



O trabalho que apresentamos nesta seção foi o resultado das pesquisas realizadas por um grupo de professores de matemática da rede de ensino, num curso de especialização que organizamos na UFABC em 2009-10 ???. Como parte deste trabalho é desenvolvido um tratamento matemático dos índices de homicídios dos quatro municípios da Grande São Paulo: Santo André, São Caetano, São Bernardo e Diadema, com a elaboração de modelos que mostram os possíveis níveis de estabilidade nestes municípios, e um comparativo entre tais índices.

A motivação para este estudo partiu de sugestões dos professores preocupados com a formação de cidadãos, acreditando ser possível vincular o desejo de aprender modelagem matemática à vontade de interferir na sociedade tendo em vista que o problema, comum a todos do grupo, é lecionar em escolas públicas situadas na periferia da cidade de São Paulo e nas cidades do ABCD, região conhecida por seus altos índices de violência e criminalidade.

Os objetivos principais do curso de Especialização em Ensino-Aprendizagem com Modelagem eram:

- a) Aprender a construir modelos matemáticos;
- b) Formular modelos matemáticos dos homicídios dolosos ocorridos nas cidades de Santo André, São Bernardo, São Caetano e Diadema de 1999 até 2007;
- c) Compreender para quais níveis de criminalidade está se caminhando, através de uma análise das tendências apresentadas;
- d) Incentivar e apoiar novos estudos que busquem avançar no conhecimento das causas da criminalidade.

Para cada um dos municípios foram construídos modelos, considerando-se como parâmetro o "*crime de homicídio doloso*" por 100.000 habitantes, no período de 1999 à 2007. Este parâmetro é apresentado como fator de maior peso no cálculo do **índice de criminalidade**.

O objetivo dos modelos matemáticos do presente trabalho, construídos a partir de dados oficiais da Secretaria de Segurança Pública do Estado de São Paulo, teve como foco principal as "previsões" de níveis de estabilidade do índice de criminalidade em cada município.

Fatores condicionantes do crime e da criminalidade

1. Densidade populacional e grau de urbanização local, bem como o tamanho da comunidade e de suas áreas adjacentes;
2. Variação na composição do contingente populacional local, particularmente quanto à prevalência de estratos populacionais jovens e de indivíduos do sexo masculino;
3. Estabilidade da população no que concerne à mobilidade de residentes locais da comunidade, seus padrões diários de deslocamento e presença de população transitória ou de não-residentes;
4. Meios de transporte localmente disponíveis e sistema viário local;
5. Condições econômicas, incluindo renda média, nível de pobreza e disponibilidade de postos de trabalho;
6. Aspectos culturais, educacionais, religiosos e oportunidades de lazer e entretenimento;
7. Condições da matriz social nuclear, no que concerne o divórcio e coesão do grupo familiar;
8. Clima local;
9. Efetividade das instituições policiais locais;

10. Ênfase diferenciada das polícias locais nas funções operacionais e administrativas da instituição;

11. Políticas, métodos e processos de funcionamento das outras instituições que dão corpo ao sistema de local de justiça criminal, incluindo o Ministério Público, Poder Judiciário e Autoridade Prisional;

12. Atitudes da cidadania em relação ao crime;

13. Práticas prevalentes de notificação de delitos ocorridos às autoridades policiais.

Observamos que para o processo de ensino-aprendizagem com modelagem, cada um dos condicionantes citados poderia ser um sub tema para se construir modelos ou apenas para um estudo estatístico.

Histórico recente da criminalidade do ABCD

Na década de 1950, além das condicionantes da criminalidade citadas, outras puderam ser sentidas no que se refere à tipologia das indústrias da região. Com os investimentos estatais e a entrada de capital estrangeiro, ocorreu um crescimento no setor automobilístico, mecânico, metalúrgico e de material elétrico. Santo André passou a abrigar várias indústrias de auto-peças. Tal indústria necessitou mão de obra mais especializada e as máquinas mais produtivas. Neste momento a mão de obra deixou de ser determinante para o aumento da produção. Na década de 1970 houve um momento de expansão e concentração da indústria na Grande São Paulo. Foi o período denominado de "milagre econômico". Na década seguinte o ritmo de crescimento sofreu um decréscimo, culminando com a recessão dos anos 80. Nos anos 90 a produção industrial continuou desacelerada, com os incentivos fiscais voltados para outras áreas do estado de São Paulo, além das dificuldades de transporte e o custo de mão de obra. O ABC e, em especial Santo André, perdeu várias indústrias, aumentando o número de desempregados. Hoje em dia, há um grande esforço do setor público e da sociedade para a manutenção das indústrias existentes. Além disso, tem-se observado um aumento de atividades nos setores de serviços e no comércio. O desafio do início deste século 21 está relacionado à criação de novas alternativas para a cidade que vai se transformando, garantindo melhores condições de vida a seus moradores.

Dados geográficos e condições sociais da população do ABCD

	Santo André	São Bernardo do Campo	São Caetano do Sul	Diadema
Habitantes	676.723	729.671	676.723	389.271
Favelados	70.000	60.000	0	9.600
D.H.	24.000	11.000	80.000	12.000
Casas Populares (4 anos)	924	3246	0	940
Verbas do PAC	172 milhões	60 milhões	0	73 milhões
Aluguel	3600 famílias	-	15% dos imóveis	-
Abrigo	58 famílias	945 pessoas	0	26 famílias

Tabela 7.1. - Dados sociais das cidades do ABCD.

Santo André - Com até três salários mínimos tem-se mais de 3600 famílias que pagam aluguel de casa. O orçamento da pasta (em 2008) foi de R\$ 151,7 Milhões. Programas Assistenciais mantêm o aluguel-social no valor de R\$ 380 e é responsável pelo abrigo provisório. O D. H. (déficit habitacional) de Santo André é de 24000 unidades, ou seja, $DH=0,035u/p$.

São Bernardo do Campo - Orçamento da pasta (em 2008) foi de R\$ 40 milhões. O D. H. (déficit habitacional) de São Bernardo é $DH=0,015u/p$.

São Caetano do Sul - Orçamento da pasta (em 2008) foi de R\$ 45 Milhões. O município não tem Programas Assistenciais e nem alojamentos provisórios. O D. H. (déficit habitacional) de São Caetano é o mais alto da região: $DH=0,12u/p$. Isto ocorre por ser o município menor e mais estabilizado entre os quatro estudados.

Diadema - O Déficit Habitacional de 12 mil unidades lhe dá um DH de 0,03. Orçamento da pasta (em 2008) foi de 3% do orçamento municipal : R\$ 20.3 Milhões. Como Programa Assistencial tem-se a bolsa auxílio aluguel: até R\$ 300 por um ano, renovável por mais um.

Índice de criminalidade

Nas pesquisas realizadas sobre criminalidade, verificou-se que há alguns índices que determinam os **níveis de criminalidade** e qualidade de vida de uma população. Esses índices foram determinados pelo IEME, Instituto de Estudos Metropolitanos, considerando alguns parâmetros, estatisticamente comprovados, que favorecem a criminalidade. Os dados obtidos são da Secretaria de Segurança Pública do Estado de São Paulo. Como parâmetro oficial toma-se os índices de crimes por 100 000 habitantes, que é um parâmetro internacional neste tipo de estudo. Para estabelecer o índice de criminalidade, são levados em consideração três tipos de crime: homicídios, roubo e Furto de Veículos. O IEME calcula o IC (Índice de Criminalidade) a partir das

7 Criminalidade no ABCD

três variáveis: homicídios com peso de 60%, furtos e roubos de veículos com peso de 30% e furtos e roubos gerais com peso de 10%. O IC é resultado da média ponderada dos três tipos de crimes. Como o peso maior do índice de criminalidade é relativo ao número de homicídios muitas vezes, as taxas de criminalidade se atêm somente a este fator de violência.

Cidade	Estado	Taxa	Mortes	Ranking
Recife	PE	90,5	1375	9 ^o
Belo Horizonte	MG	56,6		99 ^o
Rio de Janeiro	RJ	44,8		205 ^o
Curitiba	PR	44,7		206 ^o
Guarulhos	SP	40,7		265 ^o
porto Alegre	RS	39,5		281 ^o
Belem	PA	37,3		323 ^o
Salvador	BA	36,2		342 ^o
Goiânia	GO	36,1		347 ^o
Brasília	DF	33,3		409 ^o
Fortaleza	CE	32,7		430 ^o
Manaus	AM	31,5		479 ^o
São Paulo	SP	31,1		492 ^o
Campinas	SP	27		

Tabela 7.2 - Cidades brasileiras com mais de 1 milhão de habitantes mais violentas em 2006 Fonte: Folha de São Paulo, Cotidiano 30/01/2008

Cidade	Estado	taxa	homicídios
Ce Sapucaia	MS	107,2	13
Colniza	MT	106,4	13
Itanhangá	MT	105,7	4
Serra	ES	102,4	365
Foz do Iguaçu	PR	98,7	326
Tailândia	PA	96,2	66
Guaíra	PR	94,7	22
Jurema	MT	91,3	9
Recife	PE	90,5	1375
Tunas do Paraná	PR	90,1	2

Tabela 7.3 - Ranking das cidades brasileiras mais violentas em 2006. Fonte: Folha de São Paulo, Cotidiano 30/01/2008

Entre as 10 cidades com maior taxa de homicídio Recife é a única capital. O município de São Paulo que ocupava a 182^a posição no ranking de homicídios passou para a 492^a entre os anos de 2004 e 2006.

Exercício: Complete a Tabela 18.

Etapas de Construção dos Modelos de Homicídios

Para a construção de modelos matemáticos relacionados com o tema em questão é necessário seguir as seguintes etapas:

- 1) Obtenção dos dados de homicídios, em fonte oficial (Secretaria de Segurança pública);
- 2) Plotar os dados e analisar o comportamento de tendência dos mesmos;
- 3) Cálculo do valor de estabilidade h^* a partir do comportamento de tendência;
- 4) Ajuste exponencial da curva $h - h^*$;
- 6) Elaboração do modelo exponencial assintótico a partir do ajuste dos dados; e
- 7) Análise crítica dos resultados.

Modelagem

No estudo da criminalidade no ABCD destacamos o estudo do índice de homicídios dolosos, nos quatro municípios: Santo André, São Bernardo do Campo, São Caetano do Sul e Diadema. No levantamento de dados e durante o processo de modelagem, verificamos que os quatro municípios apresentaram comportamentos semelhantes (decréscimo exponencial assintótico), assim o desenvolvimento da lei de formação dos modelos é apresentado de forma generalizada, após esse desenvolvimento, será discutido em suas especificidades em cada um dos modelos.

Lei de formação do modelo exponencial assintótico para o índice de criminalidade no grande ABCD.

Consideraremos a partir deste ponto, por simplicidade na obtenção de dados, apenas a taxa de homicídios dolosos como índice de criminalidade, embora saibamos que tal fator corresponde a 60% do IC.

Sejam:

t : tempo em anos;

h: taxa de homicídios (mortes por 100.000 habitantes);

h^* : valor de estabilidade do índice de homicídios.

7 Criminalidade no ABCD

O modelo exponencial assintótico é dado por:

$$h(t) = h^* + ae^{-bt} \implies h - h^* = ae^{-bt}$$

A equação diferencial da lei de formação do modelo exponencial assintótico é dado por:

$$\frac{dh}{dt} = -b[h - h^*]$$

Diadema Dados da criminalidade em Diadema

Ano	tempo	h_i :hom/100mil
1999	0	102,82
2000	1	76,15
2001	2	65,79
2002	3	54,12
2003	4	44,48
2004	5	35,39
2005	6	27,57
2006	7	20,26
2007	8	20,55

Tabela 7.4 -Criminalidade em Diadema Fonte:Secretariade Seguranca Pública SP

Taxa de homicídio IH é calculada considerando-se o número de assassinatos por 100 mil habitantes/Ano.

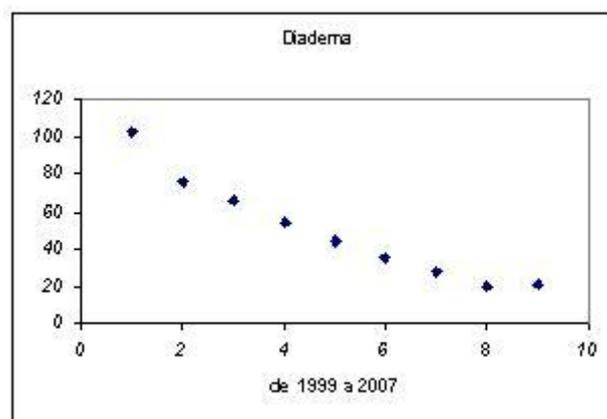


Fig 7.1-Tendência do índice de criminalidade em Diadema

7 Criminalidade no ABCD

O cálculo da estabilidade do índice de criminalidade é obtido, via processo de Ford-Walford, ajustando os pontos $h_{i+1} = f(h_i)$, e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} h_{i+1} = f(h_i) \\ h_{i+1} = h_i \end{cases}$$

Considerando um ajuste linear para a função f , obtemos

$$h_{i+1} = f(h_i) = 0,752h_i + 2,943$$

Logo, o valor de estabilidade h^* é dado pelo ponto fixo de f , isto é,

$$f(h_i) = 0,752h_i + 2,943 = h_i \implies h^* = 11,866$$

Isto significa que se a mesma tendência de criminalidade por for mantida, o município de Diadema deve estabilizar o índice de homicídios dolosos em $h^* = 11,86$.

O modelo exponencial assintótico para o índice de homicídios IH de Diadema é obtido com o ajuste exponencial dos dados $(h_i - h^*)$, ou seja, $h_i - h^* = 97,559e^{-0,3093t}$. Desta forma, considerando o tempo $t = 0$ para o ano 1999, obtemos os índices para cada ano posterior por meio da fórmula

$$h(t) = 11,866 + 97,559e^{-0,3093t} \quad (7.0.1)$$

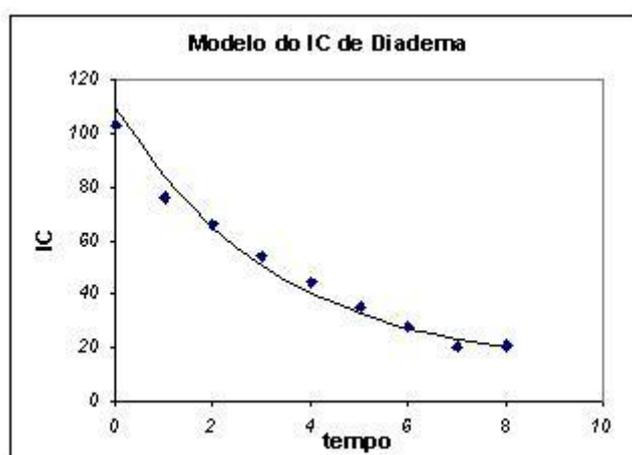


Fig 7.2- Índice de criminalidade de Diadema

7 Criminalidade no ABCD

Pelo modelo podemos calcular em que ano o IH de Diadema será igual 15 (hom/100mil) por exemplo, isto é, determinar t de modo que $h(t) = 15$:

$$15 = 11,866 + 97,559e^{-0,3093t} \implies e^{-0,3093t} = \frac{15 - 11,866}{97,559} = 0,032$$

Logo,

$$-0,3093t = \ln 0,032 = -3,438 \implies t \simeq 11,12 \text{ anos}$$

Isto deveria acontecer em $A = 1999 + 11,12$, ou seja, no mês de fevereiro do ano 2010.

O município de Diadema é bastante violento quando comparado aos demais municípios analisados, já que em 1999 o índice de homicídios dolosos por 100.000 habitantes era de 102,82. Verificamos que o índice apresentou uma considerável redução, após a instituição da lei municipal que determina o fechamento de bares e casas noturnas às 23hs.

O modelo exponencial assintótico do IH de Diadema 7.0.1 pode ser entendido como a solução da equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = a[h - h^*] \\ h_0 = 102,82 \end{cases}$$

onde, a é a variação relativa constante do IH. Assim podemos afirmar que o índice de homicídios dolosos h é proporcional à diferença entre o índice de homicídios h e o valor de estabilidade h^* , com constante de proporcionalidade igual a $-0,3093$.

Exemplo Determinar quantos assassinatos acontecerão nos próximos 10 anos, no município de Diadema.

Solução: Temos que o número de homicídios está para a população do município assim como o HI está para 100 mil, isto é,

$$\frac{m}{P} = \frac{IH}{100mil} \implies m(t) = \frac{1}{100000} P(t)h(t) \quad (7.0.2)$$

Como já determinamos $h(t)$, devemos saber como é o desenvolvimento da população $P(t)$ para termos um modelo do número de homicídios $m(t)$.

7 Criminalidade no ABCD

Ano	tempo:t	População/1000
2000	1	357
2004	5	384
2005	6	390
2006	7	395
2007	8	387
2008	9	394
2009	10	398

Tabela 7.5- População de Diadema

A figura 7.3 seguinte, mostra a tendência do desenvolvimento populacional do município de Diadema:

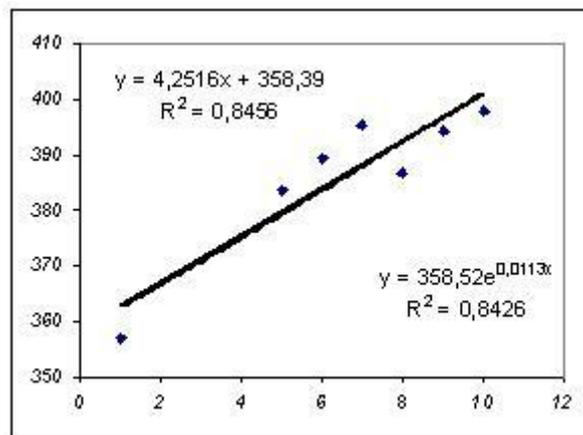


Fig 7.3-Desenvolvimento populacional de Diadema

Fonte-Estimativa populacional do IBGE

Como podemos observar, o crescimento populacional de Diadema foi bastante irregular nos 10 anos analisados o que não permite muita segurança nas estimativas futuras. De qualquer forma, o crescimento linear e o exponencial são bastante parecidos nestes anos e podemos adotar qualquer um deles para um período não muito longo. Estes tipos de crescimento indicam que o município é relativamente novo e ainda não mostra tendência de estabilidade.

$$\text{Crescimento linear} : P(t) = 4,25t + 358$$

$$\text{Crescimento exponencial} : P(t) = 358,5e^{0,0113t}$$

7 Criminalidade no ABCD

Ambas equações são para $t \geq 1$, considerando-se o tempo $t = 1$ para o ano 2000.

Então, podemos considerar da eq.7.0.2 o número de mortes $m(t)$ em cada ano como sendo:

$$m(t) = \frac{1000}{100000}P(t)h(t) = \frac{1}{100}P(t)h(t)$$

Por exemplo, em 2005 ($t = 6$), o número de mortes estimado, usando crescimento linear da população, é dado por:

$$m(6) = 0,01 \times 383,5 \times 27,05 = 103,74$$

Se usarmos o crescimento exponencial, teremos

$$m(6) = 0,01 \times 383,65 \times 27,05 = 103,77$$

São Bernardo do Campo Dados da Criminalidade em São Bernardo do Campo

Ano	tempo	índice IH: h_i
1999	0	51,19
2000	1	52,79
2001	2	36,94
2002	3	34,63
2003	4	34,42
2004	5	27,56
2005	6	19,13
2006	7	13,58
2007	8	10,85

Tabela 7.6-Criminalidade em São Bernardo Fonte:Secretaria de Segurança Pública SP

Podemos observar que o município de São Bernardo do Campo encontra-se em considerável redução do seu índice de homicídios, mantendo-se nesta tendência deverá estabilizar-se em 6,23 homicídios por 100.000 habitantes (Verifique).

Santo André Dados da Criminalidade em Santo André

7 Criminalidade no ABCD

Ano	tempo	índice IC: h_i
1999	0	39,43
2000	1	43,20
2001	2	32,66
2002	3	29,71
2003	4	28,59
2004	5	17,14
2005	6	15,39
2006	7	12,93
2007	8	10,20

Tabela 7.6 -Criminalidade em Santo André Fonte:Secretariade Segurança Pública SP

Podemos verificar que o município de Santo André encontra-se em considerável redução do seu índice de homicídios, mantendo-se nesta tendência deverá estabilizar-se em 4,54 homicídios por 100.000 habitantes (Verifique).

São Caetano do Sul Dados da Criminalidade em São Caetano do Sul

Ano	tempo	índice: h_i
1999	0	12,01
2000	1	12,84
2001	2	14,39
2002	3	7,98
2003	4	9,37
2004	5	5,07
2005	6	2,18
2006	7	5,10
2007	8	1,46

Tabela 7.7-Criminalidade em São Caetano do Sul
Fonte:Secretariade Segurança Pública SP

No caso específico de São Caetano do Sul, os dados apresentaram oscilações anuais (Veja Fig. 7.4).

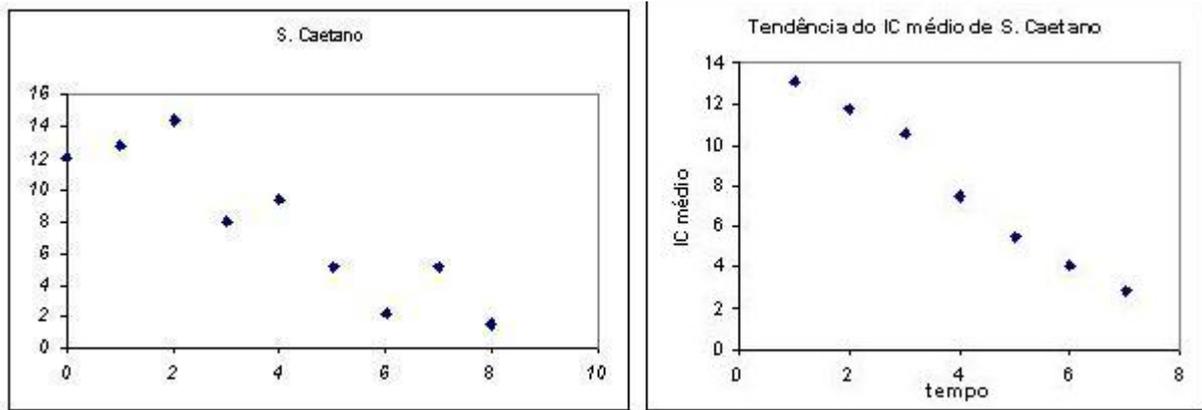


Fig 7.4 -Tendência do IH de São Caetano do Sul

A riqueza destes dados permite formular modelos alternativos para o IH de São Caetano:

Modelo Exponencial Assintótico

Usando os dados "brutos" da Tabela 23 e os mesmos argumentos da modelagem feita com os dados de Diadema, encontramos o valor limite $h^* = 0,54$. Uma alternativa para o cálculo do valor limite é suavizar as oscilações dos dados antes de usar o processo de Ford-Walford. Para isto calculamos novos valores z_i , considerando a **média móvel** dos dados iniciais - neste caso, usamos a média móvel de grau 3:

$$z_i = \frac{\sum_{i-1}^{i+1} h_i}{3} = \frac{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}}{3}$$

Agora, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} z_{i+1} = z_i \\ z_{i+1} = 0,965z_i - 1,384 \end{cases} \implies z^* = 0,405$$

Assim, podemos afirmar que se for mantida a mesma tendência decrescente o índice de homicídios em São Caetano vai estabilizar-se em torno de 0,4.

Agora, um ajuste exponencial dos valores $(z_i - z^*)$ nos dá a equação

$$z - z^* = 18,536e^{-0,254t}$$

Então, o modelo será

$$z(t) = 0,405 + 18,536e^{-0,254t}$$

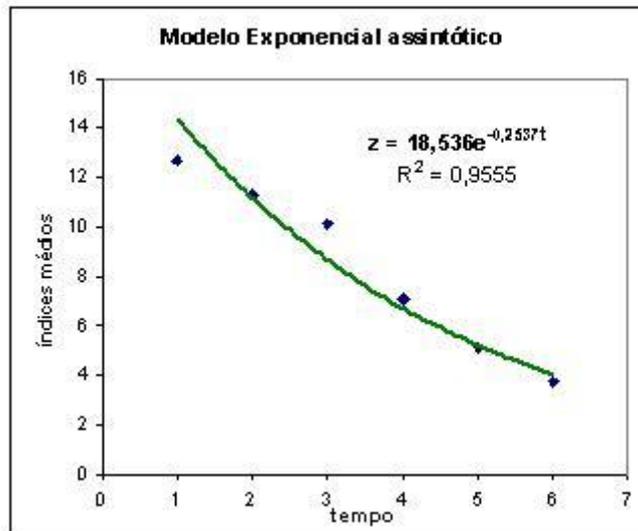


Fig 7.6 -Modelo exponencial assintótico para o IC de São Caetano

Modelo oscilante assintótico

Podemos observar na Fig 7.6 que os dados para o índice de criminalidade são oscilantes e decrescentes. De um modo geral quando se trata de valores oscilantes, os modelos matemáticos envolvem funções trigonométricas. Neste caso específico deveríamos ter uma função trigonométrica compreendida entre duas funções exponenciais decrescentes obtidas separadamente, utilizando os pontos de mínimos e máximos dados da Tabela 7.7.

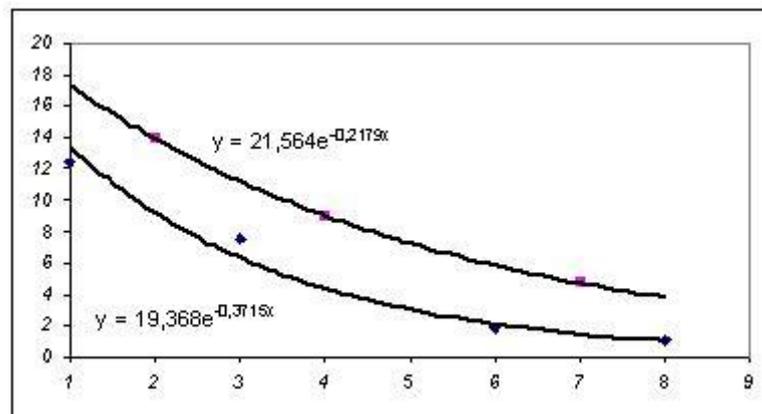


Fig 7.7 - Curvas auxiliares para valores max e min dos dados

7 Criminalidade no ABCD

Assim, devemos ter os valores oscilantes entre as curvas

$$h_{\max}(t) = 0,405 + 21,564e^{-0,218t}$$

$$h_{\min}(t) = 0,405 + 19,368e^{-0,372t}$$

que diminuem com o tempo pois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_{\max}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_{\min}(t) = 0,405 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} [h_{\max}(t) - h_{\min}(t)] = 0$$

De qualquer forma, os dados reais, a partir de $t = 2$, satisfazem a equação

$$H(t) = h_{\max}(t) - \alpha(t)[h_{\max}(t) - h_{\min}(t)]$$

para $0 \leq \alpha(t) \leq 1$, com $\alpha(t)$ periódico.

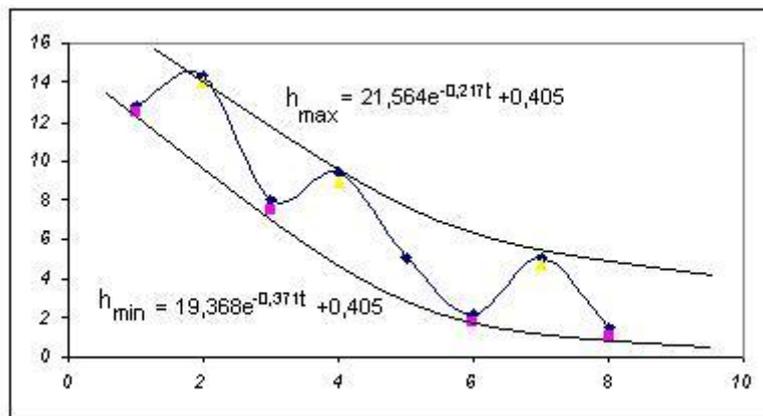


Fig 7.8 -Os valores do IC estão entre h_{\min} e h_{\max}

Exercícios 1) Encontre expressões para $\alpha(t)$ que sejam adequadas aos dados reais.

Sugestão: use $\alpha(t) = \text{sen}^2(at + b)$.

2) Mostre que se $H(t) = h_{\max}(t) - [\text{sen}^2(at + b)][h_{\max}(t) - h_{\min}(t)]$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 0,405$.

Região do ABCD Embora os níveis de criminalidade sejam decrescente nos 4 municípios da região ABCD, cada um tem seu próprio modelo de decrescimento, enfatizado por sua taxa relativa de decrescimento.

7 Criminalidade no ABCD

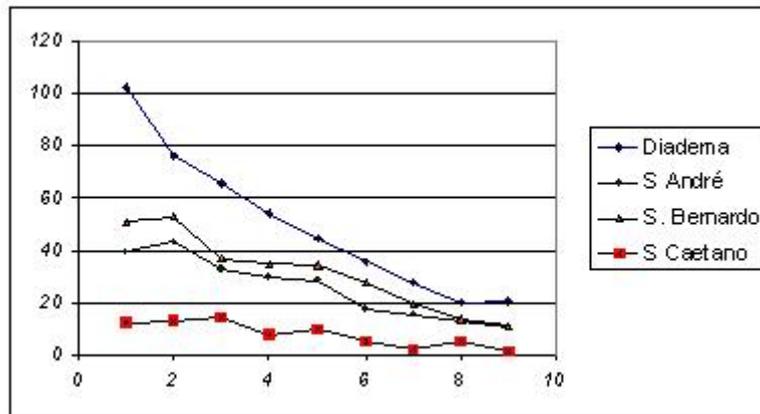


Fig 7.9-Comparação entre os índices de criminalidade dos 4 municípios

Santo André e São Bernardo se comportam de maneira bastante similar quanto à criminalidade enquanto que, no município de Diadema, o IC é bem superior aos demais. Caso interessante é o município de São Caetano cujo IC é compatível com o de países bem desenvolvidos. De qualquer forma, podemos observar que o índice de criminalidade nestes municípios tendem a decrescer seguindo o mesmo processo observado no mundo todo ao longo do tempo: "Faz pelo menos 500 anos que o mundo está se tornando um lugar cada vez mais seguro para viver, e a raça humana nunca foi tão pouco violenta...Da Idade Média para cá, os homicídios na Europa Ocidental caíram de quase 100 para cada 100 mil habitantes por ano para pouco mais de 1"(Ciências -Folha de S. Paulo, 20/10/2011). Este texto é baseado nas pesquisas desenvolvidas por Steven Pinker, psicólogo evolucionista da Universidade de Harvard, em seu livro "The Better Angels of Our Nature", Edit. Viking (2011).

Exercícios 1) Determine modelos exponenciais assintóticos para o índice de criminalidade dos municípios de Santo André e São Bernardo.

2) Formule um modelo único do IC para a região do ABCD. Determine quantas pessoas serão assassinadas nesta região nos próximos 10 anos, supondo que os homicídios correspondem a 60% do IC.

3) Determine os parâmetros de um modelo logístico que se adeque aos dados (obtidos com média móvel de ordem 3) de IC de São Caetano.