Modelo Probabilístico para um esquema de pirâmide

Esquemas de pirâmide são frequentemente oferecidos sob o disfarce de franquias comerciais. Um caso emblemático é o da empresa *Koscot Interplanetary Cosmetics*, acusada pelas agências reguladoras norte-americanas (FTC, SEC e estaduais) de operar um esquema desse tipo, causando um prejuízo estimado em 44 milhões de dólares. A proposta da Koscot era que os participantes poderiam vender cosméticos de porta em porta. No entanto, o foco da empresa estava mais na venda de contratos de distribuição que nos cosméticos propriamente ditos. Um contrato era vendido por US$5.000. Os participantes também podiam pagar US$2.000 para se tornarem supervisores ou US$5.400 para se tornarem diretores. Esses níveis, em teoria, permitiriam que os participantes ganhassem dinheiro recrutando outras pessoas para atuarem nos níveis abaixo deles, pagando comissões sobre os pedidos de cosméticos àqueles nos níveis superiores que os recrutaram. Esses novos recrutas, por sua vez, recrutariam outros participantes para ganhar comissões por conta própria. Como colocou uma matéria jornalística:

> Pense nisso: uma pessoa poderia vender 10 distribuições, e cada uma dessas 10 poderia vender mais 10, e assim por diante. Os distribuidores poderiam ganhar milhares de dólares. O sujeito no topo poderia ganhar milhões. ... Turner tinha um talento para fazer as pessoas acreditarem nele. Seus encontros de vendas se tornaram lendários. ... Nas reuniões, os protegidos de Turner corriam para o palco com seus ternos chamativos e sapatos elegantes, com notas de $100 ou até $1.000 presas às lapelas. Eles dirigiam Cadillacs novos e usavam sapatos de couro de jacaré. "E você também pode", diziam à plateia. "Tudo o que você precisa fazer é acreditar." *Orlando Sentinel*, 17/08/1987.

Os promotores oferecem remuneração em vendas, mas a maior parte do lucro vem do recrutamento de novos vendedores, e não da venda de produtos.

O problema mais básico aqui é a **explosão exponencial**. Se fosse verdade que cada participante conseguisse recrutar, por exemplo, duas pessoas por mês, em cerca de 27 meses toda a população (atual) do Brasil estaria envolvida, o que é claramente impossível. Esse argumento utiliza o crescimento geométrico para mostrar a insustentabilidade do esquema. No entanto, tribunais às vezes rejeitam essa visão como irrealista [2]. Para evitar essas críticas, operadores definem cotas geográficas para limitar o recrutamento.

Exemplo legal: o caso do *Golden Book of Values* em Connecticut [1] Outro ilustra como um empreendimento comercial legítimo pode se misturar a um esquema de pirâmide.

- Os franqueados pagavam uma taxa de US$2.500 para obter uma franquia do *Golden Book of Values*.
- Havia duas formas principais de ganho:
  (a) Desenvolver um "Book of Values" local para venda ao público:
    - Vendendo anúncios para comerciantes a US$195 cada, recebendo 50% de comissão.
    - O livro continha entre 50 e 100 ofertas de descontos e era vendido por US$15, dos quais o franqueado recebia US$12.
  (b) Recrutar novos franqueados, recebendo US$900 por cada novo recrutamento.

Como a produção e venda do livro exigiam tempo, o recrutamento se tornava claramente a fonte mais lucrativa. A brochura de recrutamento prometia ganhos elevados, ilustrando o seguinte cenário: se o franqueado inscrevesse duas pessoas por mês, após um ano ganharia US$21.600 só com recrutamento.

A acusação questionou a validade dessa previsão:

- Supondo que cada franqueado realmente inscreva dois novos por mês, o número de franqueados cresceria em progressão geométrica triplicando a cada mês.
- O professor Margolin (Yale) testemunhou que em 18 meses toda a população dos EUA estaria envolvida, o que é impossível.
- Logo, a estimativa da brochura era enganosa, pois a maioria não poderia alcançar esses ganhos.

O esquema possuía uma nuance estatística adicional:

- Havia uma cota de 270 franquias para todo o estado de Connecticut.
- O tribunal observou que, com essa cota e o recrutamento de dois novos por mês, apenas 27 franqueados conseguiriam lucrar, enquanto os outros 243 perderiam dinheiro.

Modelo probabilístico

Como o recrutamento real não segue um padrão tão regular — ou seja, nem todos recrutam dois novos membros por mês — a próxima etapa é desenvolver um modelo probabilístico para entender melhor o comportamento do esquema. Esse modelo permite:

- Calcular a distribuição de probabilidade do número de pessoas recrutadas por cada participante.
- Analisar como a chance de recuperar o investimento inicial depende do momento em que o participante entra no esquema.
- Determinar a fração de participantes que não conseguirão recrutar ninguém.

Para ações legais, é mais útil uma afirmação absoluta de que a probabilidade de recuperar o investimento é pequena, do que uma simples estimativa aproximada. O modelo probabilístico para esses esquemas de pirâmide apresenta resultados quantitativos para o comportamento dos participantes:

- A maioria dos participantes tem **menos de 10% de chance** de recuperar o investimento inicial, assumindo um pequeno lucro ao recrutar três pessoas.
- Em média, **metade dos participantes não recruta ninguém** e perde todo o dinheiro investido.
- Cerca de **1 em 8 participantes recruta três ou mais pessoas**.
- Menos de **1% dos participantes pode esperar recrutar seis ou mais pessoas**.

Vamos assumir um esquema de recrutamento com cota:

- c é o custo para entrar em um esquema de pirâmide;
- d é o bônus por recrutamento;
- N é o limite de participantes.

Denotamos por R o número esperado de pessoas recrutadas por um participante. Um pessoa deve participar do esquema de

$$R \cdot d > c$$

ou seja, se os ganhos esperados Rd superarem o custo de entrada.

Número esperado de recrutas para o participante k

No momento em que há k participantes tentando recrutar não há motivo, por construção, para que um participante tenha mais ou menos chance de recrutar do que os outros. Vamos assumir que o próximo participante é escolhido por qualquer um dos atuais com probabilidade $\frac{1}{k}$, para todo $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

Nesse momento, o número de recrutamentos pelo k-ésimo recrutado (que ainda não recrutou ninguém) é a variável aleatória

$$S_k = \sum_{i=k}^{N-1} X_i, \text{ onde } X_i = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p_i = \frac{1}{i}, \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - \frac{1}{i}, \end{cases}$$

e o valor esperado de recrutamentos é dado por

$$\mathbb{E}[S_k] = \sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i}. \tag{1}$$

O n-ésimo número harmônico tem a seguinte aproximação[1]

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + \gamma + \omega(n)$$

onde $\gamma \approx 0,577$ é a constante de Euler–Mascheroni e $\omega(n)$ tende a 0 quando $n \to \infty$, ou seja, $H_n - \ln(n) \to \gamma$.

Disso,

$$\sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \approx \ln(N-1) - \ln(k-1)$$

logo

$$\mathbb{E}[S_k] \approx \ln\left(\tfrac{N-1}{k-1}\right). \tag{2}$$

Isso implica que,

> *para $k \geq \frac{N}{e} \approx 0{,}37N$, o participante pode esperar recrutar não mais que* uma pessoa. *Portanto, apenas os primeiros 37% dos participantes têm chance razoável de recrutar ao menos um novo membro.*

Probabilidade de recrutar pelo menos $\left\lceil \frac{c}{d} \right\rceil + 1$ pessoas

Para obter lucro, o participante deve recrutar pelo menos

$$b = \left\lceil \frac{c}{d} \right\rceil + 1$$

pessoas. Por exemplo, se $c = 2500$ e $d = 900$ então $b = 3$ e devemos estimar $\mathbb{P}(S_k \geq 3)$. Uma possibilidade é usarmos uma aproximação de Poisson, outra é calcular numericamente, já que não há uma fórmula fechada para determinar ao menos um limitante superior para

$$\mathbb{P}(S_k \geq b) = p(b) + p(b+1) + \cdots + p(N-k)$$

[1] $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \cdots$.

onde $p(x) = \mathbb{P}(S_k = x)$ é a função de massa de probabilidade (fmp) de S_k. Podemos calcular essa probabilidade usando convolução [código em python clique aqui]. Queremos calcular a distribuição de probabilidade exata de $S_k = \sum_{i=k}^{N-1} X_i$, onde as variáveis X_i são independentes e $X_i \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{i}\right)$. Para isso, utilizamos convoluções sucessivas de distribuições de Bernoulli.

Exemplo. Seja

$$S_k = X_k + X_{k+1} + X_{k+2},$$

com $X_k \sim \text{Bernoulli}(p_k)$, $X_{k+1} \sim \text{Bernoulli}(p_{k+1})$, $X_{k+2} \sim \text{Bernoulli}(p_{k+2})$, e $p_i = \frac{1}{i}$. Todos os X_i são independentes.

1. A distribuição de X_k é:

$$f_{X_k}(s) = \begin{cases} 1 - p_k, & \text{se } s = 0, \\ p_k, & \text{se } s = 1. \end{cases}$$

2. A soma $S^{(1)} = X_k + X_{k+1}$ tem distribuição dada pela convolução:

$$f_{S^{(1)}}(s) = (f_{X_k} * f_{X_{k+1}})(s) = \sum_{j=0}^{s} f_{X_k}(j) \cdot f_{X_{k+1}}(s - j),$$

que resulta em

$$\begin{aligned} f_{S^{(1)}}(0) &= (1 - p_k)(1 - p_{k+1}), \\ f_{S^{(1)}}(1) &= (1 - p_k)p_{k+1} + p_k(1 - p_{k+1}), \\ f_{S^{(1)}}(2) &= p_k p_{k+1}. \end{aligned}$$

3. Agora somamos X_{k+2}: $S_k = S^{(1)} + X_{k+2}$. A nova distribuição é:

$$f_{S_k}(s) = (f_{S^{(1)}} * f_{X_{k+2}})(s) = \sum_{j=0}^{s} f_{S^{(1)}}(j) \cdot f_{X_{k+2}}(s - j)$$

com:

$$\begin{aligned} f_{S_k}(0) &= f_{S^{(1)}}(0) \cdot (1 - p_{k+2}), \\ f_{S_k}(1) &= f_{S^{(1)}}(0) \cdot p_{k+2} + f_{S^{(1)}}(1) \cdot (1 - p_{k+2}), \\ f_{S_k}(2) &= f_{S^{(1)}}(1) \cdot p_{k+2} + f_{S^{(1)}}(2) \cdot (1 - p_{k+2}), \\ f_{S_k}(3) &= f_{S^{(1)}}(2) \cdot p_{k+2}. \end{aligned}$$

4. Assim, a função de massa de probabilidade final de S_k é:

$$f_{S_k}(s) = \mathbb{P}(S_k = s), \quad \text{para } s = 0, 1, 2, 3.$$

5. Finalmente, a probabilidade que desejamos é:

$$\mathbb{P}(S_k \geq b) = \sum_{s=b}^{3} f_{S_k}(s).$$

Nosso objetivo é calcular a distribuição exata de

$$S_k = X_k + X_{k+1} + \cdots + X_{N-1},$$

onde $X_i \sim \text{Bernoulli}(p_i)$, com $p_i = \frac{1}{i}$, e as variáveis X_i são independentes.

Vamos construir a função de massa de probabilidade (fmp) de S_k de forma iterativa, usando convoluções.

1. Começamos com a distribuição de X_k:

$$f_{X_k}(s) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{k}, & \text{se } s = 0, \\ \frac{1}{k}, & \text{se } s = 1. \end{cases}$$

   Denotamos essa fmp como $f_1^{(k)}(s)$, a distribuição da soma parcial $S_k^{(1)} = X_k$.

2. Em seguida, somamos X_{k+1}: a distribuição de $S_k^{(2)} = X_k + X_{k+1}$ é dada por:

$$f_2^{(k)}(s) = (f_{X_k} * f_{X_{k+1}})(s) = \sum_{j=0}^{s} f_{X_k}(j) \cdot f_{X_{k+1}}(s-j),$$

   onde $f_{X_{k+1}}(0) = 1 - \frac{1}{k+1}$, $f_{X_{k+1}}(1) = \frac{1}{k+1}$.

3. Continuamos esse processo iterativamente. Para cada $i = k+2, \ldots, N-1$, definimos:

$$S_k^{(i-k+1)} = X_k + X_{k+1} + \cdots + X_i,$$

   e atualizamos a distribuição:

$$f_{i-k+1}^{(k)}(s) = (f_{i-k}^{(k)} * f_{X_i})(s),$$

   onde $f_{X_i}(0) = 1 - \frac{1}{i}$, $f_{X_i}(1) = \frac{1}{i}$.

4. Após a última convolução com X_{N-1}, obtemos a distribuição de

$$S_k = X_k + X_{k+1} + \cdots + X_{N-1},$$

   com fmp final denotada por $f^{(k)}(s)$.

5. Finalmente, a probabilidade que queremos calcular é:

$$\mathbb{P}(S_k \geq b) = \sum_{s=b}^{N-k} f^{(k)}(s),$$

   onde $f^{(k)}(s)$ é a probabilidade de $S_k = s$, computada via as convoluções acima.

A Tabela 1 mostra algumas essas probabilidades para $N = 270$, confirmando que a chance de recuperar o investimento diminui rapidamente conforme o esquema avança. A tabela completa está aqui.

Tabela 1: Número esperado de recrutamentos e limites superiores para a probabilidade de recrutar pelo menos 2 ou 3 membros ($N = 270$).

Posição k	Número esperado de recrutados	Probabilidade de $\geq r$ recrutados	
		$r = 2$	$r = 3$
5	4,21	0,92	0,79
10	3,40	0,85	0,66
20	2,65	0,74	0,49
30	2,23	0,65	0,38
50	1,69	0,51	0,24
60	1,51	0,45	0,19
70	1,36	0,39	0,16
80	1,22	0,35	0,12
90	1,10	0,30	0,10
100	1,00	0,26	0,08
110	0,90	0,23	0,06
120	0,81	0,20	0,05
130	0,73	0,17	0,04
140	0,66	0,14	0,03
150	0,59	0,12	0,02
240	0,12	0,01	$3{,}0\times10^{-4}$
260	0,03	$6{,}3\times10^{-4}$	$6{,}3\times10^{-6}$

Retorno esperado para o grupo dos participantes

Para K participantes inscritos, o lucro líquido do promotor (primeiro participante) é

$$L = \underbrace{(K-1)c}_{\text{recebe}} - \underbrace{(K-2)d}_{\text{paga}} = c + (K-2)(c-d).$$

A fração do investimento total devolvida aos participantes é aproximadamente

$$\frac{(K-2)}{(K-1)} \times \frac{d}{c} \approx \frac{d}{c}.$$

Portanto, a parte do dinheiro investido que retorna aos participantes é um pouco menor do que d/c, ou seja, a razão entre o valor recebido por cada recrutamento e o investimento inicial. No caso ilustrado ($c = 2500$ e $d = 900$), esse valor é de apenas $9/25 = 0{,}36$. Assim, como um grupo, os participantes perdem 64% do investimento.

Metade dos participantes não recrutam ninguém

A probabilidade do k-ésimo participante não recrutar ninguém é

$$P_k(0) = \prod_{i=k}^{N-1} \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{k-1}{N-1}.$$

Assim, o número esperado de participantes que não recrutam ninguém é

$$\mathbb{E}[\text{número de não recrutadores}] = \sum_{k=1}^{N} P_k(0) = \frac{N-1}{2} \approx \frac{N}{2}.$$

Portanto, em média, metade dos investidores perde todo o dinheiro investido. Importante notar que isso vale independentemente de d, *mesmo que todo dinheiro arrecadado fosse distribuído, metade não receberia nada.*

Distribuição assintotica do número de recrutamentos

Pode-se questionar a relevância desse resultado em um processo judicial se um número significativo de participantes obtivesse altos retornos. Entretanto, podemos mostrar que a fração dos participantes que recrutam exatamente r pessoas se aproxima de $2^{-(r+1)}$ à medida que N cresce. Consequentemente, a fração dos participantes que recrutam pelo menos r membros é aproximadamente 2^{-r}. Isso implica que:

- Apenas 1/8 dos participantes pode esperar recrutar pelo menos 3 membros.
- Apenas 1 em 16 milhões pode esperar recrutar 24 ou mais membros.

Este modelo confirma o julgamento do caso Golden Book of Values, reforçando a impossibilidade de ganhos conforme a propaganda. Como consequência, o juiz proibiu permanentemente os réus de continuar a venda das franquias ou iniciar novos esquemas similares sem aprovação judicial.

Ideia: caminhos da aproximação

No nosso caso, temos $p_i = 1/i$, e desejamos aproximar

$$S_k = \sum_{i=k}^{N-1} X_i \tag{3}$$

por uma variável de Poisson P_k com parâmetro γ_k

$$\gamma_k = \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right). \tag{4}$$

Vale que

$$\mathbb{P}(S_k \geq r) \leq \sum_{i=r}^{\infty} \mathbb{P}(P_k = i) = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{k-1}{N-1} \cdot \frac{\gamma_k^i}{i!}.$$

Como as variáveis P_k que aproximam S_k são muito próximas, podemos derivar uma aproximação precisa para a fração esperada de participantes que recrutarão pelo menos r pessoas: *sejam $X_2, X_3, \ldots, X_N$ uma sequência de variáveis Poisson com parâmetros γ_k. Então,*

$$\frac{1}{N-1} \sum_{k=2}^{N-1} \mathbb{P}(X_k = r) \to \frac{1}{2^{r+1}}, \quad \text{para } r = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

quando $N \to \infty$. Portanto, para grandes valores de N, a fração esperada de participantes que recrutam pelo menos r pessoas é dada por $1/2^r$, para $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Para avaliar a rapidez com que esse limite é atingido, calculamos os valores exatos da equação (5) para $N = 270$ e $N = 1000$, com $r = 1, 2, 3$. Os valores obtidos foram:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_k \geq 1) &= 0,24991 \text{ para } N = 270, \quad 0,24999 \text{ para } N = 1000,\\
\mathbb{P}(X_k \geq 2) &= 0,12475 \text{ para } N = 270, \quad 0,12497 \text{ para } N = 1000,\\
\mathbb{P}(X_k \geq 3) &= 0,06202 \text{ para } N = 270, \quad 0,06244 \text{ para } N = 1000.
\end{aligned}$$

Adendo: Limites para o número harmônico via aproximação por integral

A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua, positiva e decrescente para $x \geq 1$. Podemos então comparar a soma que defini H_n com integrais definidas:

Limite inferior: Como a soma $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pode ser interpretada como a soma das áreas de retângulos de base 1 e altura $\frac{1}{k}$, e como esses retângulos estão acima da curva $y = \frac{1}{x}$ no intervalo correspondente, temos:

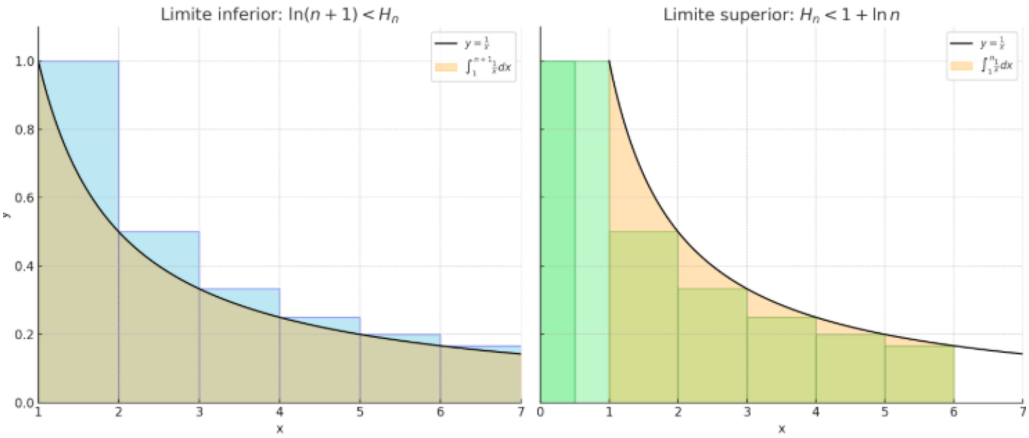
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n+1) < H_n$$

Limite superior: Separando o primeiro termo da soma $\frac{1}{1} = 1$, temos:

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

como os retângulos de altura $\frac{1}{k}$ agora estão abaixo da curva $y = \frac{1}{x}$ no intervalo $[k-1, k]$, obtemos:

$$H_n < 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\, dx = 1 + \ln n$$



Combinando os dois resultados:

$$\boxed{\ln(n+1) < H_n < 1 + \ln n}$$

Referências

[1] H. Naruk. Memorandum of decision: State of connecticut vs. bull investment group. Technical Report 32 Conn. Sup. 279, State of Connecticut, 1975. Resumo traduzido https://docs.google.com/document/d/1Ya3RfXYVCbRusIMefzGNV4IaR7koQOYRkJfTELPz-Sc/edit?usp=sharing

[2] Ger-ro-mar, inc. v. ftc, 518 f.2d 33 (2d cir. 1975). https://www.ftc.gov/legal-library/browse/cases-proceedings/7023493-ger-ro-mar-matter.

[3] Wikipedia. Convolução. https://pt.wikipedia.org/wiki/Convolu%C3%A7%C3%A3o.

[4] Wikipedia. Distribuição de Poisson. https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution. Em inglês, se precisar use o google tradutor.