cônica

Faça uma rotação de eixos para eliminar o termo xy na equação quadrática

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 16\sqrt{2}x - 32 = 0.$$

SOLUÇÃO

A matriz da forma quadrática associada a esta equação é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de A são

$$\lambda_1 = 8 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -2$$

com autovetores associados

$$\mathbf{x}_1 = (-1, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = (-1, -1).$$

Isto implica que a matriz P é

$$P = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{ onde } |P| = 1.$$

Como $\cos 135° = -1/\sqrt{2}$ e $\operatorname{sen} 135° = 1/\sqrt{2}$, então o ângulo de rotação é de 135°. Finalmente, do produto da matrizes

$$[d \quad e]PX' = [16\sqrt{2} \quad 0]\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$= -16x' - 16y',$$

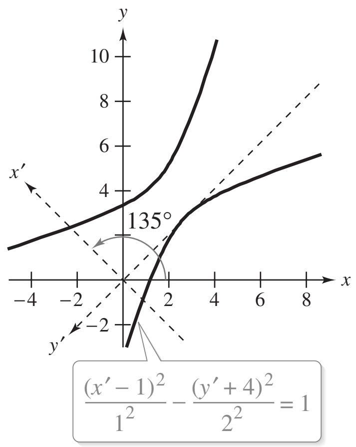


Figura 7.4

segue que a equação da cônica girada é

$$8(x')^2 - 2(y')^2 - 16x' - 16y' - 32 = 0.$$

Na forma padrão, a equação é

$$\frac{(x'-1)^2}{1^2} - \frac{(y'+4)^2}{2^2} = 1$$

que é a equação de uma hipérbole. Seu gráfico é mostrado na Figura 7.4.

As formas quadráticas também podem ser usadas para analisar equações de superfícies quadráticas em R^3, que são os análogos tridimensionais das seções cônicas. A equação de uma superfície quadrática em R^3 é um polinômio de segundo grau da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0.$$

Existem seis tipos básicos de superfícies quadráticas: elipsoides, hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas, cones elípticos, paraboloides elípticos e paraboloides hiperbólicos. A intersecção de uma superfície com um plano, chamado de **corte** da superfície no plano, é útil para visualizar o gráfico da superfície em R^3. Os seis tipos básicos de superfícies quadráticas, juntamente com seus cortes, são mostrados nas duas páginas seguintes.

A forma quadrática da equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0 \qquad \text{Superfície quadrática}$$

é

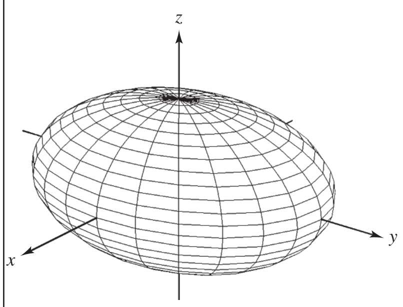
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz. \qquad \text{Forma quadrática}$$

A matriz correspondente é

$$A = \begin{bmatrix} a & \dfrac{d}{2} & \dfrac{e}{2} \\ \dfrac{d}{2} & b & \dfrac{f}{2} \\ \dfrac{e}{2} & \dfrac{f}{2} & c \end{bmatrix}.$$

OBSERVAÇÃO

Em geral, a matriz A da forma quadrática sempre será simétrica.

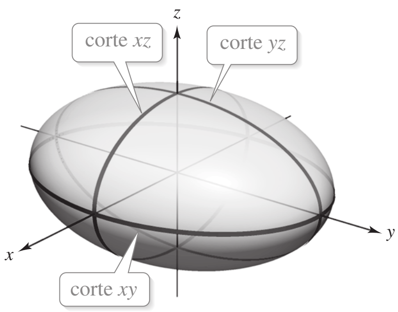


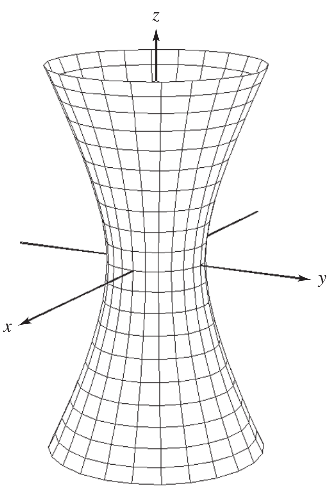
Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Corte	*Plano*
Elipse	Paralelo ao plano *xy*
Elipse	Paralelo ao plano *xz*
Elipse	Paralelo ao plano *yz*

A superfície é uma esfera quando $a = b = c \neq 0$.



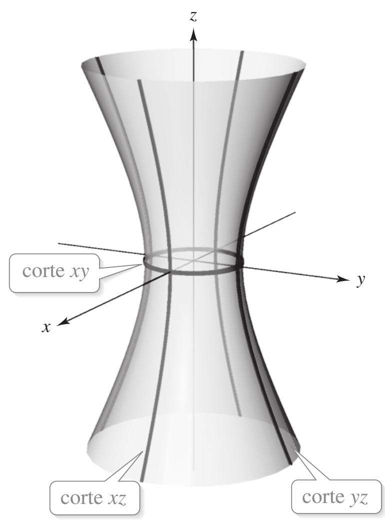


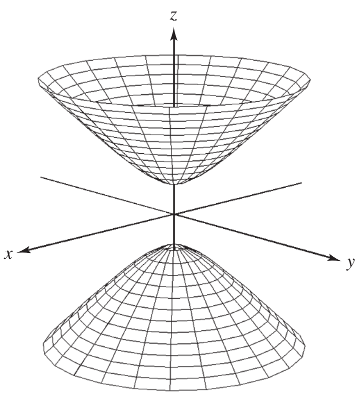
Hiperboloide de uma folha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Corte	*Plano*
Elipse	Paralelo ao plano *xy*
Hipérbole	Paralelo ao plano *xz*
Hipérbole	Paralelo ao plano *yz*

O eixo do hiperboloide corresponde à variável cujo coeficiente é negativo.



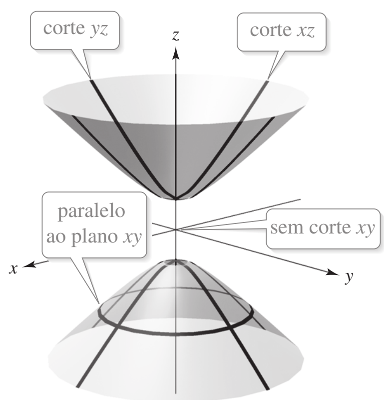


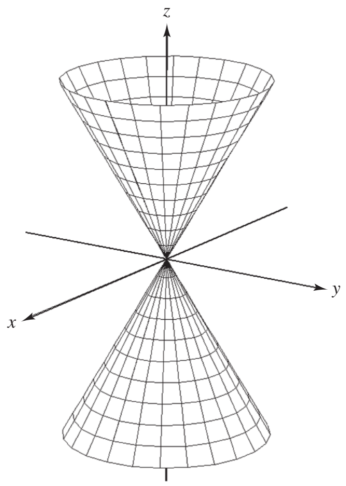
Hiperboloide de duas folhas

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Corte	*Plano*
Elipse	Paralelo ao plano *xy*
Hipérbole	Paralelo ao plano *xz*
Hipérbole	Paralelo ao plano *yz*

O eixo do hiperboloide corresponde à variável cujo coeficiente é positivo. Não há corte no plano coordenado perpendicular a este eixo.



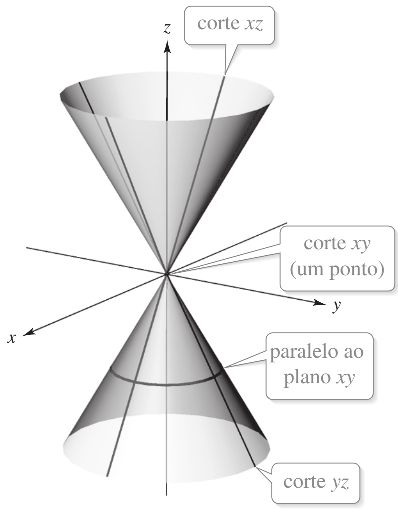


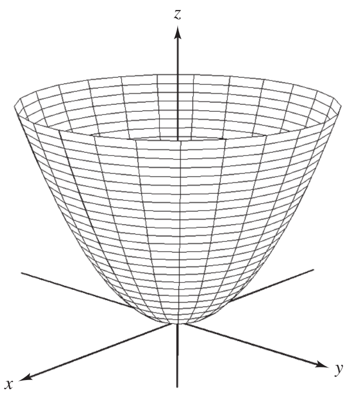
Cone elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Corte	*Plano*
Elipse	Paralelo ao plano xy
Hipérbole	Paralelo ao plano xz
Hipérbole	Paralelo ao plano yz

O eixo do cone corresponde à variável cujo coeficiente é negativo. Os cortes nos planos coordenados paralelos a este eixo são retas que se cruzam.



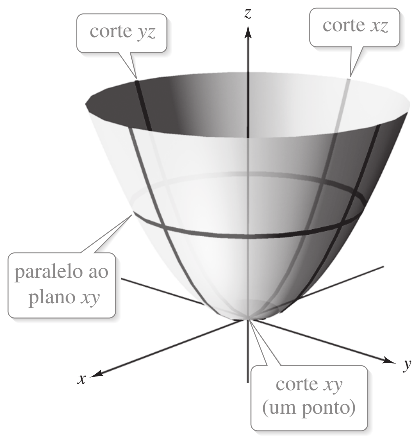


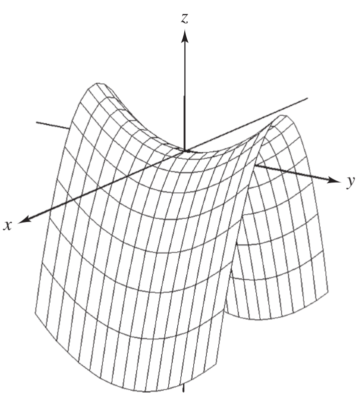
Paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Corte	*Plano*
Elipse	Paralelo ao plano xy
Parábola	Paralelo ao plano xz
Parábola	Paralelo ao plano yz

O eixo do paraboloide corresponde à variável elevada à potência um.



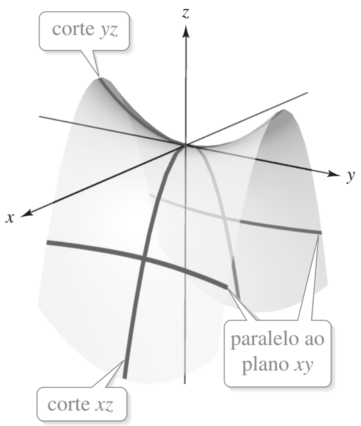


Paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

Corte	*Plano*
Hipérbole	Paralelo ao plano xy
Parábola	Paralelo ao plano xz
Parábola	Paralelo ao plano yz

O eixo do paraboloide corresponde à variável elevada à potência um.



Na sua versão tridimensional, o Teorema dos Eixos Principais relaciona os autovalores e os autovetores de A com a equação da superfície girada, como mostrado no Exemplo 8.

EXEMPLO 8 Rotação de uma superfície quadrática

Faça uma rotação de eixos para eliminar o termo xz na equação quadrática

$$5x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 8xz - 36 = 0.$$

SOLUÇÃO

A matriz A associada a esta equação quadrática é

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

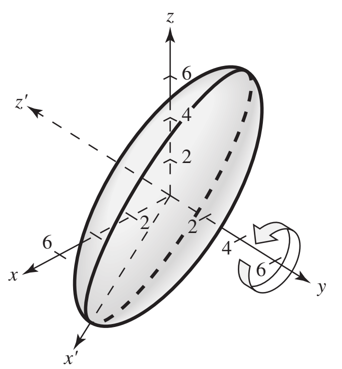


Figura 7.5

que possui autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = 9$ (verifique isso). Assim, no sistema girado $x'y'z'$, a equação quadrática é $(x')^2 + 4(y')^2 + 9(z')^2 - 36 = 0$, cuja forma padrão é

$$\frac{(x')^2}{6^2} + \frac{(y')^2}{3^2} + \frac{(z')^2}{2^2} = 1.$$

O gráfico desta equação é um elipsoide. Conforme mostrado na Figura 7.5, os eixos $x'y'z'$ representam uma rotação no sentido anti-horário de 45° em torno do eixo y. Verifique que as colunas de

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

são os autovetores normalizados de A, que P é ortogonal e que P^TAP é diagonal.

ostill/Shutterstock.com

ÁLGEBRA LINEAR APLICADA

Algumas das mais incomuns obras de arquitetura do mundo utilizam superfícies quadráticas. Por exemplo, a Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida, uma catedral situada em Brasília, Brasil, tem a forma de um hiperboloide de uma folha. Foi desenhada por Oscar Niemeyer, ganhador do premio Pritzker, tendo sido inaugurada em 1970. As dezesseis colunas de aço idênticas curvadas representam duas mãos alcançando o céu. Nas fendas triangulares formadas pelas colunas, o vitral semitransparente permite luz interior para quase toda a altura das colunas.

OTIMIZAÇÃO RESTRITA

Muitas aplicações reais exigem que você determine o valor máximo ou mínimo de uma quantidade sujeita a uma *restrição*. Por exemplo, considere um exemplo simplificado em que precisa encontrar os valores máximo e mínimo da superfície quadrática $f(x, y) = 9x^2 + 5y^2$ ao longo da curva formada pela intersecção da superfície com o cilindro unitário $x^2 + y^2 = 1$, como mostrado na Figura 7.6. A restrição é o cilindro unitário $x^2 + y^2 = 1$. Por inspeção, o valor máximo de f é 9 quando $x = \pm 1$ e $y = 0$ e o valor mínimo de f é 5 quando $x = 0$ e $y = \pm 1$.

O teorema abaixo permite que você use os autovalores e os autovetores de uma matriz simétrica para resolver um problema de otimização restrita.

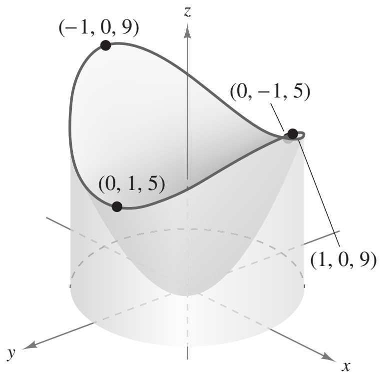


Figura 7.6

Teorema de Otimização Restrita

Para uma forma quadrática f em n variáveis com matriz da forma quadrática A sujeita à restrição $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$, o valor máximo de f é o maior autovalor de A e o valor mínimo de f é o menor autovalor de A.

DEMONSTRAÇÃO

A forma quadrática f pode ser escrita como

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}.$$

A matriz da forma quadrática A é simétrica, de modo que A tem n autovalores reais (contando multiplicidades). Denote-os por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, e suponha que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Agora, considere uma mudança de variáveis $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$, onde $\mathbf{x}' = [x_1' \;\; x_2' \;\; \ldots \;\; x_n']^T$ e P é uma matriz ortogonal que diagonaliza A. Então

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \mathbf{x}^T A\mathbf{x} \\ &= (P\mathbf{x}')^T A(P\mathbf{x}') \\ &= (\mathbf{x}')^T P^T AP\mathbf{x}' \\ &= \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \cdots + \lambda_n(x_n')^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|^2 &= \|P\mathbf{x}'\|^2 \\ &= (P\mathbf{x}')^T(P\mathbf{x}') \\ &= (\mathbf{x}')^T P^T P\mathbf{x}' \\ &= (\mathbf{x}')^T\mathbf{x}' \\ &= (x_1')^2 + (x_2')^2 + \cdots + (x_n')^2 \\ &= \|\mathbf{x}'\|^2. \end{aligned}$$

Como $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$, segue que $\|\mathbf{x}'\|^2 = 1$, donde decorre

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_1[(x_1')^2 + (x_2')^2 + \cdots + (x_n')^2] \\ &\geq \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \cdots + \lambda_n(x_n')^2 \\ &\geq \lambda_n[(x_1')^2 + (x_2')^2 + \cdots + (x_n')^2] \\ &= \lambda_n. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\lambda_1 \geq \mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq \lambda_n$. Assim, todos os valores de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ para os quais $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$ estão entre λ_1 e λ_n. Se $\mathbf{x}$ for um autovetor normalizado que associado a λ_1, então

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(\lambda_1\mathbf{x}) = \lambda_1\|\mathbf{x}\|^2 = \lambda_1.$$

Se $\mathbf{x}$ é um autovetor normalizado que associado a λ_n, então

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(\lambda_n\mathbf{x}) = \lambda_n\|\mathbf{x}\|^2 = \lambda_n.$$

Assim, f tem um máximo restrito λ_1 e um mínimo restrito λ_n. ■

EXEMPLO 9 Encontre os valores máximo e mínimo

Encontre os valores máximo e mínimo de $f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 5x_2^2$ sujeitos à restrição $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$.

OBSERVAÇÃO

Com as substituições $x = x_1$ e $y = x_2$, este é o mesmo problema considerado como exemplo introdutório.

SOLUÇÃO

A matriz da forma quadrática é a matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Por inspeção, os autovalores de A são $\lambda_1 = 9$ e $\lambda_2 = 5$. Assim, pelo Teorema de Otimização Restrita, o valor máximo de z é 9 e o valor mínimo de z é 5.

EXEMPLO 10 Determinação de valores máximo e mínimo

Encontre os valores máximo e mínimo e os correspondentes autovetores normalizados de $z = 7x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2$ sujeitos à restrição $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$.

SOLUÇÃO

A forma quadrática f pode ser escrita usando a notação matricial como

$$f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Verifique que os autovalores de $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ são $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 4$, com os autovetores associados

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o máximo restrito 10 ocorre quando $(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e o mínimo restrito 4 ocorre quando $(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

EXEMPLO 11 Usando uma mudança de variáveis

Para encontrar os valores máximo e mínimo de

$$z = 4xy$$

sujeito à restrição $9x^2 + 4y^2 = 36$, você não pode usar o Teorema de Otimização Restrita diretamente porque a restrição não é $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$. No entanto, com a mudança de variáveis

$$x = 2x' \quad \text{e} \quad y = 3y'$$

o problema se transforma em encontrar os valores máximo e mínimo de

$$z = 24x'y'$$

sujeitos à restrição $(x')^2 + (y')^2 = 1$. Verifique que o valor máximo 12 ocorre quando $(x', y') = \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ ou $(x, y) = \left(\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}\right)$, bem como que o valor mínimo -12 ocorre quando $(x', y') = \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$ ou $(x, y) = \left(\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}\right)$.