4.1.2 Uma proposta de Modelagem Matemática a partir do estudo de embalagens de achocolatados líquidos

Carolina Innocente Rodrigues
Kelen Cristina Pereira de Souza
Mestrado ECM - UFU

Introdução

O ensino de matemática é discutido em diversos eventos educacionais que ocorrem periodicamente. Essa preocupação com a forma de se ensinar matemática tem fundamento nos índices preocupantes de reprovação dos alunos na disciplina ao longo dos anos escolares e também nas diversas provas externas, que procuram avaliar o desempenho dos estudantes em matemática. Entretanto, não há uma "fórmula mágica" que nos apresente o melhor caminho para se ensinar os conteúdos matemáticos. O que dá suporte aos profissionais da educação são metodologias que procuram minimizar os problemas gerados durante o processo de ensino e aprendizagem da matemática como, por exemplo, a resolução de problemas e a utilização de jogos; além destas, podemos considerar a Modelagem Matemática.

A Modelagem Matemática é uma área da Matemática Aplicada, porém pode ser compreendida como uma metodologia que vem a auxiliar o processo de ensino-aprendizagem, pois utiliza tecnologia e relaciona os conteúdos matemáticos com a realidade. Sabe-se que o currículo de matemática é bastante extenso, repleto de diversos conteúdos que, acredita-se, devem ser ensinados para os alunos em uma determinada época de sua vida escolar. Assim, muitos docentes acabam por se prender à ordem de apresentação desses conteúdos aos estudantes e se esquecem de relacioná-los com a realidade exterior à da sala de aula. Essa relação com o cotidiano é o que, na maioria das vezes, produz o significado de determinado conteúdo matemático, uma vez que o aluno consegue perceber a utilidade do mesmo. Os autores Júnior e Santo confirmam essa visão ao afirmarem que:

> *"A modelagem oferece uma maneira de colocar a aplicabilidade da matemática em situações do cotidiano, no currículo escolar em conjunto com o tratamento formal que é predominante no modelo tradicional. Esta ligação da matemática escolar com a matemática da vida cotidiana do aluno faz um papel importante no processo de* escolarização *do indivíduo, pois dá sentido ao conteúdo estudado, facilitando sua aprendizagem e tornando-a mais significativa".* (JÚNIOR e SANTO, 2004, p.2)

Deste modo, a Modelagem Matemática se apresenta como uma alternativa para o ensino dos conteúdos matemáticos a partir da leitura do cotidiano.

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de ensino a ser aplicada em sala de aula, a partir do 8º ano do ensino fundamental, utilizando a Modelagem Matemática. Tal proposta não foi aplicada em sala de aula, por conta de diversos compromissos escolares (datas comemorativas, dias escolares, recuperações e etc.) neste último bimestre escolar.

A proposta consiste na análise de algumas embalagens de achocolatados líquidos presentes no comércio com o objetivo de determinar uma embalagem considerada 'ótima', que seria aquela a utilizar a menor quantidade de material para a sua produção, ou seja, aquela que possui a menor área total. Os resultados obtidos poderão servir para discussões posteriores acerca da diferença entre os valores cobrados no comércio pelos produtos analisados. Essas discussões são de grande importância para a formação de um cidadão crítico e consciente da sociedade na qual está inserido.

A modelagem matemática no ensino de matemática

Apesar de a Modelagem Matemática ser considerada por muitos autores como uma metodologia de ensino da matemática, ela ainda é pouco utilizada no ensino básico. Em uma experiência vivenciada com professores da rede estadual de ensino de Rondônia durante um curso, Leite apresenta algumas conclusões a respeito da importância da modelagem no ensino e das dificuldades encontradas na prática. Algumas dessas conclusões foram:

> "*1º - A modelagem matemática é um importante instrumento pedagógico por que envolve: pesquisa, coleta e análise de dados e atividade em equipe. 2º - A modelagem é um processo e não um fim. 3º - Aspectos como o relacionamento entre os temas escolhidos e o programa da disciplina, o trabalho em grupo em sala de aula e a dinâmica desses grupos se constituem em dificuldades que precisam ser consideradas pelos professores que optam por modelagem. 4º - Verifica-se que, enquanto na maior parte dos livros didáticos as "fórmulas" (modelos) estão prontas e acabadas, com a modelagem, os alunos podem, eles mesmos, a partir de dados experimentais chegar aos modelos que descrevem o fenômeno em questão. 5º - Dentre as dificuldades tem-se a quantidade de conteúdos a serem trabalhados, a falta de tempo e material, e a falta de conhecimento sobre como fazer modelagem".* (LEITE, 2008, p.5 e 6)

Acreditamos que a quantidade de conteúdos a serem trabalhados seja um dos grandes problemas que se configura na aplicação de quase todas as metodologias de ensino de matemática. Entretanto, quando se trata da modelagem, é preciso fazer uma análise do tema a ser trabalhado e, a partir desta, procurar relacionar quais são os conteúdos do currículo que poderão ser abordados durante o processo. Compreendemos que ao se trabalhar com a modelagem matemática não se pretende deixar de lado os conteúdos presentes no currículo, mas sim selecionar aqueles que estarão mais envolvidos com a temática.

Outro fator importante é o entendimento de que a modelagem não é algo finalizado, mas sim um processo. Alguns autores, MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS (2011), esclarecem que trabalhar com a modelagem é entender que o conhecimento é datado. Os autores afirmam que eles mesmos, durante o trabalho que desenvolvem com modelagem, já modificaram muitas vezes as formas de pensar. Assim, entendemos que para o trabalho com a modelagem matemática em sala de aula deve ser também considerado o tempo e o contexto no qual será desenvolvido.

A proposta

Vivemos em um mundo no qual as transformações ocorrem constantemente em diversos setores. Os vários produtos encontrados nos supermercados não fogem à regra. As embalagens que envolvem os produtos procuram acompanhar cada vez mais as tendências do mercado e, assim, se aproximar dos interesses de seu público alvo, ou seja, os consumidores. Entretanto, sabemos que há outros fatores que também influenciam essas transformações como, por exemplo, a concorrência entre as marcas ou sustentabilidade. Isso acaba gerando certa sensação de 'liberdade' de escolha de produtos, como já dizia a música 'No meio de tudo, você' do grupo Engenheiros do Hawaii: *A gente se acostuma a muito pouco. A gente fica achando que é o máximo. Liberdade pra escolher a cor da embalagem*.

Assim, nossa proposta busca analisar algumas embalagens de achocolatado líquido para tentarmos descobrir qual seria aquela considerada 'ótima' do ponto de vista de menor área total para confeccionar tal embalagem. Ressaltamos que os seguintes conteúdos de matemática poderão ser contemplados:

- Medidas;
- Figuras planas e espaciais;
- Área (base, lateral e total);
- Volume;
- Tabelas e gráficos;
- Análise de dados.

O problema

Será que as embalagens encontradas no comércio utilizam a menor área e assim otimizam os custos do material utilizados para fabricá-las? Existe alguma relação entre as áreas da base, laterais e total neste problema de otimização? Quais seriam as medidas necessárias para que determinemos uma embalagem ótima?

Podemos considerar no mínimo três tipos de embalagens diferentes (formatos) de achocolatados líquidos. Medindo todas as dimensões das embalagens: largura (a), comprimento (b) e altura (c), utilizando uma régua comum. No nosso modelo consideramos três embalagens de achocolatados líquidos, que foram identificadas por suas respectivas marcas, e que servirão para a melhor compreensão do processo de aplicação da proposta da atividade. Além das imagens, também constam as medidas reais coletadas em tais embalagens.

EMBALAGEM: KAPO

Largura (a)	3,8cm
Comprimento (b)	5,3cm
Altura (c)	10,6cm

EMBALAGEM: ITALAC

Largura (a)	3,9cm
Comprimento (b)	6,2cm
Altura (c)	8,3cm

EMBALAGEM: ITAMBYNHO

Largura (a)	3,8cm
Comprimento (b)	4,8cm
Altura (c)	11,8cm

Calculando as áreas (base, lateral e total)

Apresentamos a seguir os cálculos a partir das expressões algébricas encontradas nesta etapa da proposta. Entenda muitas igualdades dos cálculos como aproximações.

EMBALAGEM: KAPO

Área da base (Ab)	*Área lateral 1 (Al1)*	*Área lateral 2 (Al2)*	*Área total (At)*
$Ab = 2 \cdot (a \cdot b)$	$Al1 = 2 \cdot (b \cdot c)$	$Al2 = 2 \cdot (a \cdot c)$	$At = Ab + Al1 + Al2$
$Ab = 2 \cdot 3{,}8 \cdot 5{,}3$	$Al1 = 2 \cdot 5{,}3 \cdot 10{,}6$	$Al2 = 2 \cdot 3{,}8 \cdot 10{,}6$	$At = 40{,}28 + 112{,}36 + 80{,}56$
$Ab = 40{,}28\ cm^2$	$Al1 = 112{,}36cm^2$	$Al2 = 80{,}56cm^2$	$At = 233{,}20cm^2$

EMBALAGEM: ITALAC

Área da base (Ab)	*Área lateral 1 (Al1)*	*Área lateral 2 (Al2)*	*Área total (At)*
$Ab = 2 \cdot (a \cdot b)$	$Al1 = 2 \cdot (b \cdot c)$	$Al2 = 2 \cdot (a \cdot c)$	$At = Ab + Al1 + Al2$
$Ab = 2 \cdot 3{,}9 \cdot 6{,}2$	$Al1 = 2 \cdot 6{,}2 \cdot 8{,}3$	$Al2 = 2 \cdot 3{,}9 \cdot 8{,}3$	$At = 48{,}36 + 102{,}92 + 64{,}74$
$Ab = 48{,}36\ cm^2$	$Al1 = 102{,}92cm^2$	$Al2 = 64{,}74cm^2$	$At = 216{,}02cm^2$

EMBALAGEM: ITAMBYNHO

Área da base (Ab)	*Área lateral 1 (Al1)*	*Área lateral 2 (Al2)*	*Área total (At)*
$Ab = 2 \cdot (a \cdot b)$	$Al1 = 2 \cdot (b \cdot c)$	$Al2 = 2 \cdot (a \cdot c)$	$At = Ab + Al1 + Al2$
$Ab = 2 \cdot 3{,}8 \cdot 4{,}8$	$Al1 = 2 \cdot 4{,}8 \cdot 11{,}8$	$Al2 = 2 \cdot 3{,}8 \cdot 11{,}8$	$At = 36{,}48 + 113{,}28 + 89{,}68$
$Ab = 36{,}48\ cm^2$	$Al1 = 113{,}28cm^2$	$Al2 = 89{,}68cm^2$	$At = 239{,}44cm^2$

Calculando o volume a partir das medidas

Apesar da embalagem constar em seu rótulo que o volume é de 200ml, que equivale a 200cm³, consideramos a importância de verificar se as medidas apresentadas pela embalagem comportariam, de fato, essa quantidade de líquido. E verificar se realmente havia tal volume nas embalagens das marcas selecionadas. Assim, iniciamos com as expressões algébricas:

EMBALAGEM: KAPO

Volume líquido do rótulo (Vr)	*Volume líquido de produto (Vp)*	*Volume da embalagem (Vc)*
$Vr = 200cm^3$	$Vp = 198cm^3$	$Vc = a \cdot b \cdot c$ $Vc = 3{,}8 \cdot 5{,}3 \cdot 10{,}6$ $Vc = 213{,}48cm^3$

EMBALAGEM: ITALAC

Volume líquido do rótulo (Vr)	*Volume líquido de produto (Vp)*	*Volume da embalagem (Vc)*
$Vr = 200cm^3$	$Vp = 200cm^3$	$Vc = a \cdot b \cdot c$ $Vc = 3{,}9 \cdot 6{,}2 \cdot 8{,}3$ $Vc = 200{,}70cm^3$

EMBALAGEM: ITAMBYNHO

Volume líquido do rótulo (Vr)	*Volume líquido de produto (Vp)*	*Volume da embalagem (Vc)*
$Vr = 200cm^3$	$Vp = 195cm^3$	$Vc = a \cdot b \cdot c$ $Vc = 3{,}8 \cdot 4{,}8 \cdot 11{,}8$ $Vc = 215{,}23cm^3$

Verificamos que a embalagem com área mínima é a ITALAC e que enquanto sua área total é a menor, sua área da base é a maior. O volume da embalagem ITALAC é o que mais se aproxima do volume do líquido, portanto confirma que ocupa a maior parte do espaço interno da mesma, enquanto as outras marcas não otimizam tanto seus gastos com o material da embalagem. Além disso, verificou-se que em duas marcas: KAPO e ITAMBYNHO, os volumes do rótulo (200ml) não corresponderam aos volumes encontrados nas embalagens adquiridas para análise (198ml e 195ml, respectivamente). Além disso, essas mesmas marcas possuem os maiores valores para as áreas totais.

Determinando a embalagem ótima

Vamos seguir os seguintes passos:

i. Fixamos uma dimensão;
ii. Façamos a média desta dimensão, a partir das medidas das embalagens utilizadas na proposta;
iii. Substituímos o valor da dimensão fixada pelo valor da média obtida nos cálculos do item anterior e, a partir dessa substituição, obtemos uma relação entre as outras duas dimensões. Lembrando que o valor do volume do líquido a ser considerado é de 200ml.

Sendo assim, segue um exemplo de acordo com as embalagens utilizadas até então nesta proposta:

- ✓ Dimensão fixada escolhida: largura (a);
- ✓ Média das larguras é aproximadamente 3,8cm;
- ✓ $V = a \cdot b \cdot c$, e como o volume do líquido corresponde a 200ml, então:

$$200 = c \cdot b \cdot 3{,}8$$

$$c \cdot b = 52{,}6$$

$$c = \frac{52{,}6}{b}$$

- ✓ Cálculo da área total utilizando a relação obtida anteriormente:

$$At = 2 \cdot Ab + 2 \cdot Al1 + 2 \cdot Al2$$

$$At = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$$

$$At = 2 \cdot \left(3{,}8 \cdot b + b \cdot \frac{52{,}6}{b} + 3{,}8 \cdot \frac{52{,}6}{b}\right)$$

$$At = 2 \cdot \left(52{,}6 + 3{,}8b + \frac{200}{b}\right)$$

Determinando as dimensões “ótimas” por derivada

Utilizando as duas expressões algébricas detalhadas anteriormente, obtemos:

$$c = \frac{52{,}6}{b} \qquad e \qquad At = 2 \cdot \left(52{,}6 + 3{,}8b + \frac{200}{b}\right)$$

Calculando a derivada primeira da expressão da área total e igualando a zero, obtemos o valor da dimensão b, pela fórmula:

$$2 \cdot \left(0 - \frac{200}{b^2} + 3{,}8\right) = 0$$

$$\frac{200}{b^2} = 3{,}8$$

$$b = 7{,}25cm.$$

Como $At'' = \frac{800}{b^3}$ substituindo $b = 7{,}25cm$, temos que: $At'' > 0$. Assim, $b = 7{,}25cm$ é ponto de mínimo. Temos que:

$$c = \frac{52{,}6}{7{,}25} = 7{,}25cm.$$

Portanto, as dimensões da embalagem “ótima” são aproximadamente: 7,25cm, 7,25cm e 3,8cm. Assim, a área total para estas dimensões é:

$$At = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$$

$$At = 2 \cdot (3{,}8 \cdot 7{,}25 + 7{,}25 \cdot 7{,}25 + 3{,}8 \cdot 7{,}25)$$

$$At = 215{,}32cm^2$$

Notamos, que a embalagem que melhor se aproxima do valor obtido é a da ITALAC, que tem dimensões iguais a 3,9cm, 6,2cm e 8,3cm e área total igual a 216,02 cm^2.

Considerações finais

Neste trabalho, estudamos o modelo de embalagem “ótima” para achocolatados. Na coleção de dados foram estudadas três embalagens e verificou-se que uma das embalagens está próxima da área total ótima. O cálculo de área total ótima está diretamente relacionado com o custo do material empregado para a embalagem que está sendo produzida, o que motiva o estudo realizado.

Referências

JÚNIOR, A. G.; Santo, A. O. E. A modelagem como caminho para “fazer matemática” na sala de aula. em: **Anais do VII Congresso Norte/Nordeste de Educação em Ciências e Matemática**, Belém, 8 a 11 de dez. 2004.

LEITE, K. G. Modelagem matemática "para" sala de aula: uma experiência com professores do Ensino Médio. em: **III Fórum de Educação e Diversidade**, 2008, Tangará da Serra-MT. Anais, 2008.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. Modelagem em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. 142p.
Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23391 >Acessado em: 16 de novembro de 2014.