Capítulo 10

APLICAÇÕES DO ESCALONAMENTO

Seja V um espaço vetorial de *dimensão finita* igual a n e seja $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base fixada em V. Dados p vetores $v_1, v_2, \ldots, v_p \in V$, podemos construir u'a matriz $p \times n$ cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos vetores v_i em relação à base B.

A partir do processo de escalonamento aplicado a esta matriz, podemos obter várias informações importantes relacionadas com os vetores v_i e com o subespaço que eles geram.

Para isto, vejamos inicialmente algumas propriedades.

10.1 – PROPOSIÇÃO. Considere as matrizes

$$A_1\,,\ A_2\,,\ \ldots\,,\ A_{q-1}\,,\ A_q\,,$$

onde $q \geq 2$ e cada uma delas foi obtida da anterior pela aplicação de uma qualquer das três operações dadas em 5.2. Então as linhas de A_q são combinações lineares das linhas de A_1.

Dem. Para $q = 2$, sendo $u_1, \ldots, u_n$ os vetores-linha de A_1 e $w_1, \ldots, w_n$ os vetores-linha de A_2, temos que:

1) se para obter A_2 somente trocamos entre si duas linhas de A_1, então A_1 e A_2 têm as mesmas linhas, apenas escritas em ordens diferentes e assim cada w_i é igual a algum u_k. ($w_i = 1u_k$.)

2) se para obter A_2 somente multiplicamos a linha k de A_1 por um escalar $\lambda \neq 0$, então $w_i = 1u_i$ para $i \neq k$ e $w_k = \lambda u_k$;

3) se para obter A_2 somente substituimos a linha k de A_1 pela sua soma com um múltiplo da linha r, então $w_i = 1u_i$ para $i \neq k$ e $w_k = 1u_k + \lambda u_r$;

Suponhamos que $q > 2$ e que as linhas de A_q são combinações lineares das linhas de A_1. Vamos provar que A_{q+1} tem a mesma propriedade.

Sejam então $u_1, \ldots, u_n$ os vetores-linha de A_q e $w_1, \ldots, w_n$ os vetores-linha de A_{q+1}; por hipótese, cada u_i é combinação linear das linhas de A_1 e vamos mostrar que os w_i também são:

1) se para obter A_{q+1} somente trocamos entre si duas linhas de A_q, então A_q e A_{q+1} têm as mesmas linhas, apenas escritas em ordens diferentes e assim cada w_i é igual a algum u_k e portanto é combinação linear das linhas de A_1;

2) se para obter A_{q+1} somente multiplicamos a linha k de A_q por um escalar $\lambda \neq 0$, então $w_i = u_i$ para $i \neq k$ e $w_k = \lambda u_k$. É claro que λu_k também é combinação linear das linhas de A_1.

3) se para obter A_{q+1} somente substituimos a linha k de A_q pela sua soma com um múltiplo da linha r, então $w_i = u_i$ para $i \neq k$ e $w_k = u_k + \lambda u_r$. É claro que $u_k + \lambda u_r$ também é combinação linear das linhas de A_1.

O resultado segue por indução sobre q. •

10.2 – COROLÁRIO. Se a matriz X é obtida da matriz A por escalonamento, então as linhas de X são combinações lineares das linhas de A.

Dem. É conseqüência imediata da proposição anterior, pois, em cada etapa do processo de escalonamento, só usamos uma das três operações dadas em 5.2. •

10.3 – PROPOSIÇÃO. Suponha que as linhas de u'a matriz A correspondam a coordenadas de vetores de um espaço vetorial V de dimensão finita em relação a uma base B. Se X é obtida de A por escalonamento, então os vetores-linha de A e os vetores-linha de X geram o mesmo subespaço vetorial de V.

Dem. Observe inicialmente que as operações usadas no escalonamento (ver 5.2) são reversíveis, isto é:

a) podemos "destrocar" duas linhas;

b) se $w = \lambda u$ com $\lambda \neq 0$ então $u = (1/\lambda)w$;

c) se $w = u - \lambda v$, então $u = w + \lambda v$.

Conclua que, se X é obtida de A por escalonamento, então A pode ser "recuperada" a partir de X usando somente as operações dadas em 5.2; assim sendo, pela proposição anterior, os vetores-linha de A também são combinações lineares dos vetores-linha de X e o resultado segue da proposição 3.12–5. •

10.4 – OBSERVAÇÃO. É claro que, ao considerar as linhas de u'a matriz escalonada como geradoras de um subespaço, podemos levar em conta apenas as linhas não nulas! (3.12–2).

10.5 – PROPOSIÇÃO. Numa matriz escalonada, as linhas não nulas correspondem a vetores L.I.

Dem. Escrevamos o vetor nulo como combinação linear com coeficientes α_i das linhas *não nulas* da matriz escalonada e consideremos o sistema homogêneo obtido escrevendo uma equação para cada coordenada. Se $a_{1s} \neq 0$ for o pivô da primeira linha, então a equação do sistema correspondente às s-ésimas coordenadas será $a_{1s}\alpha_1 = 0$, donde $\alpha_1 = 0$. (Note que $a_{is} = 0$ para $2 < i \leq q$.) Se $a_{2r} \neq 0$ for o pivô da segunda linha ($r > s$), a equação correspondente às r-ésimas coordenadas será $a_{1r}\alpha_1 + a_{2r}\alpha_2 = 0$, donde $\alpha_2 = 0$ e assim por diante, teremos todos os α_i nulos e as linhas não nulas são L.I. •

Processo prático para verificar se p vetores são L.I. ou L.D.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n. Dados p vetores $v_1, \ldots, v_p$ de V, seja $S \subset V$ o subespaço gerado por eles.

Determinamos as coordenadas dos v_i em relação a uma base B de V e formamos a matriz $p \times n$, cujas linha são as coordenadas de cada um dos p vetores. Escalonando esta matriz, temos que as linhas *não nulas* da matriz escalonada são L.I. e também formam um conjunto gerador para S. Assim sendo, elas formam uma base para esse subespaço e o número de linhas não nulas (posto) é, portanto, igual à dimensão de S; se essa dimensão for igual a p (não apareceram linhas nulas), os vetores dados são L.I. (teorema 8.16); se a dimensão for menor do que p (apareceu pelo menos uma linha nula) os vetores dados são L.D.

10.6 – EXEMPLOS. 1) No espaço $\mathcal{P}_3(\mathbf{R})$, verificar se os polinômios

$2+x+3x^2+2x^3$, $3+3x+2x^2+5x^3$ e $1+2x-x^2+3x^3$ são L.I. ou L.D. e dar a dimensão do subespaço gerado por eles.

Sol. Usando coordenadas em relação à base $\{1, x, x^2, x^3\}$ teremos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

então a dimensão é dois e os vetores são L.D.

2) Em $M_{2\times 3}(\mathbf{R})$, verificar se as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

são L.I. ou L.D.

Sol. Vamos usar a base de $M_{2\times 3}(\mathbf{R})$ formada pelas matrizes que têm "1" em uma única posição e "0" em todas as outras, observando que as coordenadas de u'a matriz em relação a essa base são os próprios elementos da matriz. Então, construindo a matriz com as coordenadas das matrizes dadas e escalonando, teremos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -6 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -13 & 17 & -6 \end{bmatrix}$$

e, como não apareceram linhas nulas, as matrizes dadas são L.I.

Processo prático para encontrar uma base contida num conjunto gerador

A proposição 8.14 garante que se um subespaço é gerado por um conjunto finito de vetores, então existe uma base para o subespaço contida nesse conjunto. Num espaço vetorial de dimensão finita, tomando coordenadas em relação a uma base e usando o escalonamento é possível encontrar essa base facilmente.

Para aprender o processo notemos inicialmente que o corolário 10.2 pode ser "melhorado" da seguinte forma:

10.7 - PROPOSIÇÃO. Seja A u'a matriz $p \times n$ formada pelos vetores-linha v_i, $1 \leq i \leq p$. Suponha que é possível escalonar a matriz A sem efetuar nenhuma troca de linhas durante o escalonamento e seja $A(q)$ a matriz obtida quando *acabamos de usar* um pivô da linha q para zerar os elementos de sua coluna e abaixo dele. Então, para cada uma das matrizes $A(q)$ valem as seguintes propriedades:

$E_1(q)$ - a primeira linha de $A(q)$ ainda é igual a v_1;

$E_2(q)$ - para cada i com $1 < i < q+1$, a linha i de $A(q)$, é da forma

$$v_i + (\text{ C.L. de } v_1, v_2, \ldots, v_{i-1})$$

(C.L. é uma abreviação para "combinação linear");

$E_3(q)$ - para cada i com $i \geq q+1$, a linha i de $A(q)$ é da forma

$$v_i + (\text{ C.L. de } v_1, v_2, \ldots, v_q).$$

Dem. Inicialmente, vamos verificar que as propriedades E_i são verdadeiras para $q = 1$, isto é, para a matriz $A(1)$ obtida logo depois que acabamos de usar o pivô da primeira linha. De fato, chamando de L_i as linhas da matriz $A(1)$, temos:

1) $L_1 = v_1$ e E_1 vale para $q = 1$;

2) como não existe linha i com $1 < i < 2$, a propriedade E_2 não exige nada para $q = 1$;

3) se $i \geq 2$, $L_2 = v_i + \lambda v_1$, onde λ é o escalar mencionado no passo 4 do algoritmo de escalonamento (capítulo 5) e E_3 vale para $q = 1$.

Seja agora $q > 1$ e suponhamos como hipótese de indução que as propriedades $E_i(q)$ são verdadeiras para a matriz $A(q)$.

Vamos provar que, quando terminarmos o próximo passo do escalonamento, usando o pivô da linha $q+1$, a matriz $A(q+1)$ obtida verificará as propriedades $E_i(q+1)$. De fato, chamando agora de L_i as linhas da matriz $A(q+1)$, teremos:

1) a linha 1 não foi modificada e continua igual a v_1; então E_1 vale para $q+1$;

2) as linhas i com $1 < i < q+2$ não foram modificadas e, portanto, continuarão a ser da forma dada em E_2(q) (note em E_3(q), que a linha $q+1$ também ja era dessa forma); assim, E_2 vale para $q+1$.

3) A cada linha i com $i \geq q+2$, que por hipótese de indução era da forma

$$v_i + (\text{ C.L. de } v_1, v_2, \ldots, v_q),$$

somamos um múltiplo da linha $q+1$, obtendo uma nova linha L_i dada por

$$L_i = v_i + (\text{ C.L. de } v_1, v_2, \ldots, v_q) + \lambda\Big(v_{q+1} + (\text{ C.L. de } v_1, v_2, \ldots, v_q)\Big) =$$

$$= v_i + (\text{ C.L. de } v_1, v_2, \ldots, v_q, v_{q+1})$$

e então E_3 vale para $q+1$.

O resultado segue por indução sobre q. •

10.8 – COROLÁRIO. Se não houver trocas de linha durante o escalonamento e, ao terminarmos de usar o pivô da linha q, constatarmos que a linha r *se anulou* ($r > q$), então v_r é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_q$.

Dem. Teremos $v_r + (\text{ C.L. de } v_1, \ldots, v_q) = 0$. •

10.9 – OBSERVAÇÃO. Logo que acabamos de usar o pivô da linha $q-1$, há uma certa "homogeneidade" entre as linhas abaixo dela, no sentido que todas elas são da forma

$$v_i + (\text{ C.L. de } v_1, v_2, \ldots, v_{q-1}).$$

Se a essa altura for necessário realizar a primeira troca de linhas, ela será efetuada entre a linha q e uma linha r com $r > q$, sendo

$$L_q = v_q + (\text{ C.L. de } v_1, v_2, \ldots, v_{q-1}),$$

$$L_r = v_r + (\text{ C.L. de } v_1, v_2, \ldots, v_{q-1})$$

e sendo que nem v_q e nem v_r aparecem na expressão de nenhuma outra linha da matriz (ainda não foram "usados").

Assim sendo, esta troca não trará nenhuma mudança fundamental com relação à proposição 10.7: basta que, a partir dessa troca, troquemos v_q por v_r e vice-versa nas fórmulas daquela proposição.

Uma eventual nova troca futura também ocorrerá entre uma linha L_m e uma linha L_s abaixo dela (sendo que v_m e v_s ainda não terão sido "usados") e, a partir daí basta permutar entre si as ocorrências de v_m e v_s. (E analogamente para todas as trocas de linha.)

Estes comentários essencialmente provam a seguinte

10.10 – PROPOSIÇÃO. Suponha que, durante o processo de escalonamento de u'a matriz A, estabeleçamos alguma forma de identificação para as linhas, de tal forma que, mesmo tendo havido trocas de linhas, saibamos ao final qual é a linha da matriz A correspondente a cada linha da escalonada. Então se a linha correspondente ao vetor v_r se anular é porque v_r era combinação linear dos outros vetores-linha de A.

Dem. Análoga à do corolário 10.8, levando em conta a observação anterior. •

Queremos achar uma base para um subespaço de um espaço vetorial V contida num conjunto gerador onde os vetores foram dados por suas coordenadas em relação a uma base B.

Então, formamos a matriz com as coordenadas dos vetores do conjunto gerador e escalonamos; porém, estabelecemos algum tipo de *identificação* para as linhas de tal forma que, mesmo tendo havido troca de linhas, saibamos ao final qual é a linha de A "correspondente" a cada linha da matriz escalonada (veja o exemplo a seguir). Temos que as linhas de A correspondentes às linhas não nulas da matriz escalonada formam a base procurada. (As linhas nulas correspondem a vetores que são combinações lineares dos demais).

10.11 – EXEMPLO. No $\mathbf{R}^5$, encontre uma base do subespaço gerado pelos vetores

$$v_1 = (1,1,0,2,-1), \quad v_2 = (2,2,-1,0,1), \quad v_3 = (5,8,9,16,13),$$
$$v_4 = (2,5,10,14,13) \quad \text{e} \quad v_5 = (1,2,3,4,5),$$

que esteja contida em $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Sol. Construamos a matriz das coordenadas e escalonemos, colocando uma identificação nas linhas:

$$\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\\(5)\end{array}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1\\ 5 & 8 & 9 & 16 & 13\\ 2 & 5 & 10 & 14 & 13\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\\(5)\end{array}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -4 & 3\\ 0 & 3 & 9 & 6 & 18\\ 0 & 3 & 10 & 10 & 15\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 6\end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c}(1)\\(5)\\(3)\\(4)\\(2)\end{array}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 6\\ 0 & 3 & 9 & 6 & 18\\ 0 & 3 & 10 & 10 & 15\\ 0 & 0 & -1 & -4 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{array}{c}(1)\\(5)\\(3)\\(4)\\(2)\end{array}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3\\ 0 & 0 & -1 & -4 & 3\end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c}(1)\\(5)\\(2)\\(4)\\(3)\end{array}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{array}{c}(1)\\(5)\\(2)\\(4)\\(3)\end{array}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Então os vetores v_1, v_5 e v_2 formam a base procurada do subespaço gerado por v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5. É claro que, como vimos anteriormente, os vetores dados pelas três primeiras linhas da matriz escalonada também formam uma base desse subespaço; esta base porém, não está contida no sistema de geradores dado. Exercício: comprove que, de fato, o conjunto $\{v_1, v_5, v_2\}$ é L.I. e que v_3 e v_4 estão em $[v_1, v_5, v_2]$. É claro que outras trocas de linhas poderiam dar origem a outras bases.

Processo prático para completar um conjunto L.I. até uma base

Dados p vetores L.I. num espaço vetorial V de dimensão finita n, com $p < n$, representamos esses p vetores por suas coordenadas em relação a uma base $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ para V, montamos a matriz $p \times n$ com essas coordenadas e escalonamos, obtendo evidententemente as p linhas não nulas (L.I.). Como são n colunas, teremos $n - p$ colunas "sem pivô". Para cada coluna $\bar{j}$ dentre estas $n - p$ que "não têm pivô", selecionamos o correspondente vetor $u_{\bar{j}}$ da base B (veja o exemplo a seguir). Vamos mostrar que os $n - p$ vetores $u_{\bar{j}}$ assim obtidos completam o conjunto dos p vetores dados inicialmente até uma base para V.

Para fazer esta verificação, note inicialmente que, a cada u_j selecionado, corresponde um vetor-linha que tem "1" na coluna j e "0" nas outras colunas. Intercalando convenientemente estes $n-p$ vetores-linha entre as p linhas da matriz escalonada, é possível construir u'a matriz quadrada $n \times n$, *ainda escalonada* (veja o exemplo a seguir) e, portanto, com n vetores-linha L.I. que formam uma base para V, ou seja, os $n-p$ u_j completam os p vetores-linha da matriz escalonada até uma base de V. Para ver que eles completam também os p vetores dados inicialmente até uma base, basta considerar, no exercício a seguir, os v_i como sendo os vetores dados, os v_i' como sendo os vetores-linha da matriz escalonada e os w_k como sendo os u_j selecionados.

10.12 – EXERCÍCIO. Sendo V um espaço vetorial, sejam $v_1, \ldots, v_p$, $v_1', \ldots, v_p'$ e $w_1, \ldots, w_q$ vetores de V. Então:

a) Se o conjunto $\{v_1', \ldots, v_p', w_1, \ldots, w_q\}$ é L.I. então $[v_1', v_2', \ldots, v_p'] \cap [w_1, w_2, \ldots, w_q] = \{0\}$. (É o exercício 6.13-6.)

b) Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ e $\{w_1, w_2, \ldots, w_q\}$ são L.I. e $[v_1, v_2, \ldots, v_p] \cap [w_1, w_2, \ldots, w_q] = \{0\}$, então $\{v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q\}$ é L.I.

c) Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, $\{v_1', v_2', \ldots, v_p'\}$ e $\{w_1, w_2, \ldots, w_q\}$ são L.I. e $[v_1, v_2, \ldots, v_p] = [v_1', v_2', \ldots, v_q']$, então

$$\{v_1', \ldots, v_p', w_1, \ldots, w_q\} \quad \text{L.I.} \Longrightarrow \{v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q\} \quad \text{L.I.}$$

10.13 – EXEMPLO. Em $\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$, verifique que os vetores $1 + 2x - x^2 + 3x^3 + 2x^4$, $2 + 4x - x^2 + 9x^3 + 6x^4$ e $1 + 2x - x^2 + 5x^3 + 4x^4$ são L.I. e determine uma base de $\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$ que contenha esses três vetores.

Sol. Vamos usar a base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ de $\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$. Construindo a matriz com as coordenadas dos três vetores dados e escalonando, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como não apareceram linhas nulas, os três polinômios dados são L.I. e, como "não temos pivô" na segunda e na quinta colunas, devemos juntar aos três polinômios dados os polinômios x e x^4 (o segundo e o quinto da base usada), formando assim a base procurada. Observe a nova matriz escalonada obtida acrescentando convenientemente linhas correspondentes a x e a x^4 à matriz obtida no escalonamento:

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ (x) \\ \\ \\ (x^4). \end{array} \end{array}$$

Processo prático para definir um subespaço por meio de equações

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Dado um conjunto gerador finito $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ para um subespaço S de V, queremos determinar um sistema linear homogêneo que tenha para subespaço das soluções exatamente o subespaço S.

Fixamos uma base $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ para V e escrevemos os vetores v_i do conjunto gerador dado em relação a essa base. Pela definição de conjunto gerador, um vetor $w = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$ de V estará em S se e só se existirem escalares α_i tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = w\,, \qquad (*)$$

ou seja, se e só se o sistema linear nas incógnitas α_i, obtido escrevendo a relação $(*)$ em coordenadas, for compatível. Este sistema deve ser considerado como um sistema não homogêneo, sendo o seu segundo membro formado pelo vetor coluna das coordenadas x_i de w.

Usando escalonamento para discutir este sistema em relação aos parâmetros x_i (como está comentado no capítulo 12), obteremos condições sobre as coordenadas x_i de w equivalentes à compatibilidade do sistema. Estas condições formarão o sistema linear homogêneo procurado, como no seguinte

10.14 – EXEMPLO. Determinar equações para o subespaço S do $\mathbf{R}^4$ gerado pelos vetores $(1, -3, 2, 1)$ e $(2, -7, 2, 3)$.

Sol. Um vetor (x, y, z, w) estará em S se e só existirem escalares α e β tais que

$$\alpha(1, -3, 2, 1) + \beta(2, -7, 2, 3) = (x, y, z, w)\,,$$

ou seja, se e só se o sistema linear

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ -3\alpha - 7\beta = y \\ 2\alpha + 2\beta = z \\ \alpha + 3\beta = w\,. \end{cases}$$

for compatível.

Construindo a matriz completa e escalonando, teremos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ -3 & -7 & y \\ 2 & 2 & z \\ 1 & 3 & w \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & 3x+y \\ 0 & -2 & -2x+z \\ 0 & 1 & -x+w \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & 3x+y \\ 0 & 0 & -8x-2y+z \\ 0 & 0 & 2x+y+w \end{array}\right].$$

Este sistema será compatível se e só se tivermos

$$\begin{cases} -8x - 2y + z = 0 \\ 2x + y + w = 0 \end{cases}$$

e estas são as equações do subespaço S.

Outra solução: construimos a matriz cujas linhas são as n-uplas coordenadas dos vetores v_i do conjunto gerador dado e acrescentamos uma última linha formada pelas coordenadas de um vetor genérico $w = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de V; se escalonarmos sem efetuar nenhuma troca envolvendo a última linha, obteremos ao final uma linha cujos elementos dependem dos x_i; o vetor w estará no subespaço se e só se esta última linha for nula ao final do escalonamento. Assim sendo, impondo que essa linha seja nula, obteremos relações entre os x_i que são as equações do subespaço, como no exemplo a seguir:

10.15 – EXEMPLO. Determinar equações para o subespaço de $\mathcal{P}_3(\mathbf{R})$ gerado pelos polinômios $1 + 2x + x^2 + x^3$ e $2 + 5x - 4x^2 - 2x^3$.

Sol. Tomando coordenadas em relação à base $\{1, x, x^2, x^3\}$ teremos, chamando a_i, $i = 0, \ldots, 3$ as coordenadas de um polinômio genérico:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & -2 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & a_1 - 2a_0 & a_2 - a_0 & a_3 - a_0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -13a_0 + 6a_1 + a_2 & -9a_0 + 4a_1 + a_3 \end{bmatrix};$$

assim sendo, o subespaço em questão será formado pelos polinômios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ cujos coeficientes sejam soluções do sistema

$$\begin{cases} 13a_0 - 6a_1 - a_2 \qquad = 0 \\ 9a_0 - 4a_1 \qquad - a_3 = 0\,. \end{cases}$$

Refaça este exemplo usando o método dado no exemplo anterior e confira o resultado; refaça também aquele exemplo usando este método.

Processo prático para determinar a intersecção de dois subespaços

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Dados conjuntos geradores finitos $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ e $\{w_1, w_2, \ldots, w_q\}$ para os subespaços S_1 e S_2 de V, queremos encontrar um conjunto gerador para $S_1 \cap S_2$. Ora, um vetor u de V está em S_1 se e só se existirem escalares α_i tais que $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$ e está em S_2 se e só existirem escalares x_j tais que $u = x_1 w_1 + \cdots + x_q w_q$. Assim sendo, os vetores de $S_1 \cap S_2$ são caracterizados pela existência de escalares α_i e x_j tais que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = x_1 w_1 + \cdots + x_q w_q\,.$$

Fixando uma base para V e escrevendo esta última igualdade em coordenadas, obteremos um sistema linear não homogêneo nas incógnitas α_i e cujo segundo membro depende dos escalares x_i. Usando escalonamento para discutir este sistema em relação aos parâmetros x_i (como está comentado no capítulo 12), obteremos relações entre os x_i que caracterizam os vetores de S_2 que estão na intersecção e a partir dessas relações, podemos obter um conjunto gerador para $S_1 \cap S_2$, como no exemplo a seguir. Evidentemente, podemos também considerar os x_i como incógnitas e obter relações entre os α_i, obtendo a intersecção "dentro" de S_1.

10.16 – EXEMPLO. No $\mathbf{R}^5$ considere os subespaços:

$$S_1 = [(1,0,1,2,2),(1,0,0,0,1),(2,2,1,0,1)]$$
$$\text{e} \quad S_2 = [(1,1,0,0,0),(0,1,1,0,0),(0,0,1,1,0),(0,0,0,1,1)]\,;$$

encontre uma base para $S_1 \cap S_2$.

Sol. Como vimos, a intersecção será caracterizada por

$$\alpha(1,0,1,2,2)+\beta(1,0,0,0,1)+\gamma(2,2,1,0,1)=$$
$$=x(1,1,0,0,0)+y(0,1,1,0,0)+z(0,0,1,1,0)+w(0,0,0,1,1);$$

escrevendo esta relação em coordenadas teremos:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma = x \\ 2\gamma = x+y \\ \alpha + \gamma = y+z \\ 2\alpha = z+w \\ 2\alpha+\beta+\gamma = w \end{cases};$$

construindo a matriz completa e escalonando vem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 2 & x+y \\ 1 & 0 & 1 & y+z \\ 2 & 0 & 0 & z+w \\ 2 & 1 & 1 & w \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 2 & x+y \\ 0 & -1 & -1 & -x+y+z \\ 0 & -2 & -4 & -2x+z+w \\ 0 & -1 & -3 & -2x+w \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -1 & -x+y+z \\ 0 & 0 & 2 & x+y \\ 0 & -2 & -4 & -2x+z+w \\ 0 & -1 & -3 & -2x+w \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -1 & -x+y+z \\ 0 & 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & -2 & -2y-z+w \\ 0 & 0 & -2 & -x-y-z+w \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -1 & -x+y+z \\ 0 & 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & x-y-z+w \\ 0 & 0 & 0 & -z+w \end{array}\right].$$

Portanto, o sistema será compatível se e só se

$$\begin{cases} x-y-z+w=0 \\ -z+w=0, \end{cases}$$

ou seja, se e só se $z=w$ e $x=y$. Então, a intersecção será formada pelos vetores de S_2 que são da forma

$$y(1,1,0,0,0)+y(0,1,1,0,0)+w(0,0,1,1,0)+w(0,0,0,1,1)=$$

$= y(1,2,1,0,0) + w(0,0,1,2,1)$. Assim sendo, estes dois vetores geram $S_1 \cap S_2$ e, como são L.I., formam a base procurada.

Apenas como ilustração, o leitor pode observar que, resolvendo o último sistema escalonado levando em conta as condições de compatibilidade ($z = w$ e $x = y$), obteremos $\gamma = y$, $\beta = -y - z$ e $\alpha = z$ e assim a intersecção é formada pelos vetores de S_1 que são da forma

$$z(1,0,1,2,2) + (-y - z)(1,0,0,0,1) + y(2,2,1,0,1) =$$

$= y(1,2,1,0,0) + z(0,0,1,2,1)$!!

Outra solução: podemos também obter sistemas lineares homogêneos que sejam equações para cada um dos dois subespaços e juntar as equações dos dois sistemas, obtendo um novo sistema que caracteriza os vetores da intersecção. Um conjunto gerador para o subespaço das soluções deste último sistema gerará também a intersecção. Refaça o exemplo anterior usando este método e confira o resultado.

10.17 – EXERCÍCIOS. 1) No $\mathbf{R}^5$, determine uma base do B subespaço gerado pelo conjunto A, tal que B esteja contida em A, sendo

$$A = \{(2,-1,3,1,0), (1,3,-1,0,2), (5,1,5,2,2),$$
$$(1,-1,0,4,3), (3,1,-1,8,8)\}.$$

que esteja contida em A.

2) Encontre uma base do $\mathbf{R}^5$ que contenha os vetores os vetores $(3,1,2,0,-1)$, $(1,2,-1,3,0)$ e $(2,-1,3,2,1)$.

3) No $\mathbf{R}^4$, considere os subespaços

$$S_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \mid x + z = 0 \text{ e } y + w = 0\}$$
$$\text{e } S_2 = [(3,4,-1,0), (1,-1,-5,-7), (2,3,0,1)].$$

Encontre bases para S_1, S_2, $S_1 \cap S_2$ e $S_1 + S_2$ (veja o exercício 4.8-5). Dê as dimensões desses subespaços.

4) No exemplo 10.16, determine as dimensões de S_1, S_2, $S_1 + S_2$ e $S_1 \cap S_2$.

5) Em $\mathcal{P}_3(\mathbf{R})$, encontre equações que definam o subespaço gerado pelos polinômios $x^3 - 1$ e $3x^3 - 2x^2 - x$.