Ruína do Jogador

Considere um jogador que com capital $x \in (-B, A)$ a cada passo

- ganha R$1 com probabilidade $\frac{1}{2}$ (vai para $x+1$), ou
- perde R$1 com probabilidade $\frac{1}{2}$ (vai para $x-1$),

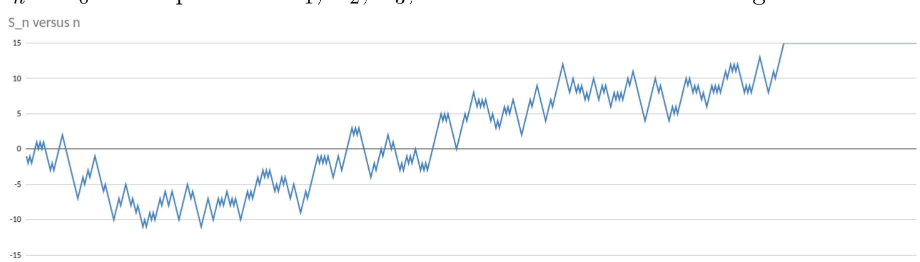
de modo independente.

O processo termina quando o jogador ganha A (vitória) ou perde B (falência).

Se o capital inicial é S_0 então após n rodadas

$$S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_n$$

onde X_i é uma variável aleatória que assume valore em $\{-1, +1\}$ com probabilidade $\frac{1}{2}$, ela representada o resultado de cada rodada. Uma vez que $S_n = S_0 + A$ ou $S_n = S_0 - B$ o processo $X_1, X_2, X_3, \ldots$ fica com o valor fixo atingido.



A variável aleatória

$$\tau = \min\{n \geq : S_n = S_0 + A \text{ ou } S_n = S_0 - B\}$$

é chamada **tempo de parada**.

Note que podemos assumir que $S_0 = 0$.

1. Probabilidade de vitória

Seja $p(x) = \mathbb{P}(S_n = A \mid S_0 = x)$, para $-B < x < A$, a probabilidade de atingir A antes de $-B$, começando com capital $x \in (-B, A)$. Então

$$p(x) = \frac{x+B}{A+B}, \quad (\forall x, \ -B < x < A)$$

e $p(x) = 1$ se $x \geq A$ e e $p(x) = 0$ se $x \leq -B$.

Demonstração. Para $-B < x < A$, depois do primeiro passo o capital do jogador ou é $x+1$ como probabilidade $\frac{1}{2}$ ou o capital é $x-1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$. Usamos a lei de probabilidade total e obtemos a equação de recorrência

$$p(x) = \frac{1}{2}p(x+1) + \frac{1}{2}p(x-1)$$

com condições de contorno dadas por $p(-B) = 0$ e $p(A) = 1$. De $p(x) = \frac{1}{2}p(x+1) + \frac{1}{2}p(x-1)$ obtemos

$$\begin{aligned} p(x+1) - p(x) - (p(x) - p(x-1)) = 0 &\Leftrightarrow \Delta p(x) - \Delta p(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Delta^2 p(x) = 0 \end{aligned}$$

logo a equação de diferenças tem como solução geral uma função afim

$$p(x) = \alpha x + \beta$$

Substituindo nas condições de contorno

$$\begin{cases} \alpha(-B) + \beta = 0 \\ \alpha A + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \alpha B \\ \alpha A + \alpha B = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{A+B}, \quad \beta = \frac{B}{A+B}$$

logo $p(x) = \frac{x+B}{A+B}$. □

Conclusão
A probabilidade do jogador ganhar A antes de perder B é $\frac{B}{A+B}$.
A probabilidade do jogador perder B antes de ganhar A é $\frac{A}{A+B}$.

2. Esperança do Tempo de Parada

Seja $T(x) = \mathbb{E}_x[\tau]$ onde τ é o tempo de parada ao atingir A ou $-B$. Para $-B < x < A$, temos

$$T(x) = \mathbb{E}_x[\tau] = \mathbb{E}_x[1 + \tau_1] = 1 + \mathbb{E}_x[\tau_1]$$

onde τ_1 é o tempo de parada restante após o primeiro passo. Como no próximo passo o jogador vai para $x+1$ ou $x-1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$ cada, condicionando sobre o primeiro movimento do jogador e aplicando a lei da esperança total

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[\tau_1] = \mathbb{E}_x[\tau_1 \,|\, X_1 = x+1] \cdot \mathbb{P}(X_1 = x+1 \,|\, S_0 = x) + \\ \mathbb{E}_x[\tau_1 \,|\, X_1 = x-1] \cdot \mathbb{P}(X_1 = x-1 \,|\, S_0 = x). \end{aligned}$$

Como τ_1 representa o tempo restante até a absorção a partir do instante 1, temos

$$\mathbb{E}_x[\tau_1 \,|\, X_1 = y] = T(y) \text{ para } y = x \pm 1$$

e $\mathbb{P}(X_1 = y \,|\, S_0 = x) = \frac{1}{2}$ para $y = x \pm 1$. Assim

$$\mathbb{E}_x[\tau_1] = \frac{1}{2}T(x+1) + \frac{1}{2}T(x-1)$$

Logo

$$T(x) = 1 + \frac{1}{2}T(x+1) + \frac{1}{2}T(x-1)$$

com condições de contorno

$$T(-B) = 0, \quad T(A) = 0.$$

Multiplicando ambos os lados por 2 e rearranjando, obtemos

$$T(x+1) - T(x) - T(x) + T(x-1) = -2$$

A expressão à esquerda é a segunda diferença finita de T, denotada por $\Delta^2 T(x)$. Assim

$$\Delta^2 T(x) = -2$$

Como a segunda diferença finita é constante, segue que $T(x)$ é um polinômio de grau 2. Ou seja, existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(x) = ax^2 + bx + c$$

e como $\Delta^2 T(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - 2(ax^2 + bx + c) + a(x-1)^2 + b(x-1) + c = -2$ temos que $a = -1$

$$T(x) = -x^2 + bx + c.$$

e impondo as condições de contorno $T(x) = -x^2 + (A - B)x - AB$. A solução dessa equação de diferenças com as condições de contorno é dada por

$$T(x) = (A - x)(x + B)$$

em particular, se o jogador começa em $x = 0$, o tempo esperado até o fim do jogo é

$$T(0) = AB.$$

3. O caso não simétrico ($p \neq q$)

Considere um jogador que, a cada passo, ganha R\$1 com probabilidade $p \in (0, 1)$ ou perde R\$1 com probabilidade $q = 1 - p$.

O capital do jogador segue o processo $S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_n$, onde $X_i \in \{+1, -1\}$ com

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = q.$$

Consideramos $S_0 = 0$ e o jogo termina quando o capital atinge A (vitória) ou $-B$ (falência), com $A, B \in \mathbb{N}$.

Seja $\tau = \min\{n \geq 0 : S_n = A \text{ ou } S_n = -B\}$ o tempo de parada.

Probabilidade de vitória Seja $u(x) = \mathbb{P}(\text{atingir } A \text{ antes de } -B \mid S_0 = x)$.

Por meio da fórmula da probabilidade total, temos

$$u(x) = p \cdot u(x+1) + q \cdot u(x-1),$$

com condições de contorno

$$u(-B) = 0, \quad u(A) = 1.$$

Reescrevemos a equação de diferenças

$$(p+q)u(x) = p \cdot u(x+1) + q \cdot u(x-1) \Leftrightarrow p(u(x+1) - u(x)) - q(u(x) - u(x-1)) = 0$$

ou seja $\Delta u(x) = \frac{q}{p}\Delta u(x-1)$. Iterando a relação acima j vezes ($j \in \mathbb{N}$) a partir de $\Delta u(x+j)$, obtemos

$$\Delta u(x+j) = \left(\frac{q}{p}\right)^j \Delta u(x). \tag{1}$$

Somando as diferenças sucessivas (soma telescópica)

$$u(x) - u(-B) = \sum_{k=-B}^{x-1} \Delta u(k).$$

Como $u(-B) = 0$, segue usando (1)

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=-B}^{x-1} \Delta u(k) = \sum_{j=0}^{x-1+B} \Delta u(-B+j) = \sum_{j=0}^{x-1+B} \left(\frac{q}{p}\right)^j \Delta u(-B) \\ &= \Delta u(-B) \sum_{j=0}^{x-1+B} \left(\frac{q}{p}\right)^j \end{aligned}$$

calculando a soma da progressão geométrica

$$u(x) = \Delta u(-B) \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{x+B}}{1 - \frac{q}{p}}$$

Impondo a condição de contorno $u(A) = 1$, temos

$$u(A) = \Delta u(-B) \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{A+B}}{1 - \frac{q}{p}} = 1.$$

Logo, isolando $\Delta u(-B)$

$$\Delta u(-B) = \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{A+B}}.$$

Substituindo este valor na expressão de $u(x)$

$$u(x) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{x+B}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{A+B}}.$$

Portanto, a probabilidade de vitória, ou seja, de atingir A antes de $-B$ a partir do 0 é

$$u(0) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{B}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{A+B}}.$$

Esperança do Tempo de Parada Seja $T(x) = \mathbb{E}_x[\tau]$ a esperança do tempo de parada começando de x. Por argumento análogo:

$$T(x) = 1 + p \cdot T(x+1) + q \cdot T(x-1),$$

com condições de contorno:

$$T(-B) = 0, \quad T(A) = 0.$$

Reescrevemos a equação de recorrência como

$$p(T(x+1) - T(x)) + q(T(x-1) - T(x)) = -1$$

ou seja $p\Delta T(x) - q\Delta T(x-1) = -1$. Se $\Delta T(x) = T(x+1) - T(x)$, então obtemos a relação de recorrência

$$\Delta T(x) = \frac{q}{p}\Delta T(x-1) - \frac{1}{p}.$$

Esta é uma equação de recorrência não homogênea de primeira ordem. A solução geral é a soma da solução da homogênea associada e uma solução particular.

- Solução da homogênea

  Consideremos primeiro a equação homogênea associada

  $$\Delta T(x) = \frac{q}{p}\Delta T(x-1).$$

  Iterando, obtemos

  $$\Delta T(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^{x+B} \Delta T(-B).$$

- Solução particular

  Assumimos uma solução particular constante ΔT_p. Substituindo na equação original

  $$\Delta T_p = \frac{q}{p}\Delta T_p - \frac{1}{p},$$

  logo

  $$\Delta T_p \left(1 - \frac{q}{p}\right) = -\frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \Delta T_p = -\frac{1}{p-q}.$$

Assim, a solução geral é:

$$\Delta T(x) = C\left(\frac{q}{p}\right)^{x+B} - \frac{1}{p-q},$$

onde $C = \Delta T(-B)$ é uma constante a ser determinada.

Somamos as diferenças sucessivas

$$T(x) - T(-B) = \sum_{k=-B}^{x-1} \Delta T(k).$$

Como $T(-B) = 0$, segue:

$$T(x) = \sum_{k=-B}^{x-1} \left[C \left(\frac{q}{p} \right)^{k+B} - \frac{1}{p-q} \right] = C \sum_{k=-B}^{x-1} \left(\frac{q}{p} \right)^{k+B} - \frac{x+B}{p-q}.$$

Calculando a soma da progressão geométrica

$$\sum_{k=-B}^{x-1} \left(\frac{q}{p} \right)^{k+B} = \sum_{j=0}^{x+B-1} \left(\frac{q}{p} \right)^{j} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{x+B}}{1 - \frac{q}{p}},$$

para $\frac{q}{p} \neq 1$. Portanto, temos:

$$T(x) = C \cdot \frac{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{x+B}}{1 - \frac{q}{p}} - \frac{x+B}{p-q}.$$

Impondo a condição de contorno $T(A) = 0$

$$0 = C \cdot \frac{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{A+B}}{1 - \frac{q}{p}} - \frac{A+B}{p-q} \implies C = \frac{(A+B)(1 - \frac{q}{p})}{(p-q) \left[1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{A+B} \right]}.$$

Assim, a expressão final para o tempo esperado até a absorção é:

$$T(x) = \frac{(A+B) \left[1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{x+B} \right]}{(p-q) \left[1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{A+B} \right]} - \frac{x+B}{p-q}.$$