Projeto O papel dura de 3 semanas a 2 meses para se decompor, dependendo da humidade a que está exposto. Quanto maior a humidade mais rápida é sua decomposição.

Procure dados reais sobre decomposição de outros materiais e faça um estudo comparativo com o papel.

8.6 Poluição [13]

Quando não existe uma política atuante, no sentido de minimizar a poluição causada pela decomposição de material despejado pela indústria papeleira, danos ambientais irreversíveis podem ser notados. A industrialização de papel pode ser um dos maiores geradores de contaminantes do ar e da água. Os processos biológicos que ocorrem em ambientes aquáticos são responsáveis pela degradação dessas substâncias. Podem ser subdivididos em dois grupos: aeróbios e anaeróbios.Esses processos de fermentação de detritos resultam em grande consumo de oxigênio e formação de amônio, metano, dióxido de carbono, etc. Isto leva a uma diminuição do processo de fotossíntese de alguns organismos vegetais e morte das populações de peixes e outros organismos aquáticos.

Restringiremos nossos modelos às formas de poluição (despoluição) de lagos e lagoas, uma vez que, no caso de poluição de rios, a reparação é natural desde que seja cessado o processo de contaminação quando ainda não foram causados danos extremos. No caso de lagoas, o processo de despoluição é mais lento mas pode ser realizado se ainda não estiver "morta". O mecanismo natural de limpeza consiste em substituir a água gradualmente.

Nos modelos que iremos propor, consideramos o fluxo da água na lagoa como um processo de diluição de substância, sem supor que exista sedimentação de poluentes, sua ação biológica etc. Desta forma, vamos propor modelos com as seguintes *hipóteses simplificadoras:*

1. Existe um fluxo de água que entra na lagoa (proveniente de minas ou riachos) e uma vazão igual para outro riacho. Assim, as vazões de entrada e saída são consideradas iguais mesmo quando chove;

2. Quando a água entra na lagoa, se mistura rapidamente e de maneira homogênea. Isto faz com que haja uma distribuição uniforme dos poluentes;

3. O volume da água na lagoa é constante (a quantidade de água de chuva se equilibra com a que se evapora;

4. Os poluentes são retirados da lagoa somente através do fluxo de saída;

5. A poluição é proveniente de uma indústria papeleira que despeja seus contaminantes na lagoa ou riacho que a alimenta.

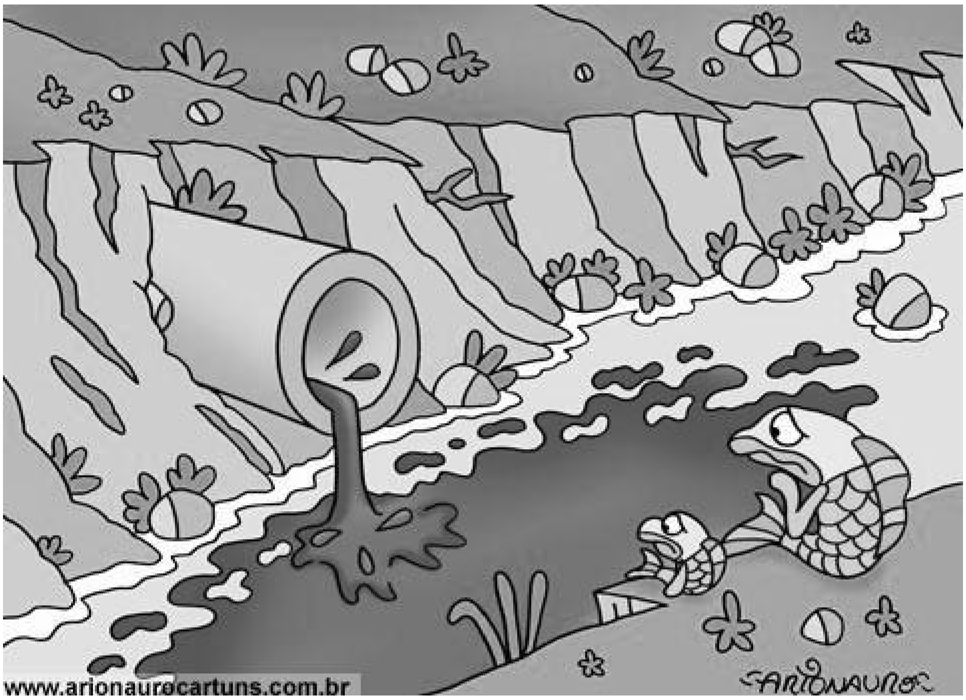

Fig 8.6 - Poluição do riacho
Fonte:www.arionaurocartuns.com.br

Modelo 1 - Despoluição de uma lagoa cessando os despejos da indústria.

Consideramos neste modelo que a indústria cessa totalmente a poluição da lagoa, colocando filtros especiais existentes no mercado que deveriam ser usados desde o começo [2].

Consideremos os seguintes dados:

· As vazões (entrada e saída) são iguais e constantes dadas por $r(l/s)$ - r litros por segundo;

· O volume da lagoa é constante V (litros);

· Seja P_0 a quantidade e detritos químicos existentes na lagoa no instante $t = 0$ em que cessou a poluição. $P = P(t)$ é a quantidade de poluente dissolvida na água no instante $t \geqslant 0$;

[2]A Lei Federal 6838 da Política Nacional do Meio Ambiente, de 31/8/81, gerada na UNICAMP, estabelece o uso de filtros para indústrias poluidoras.

Como o volume da lagoa é constante, assim como as vazões, então é razoável supor que "*a variação da quantidade de poluentes, por unidade de tempo, seja proporcional à quantidade existente na lagoa em cada instante*":

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = -\frac{rP}{V} \\ P_0 = P(0) \end{cases} \tag{8.6.1}$$

A solução de 8.6.1 é dada por:

$$P(t) = P_0 e^{-\frac{rt}{V}} \tag{8.6.2}$$

Neste caso, a poluição diminui rapidamente no início e depois se torna mais lenta à medida que o tempo passa mas, de qualquer forma, teremos

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = 0 \tag{8.6.3}$$

ou seja, a lagoa estará despoluida depois e algum tempo. Podemos observar da equação 8.6.2 que um aumento na vazão diminui a poluição em menor tempo.

Observação: A equação **8.6.3** indica que o tempo para que a lagoa possa ser considerada totalmente despoluida deve ser *muito grande* ($t \to \infty$). Na prática pode-se considerar $P(t) \simeq 0$ se $P(t) = 0,0001V$ e, neste caso, o tempo gasto para tal despoluição é obtido de 8.6.2:

$$\begin{aligned} 0,0001V &= P_0 e^{-\frac{rt}{V}} \Longrightarrow \frac{rt}{V} = \ln P_0 - \ln 0,0001V \\ &\Rightarrow t = \frac{V}{r} \ln \frac{P_0}{0,0001V} \end{aligned}$$

Modelo 2 - A poluição é continuada Se a indústria continuar poluindo, o modelo matemático deve incorporar esta poluição. Seja $Q(t)$ a quantidade total de poluentes acumulados na lagoa, desde o instante $t = 0$ até o tempo t. Temos então que

$$P^*(t) = \frac{dQ}{dt}$$

é sua variação por unidade de tempo. A equação 8.6.1 deve ser modificada para atender também à poluição acumulada:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = P^*(t) - \frac{rP}{V} \\ P_0 = P(0) \text{ e } r > 0 \end{cases} \tag{8.6.4}$$

E equação 8.6.4 é uma equação diferencial linear não-homogênea, de primeira ordem cuja solução é dada por

$$P(t) = P_0 e^{-\frac{rt}{V}} + e^{-\frac{rt}{V}} \int_0^t P^*(s) e^{\frac{rs}{V}} ds \tag{8.6.5}$$

3

Observamos que a primeira parcela de 8.6.5 independe da poluição $P^*(t)$ que é despejada a partir de $t = 0$. Ainda, para um tempo suficientemente grande, a poluição remanescente da inicial $P_0 e^{-\frac{rt}{V}}$ deverá ter um valor insignificante, o que significa que a poluição inicial não afeta sensivelmente a quantidade total de poluentes.

A acumulação de poluentes depende essencialmente da maneira como a indústria lança os poluentes na lagoa. Vejamos alguns casos:

1· A indústria **lança continuamente uma quantidade constante**, isto é, $P^*(t) = P_0^*$. Neste caso, a solução é dada por

$$P(t) = P_0 e^{-\frac{rt}{V}} + e^{-\frac{rt}{V}} \int_0^t P_0^* \, e^{\frac{rs}{V}} ds = \left[P_0 + \frac{V}{r} P_0^*\right] e^{-\frac{rt}{V}} + \frac{V}{r} P_0^*$$

Observamos que, quando t cresce, $P(t)$ tende a se estabilizar no ponto $\frac{V}{r} P_0^*$.

Se $P_0 = \frac{V}{r} P_0^*$, a quantidade de poluentes na lagoa permanece constante, isto é, a quantidade que entra em cada instante é o mesmo daquele que sai;

[3] A solução de 8.6.4 é obtida, considerando-se a combinação linear da solução da equação homogênea 8.6.3 com uma solução particular de 8.6.4. Suponhamos que

$$P_p(t) = K(t) e^{-\frac{rt}{V}}$$

seja uma solução particular de 8.6.4, então, deve satisfazer 8.6.4:

$$\left[-\frac{r}{V} K + \frac{dK}{dt} + \frac{r}{V} K\right] e^{-\frac{rt}{V}} = P^*(t)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{dK}{dt} = e^{\frac{rt}{V}} P^*(t) \Rightarrow K(t) = \int e^{\frac{rt}{V}} P^*(t) + C$$

Se $P_0 < \frac{V}{r}P_0^*$, a quantidade $P(t)$ cresce tendendo ao valor $\frac{V}{r}P_0^*$;
Se $P_0 > \frac{V}{r}P_0^*$, a quantidade $P(t)$ decresce com o tempo, tendendo ao valor $\frac{V}{r}P_0^*$;

Exercícios (a) Use a concentração de poluentes, em vez da sua quantidade, isto é, $C(t) = \frac{P(t)}{V}$ e mostre que

$$C(t) = [C_0 - C_0^*]\, e^{-\frac{r}{V}t} + C_0^*$$

(b) Suponha que uma fábrica poluidora de um lago pare de funcionar quando a concentração de poluentes for K_0. Em quanto tempo a concentração será a metade de K_0?

2· Suponhamos que a indústria continua poluindo a lagoa continuamente mas, numa **forma decrescente**, ísto é, lançando cada vez menos poluentes por unidade de tempo. Por exemplo, considerando $P^*(t) = P_0^* e^{-bt}$ com $b > 0$. Neste caso,

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = P_0^* e^{-bt} - \frac{rP}{V} \\ P_0 = P(0) \text{ e } r, b > 0 \end{cases}$$

A solução desta equação é dada por:

$$\begin{aligned} P(t) &= \left[P_0 - \frac{P_0^*}{\frac{r}{V} - b}\right] e^{-\frac{r}{V}t} + \frac{P_0^*}{\frac{r}{V} - b} e^{-bt} \quad \text{se} \quad \frac{r}{V} \neq b \\ &\quad \text{ou} \\ P(t) &= [P_0 + P_0^*]\, e^{-\frac{r}{V}t} \quad \text{se} \quad \frac{r}{V} = b \end{aligned}$$

Em ambos os casos, a lagoa será despoluida quando t crescer.

3· Se a indústria tem um **sistema periódico de descargas**, intensificando-as em certas ocasiões e reduzindo-as em outras, podemos pensar num modelo onde $P^*(t) = P_0^*(1 + \sin \omega t)$, com $\omega > 0$.

O modelo geral 8.6.4, neste caso, é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = P_0^*(1 + \sin \omega t) - \frac{rP}{V} \\ P_0 = P(0) \text{ e } \quad r, \omega > 0 \end{cases} \tag{8.6.6}$$

Exercícios 1) Resolva a equação 8.6.6 e encontre o valor limiar de P_0^* para que ocorra uma despoluição da lagoa.

2) Um lago de volume $V = 5.10^7 m^3$ é abastecido por um riacho cuja vazão é de 100 m^3/h. Uma indústria de papel é instalada na beira deste riacho, poluindo-o na ordem

de $50kg/m^3$. Se a quantidade máxima de poluentes suportável no lago é do nível de 0,5 kg/m^3,pergunta-se:

a. Até quando a fábrica pode funcionar sem causar danos para a vida aquática?

b. Qual a concentração de poluentes no lago depois de um ano?

Sugestão: Use $P_0^* = rC_0^* = 100m^3/h \times 50kg/m^3 = 5000kg/h$ e

$$\frac{dP}{dt} = P_0^* - \frac{r}{V}P \quad \text{com} \quad r = 100$$

c. Se existe uma saída de água do lago também de vazão igual á 100 m^3/h, encontre uma maneira de tornar a água do lago viável, mesmo com a indústria funcionando.