Prova 1 – Álgebra Linear – 2025/1

Instruções

1. Justifique todas as respostas.
2. Sobre a carteira, apenas lápis, borracha, caneta e documento com foto.
3. Nenhum eletrônico (celular, relógio, calculadora, ...) é permitido durante a prova.
4. A correção leva em conta a organização, clareza e corretude das respostas.
5. Pode responder usando lápis e em qualquer ordem.

Questões

1. (**20**) Use o que estudamos para solucionar sistemas de equações lineares para encontrar um polinômio de grau 3 cujo o gráfico passa pelos pontos (1,3), (2,-2), (3,-5) e (4,0).

   Sol.: O polinômio é da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$ e dos pontos temos

   $$\begin{cases} a+b+c+d=3 \\ 8a+4b+2c+d=-2 \\ 27a+9b+3c+1=-5 \\ 64a+16b+4c+d=0 \end{cases}$$

   a matriz aumentada é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 5 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   escalonanda fica $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -26 \\ 0 & 0 & 3 & -11/2 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

   portanto d=4, c=3, b=-5, a=1.

---

2. (**30**) Considere $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, o espaço vetorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Quais dos seguintes subconjuntos define um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

   2.1 Seja $\mathcal{U}$ o subconjunto definido pelas funções f tais que $f(1) + f(-1) = 0$.

   Sol.: $\mathcal{U}$ é não vazio pois a função identicamente nula $n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n(x) = 0$ $(\forall x)$, satisfaz a condição $n(1) + n(-1) = 0$.

   Sejam $f, g \in \mathcal{U}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

   $(f+g)(1) + (f+g)(-1) = f(1) + g(1) + f(-1) + g(-1) = (f(1) + f(-1)) + (g(1) + g(-1)) = 0 + 0 = 0.$

   $(\alpha f)(1) + (\alpha f)(-1) = \alpha f(1) + \alpha f(-1) = \alpha(f(1) + f(-1)) = 0.$

   Como é não vazio e fechado para as operações, é subespaço.

   2.2 Seja $\mathcal{W}$ o subconjunto definido pelas funções f tais que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

   Sol.: $\mathcal{W}$ é não vazio pois a função identicamente nula $n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n(x) = 0$ $(\forall x)$, satisfaz a condição $n(x+y) = n(x) + n(y)$.

   Sejam $f, g \in \mathcal{U}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

   $(f+g)(x+y) = f(x+y) + g(x+y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y)) = (f+g)(x) + (f+g)(y)$

   $(\alpha f)(x+y) = \alpha f(x+y) = \alpha(f(x) + f(y)) = \alpha f(x) + \alpha f(y)) = (\alpha f)(x) + (\alpha f)(y).$

   Como é não vazio e fechado para as operações, é subespaço.

---

3. (**10**) Escreva o sistema linear cujas soluções sejam os elementos do subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores (-1,0,1) e (3,5,-2).

Sol.: se (x, y, z) está no subespaço então $(x, y, z) = \alpha(-1, 0, 1) + \beta(3, 5, -2)$, logo

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = x \\ 5\beta = y \\ \alpha - 2\beta = z \end{cases}$$

---

4. (**40**) Sejam ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 os vetores-linha e c_1, c_2 e c_3 os vetores-coluna da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

4.1 Verifique as relações $\ell_3 = 2\ell_2 - \ell_1$ e $c_3 = 2c_2 - c_1$.

Sol.: $2\ell_2 - \ell_1 = 2(4, 5, 6) - (1, 2, 3) = (8, 10, 12) - (1, 2, 3) = (7, 8, 9)$

$2c_2 - c_1 = 2(2, 5, 8) - (1, 4, 7) = (4, 10, 16) - (1, 4, 7) = (3, 6, 9)$

4.2 Escreva c_1 e c_2 como combinações lineares de ℓ_1 e ℓ_2 e vice-versa.

Sol.: De $c_1 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$ obtemos

$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 1 \\ 2\alpha + 5\beta = 4 \\ 3\alpha + 6\beta = 7 \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} \alpha + 4\beta = 1 \\ -3\beta = 2 \end{cases}$ logo $\alpha = \frac{11}{3}$, $\beta = -\frac{2}{3}$

De $c_2 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$ obtemos

$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 2 \\ 2\alpha + 5\beta = 5 \\ 3\alpha + 6\beta = 8 \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} \alpha + 4\beta = 2 \\ -3\beta = 1 \end{cases}$ logo $\alpha = \frac{10}{3}$, $\beta = -\frac{1}{3}$

De $\ell_1 = \alpha c_1 + \beta c_2$ obtemos

$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 4\alpha + 5\beta = 2 \\ 7\alpha + 8\beta = 3 \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ -3\beta = -2 \end{cases}$ logo $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$

De $\ell_2 = \alpha c_1 + \beta c_2$ obtemos

$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 4 \\ 4\alpha + 5\beta = 5 \\ 7\alpha + 8\beta = 6 \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 4 \\ -3\beta = -11 \end{cases}$ logo $\alpha = -\frac{10}{3}$, $\beta = \frac{11}{3}$

cujas soluções fornecem

$c_1 = \frac{11}{3}\ell_1 - \frac{2}{3}\ell_2$ e $c_2 = \frac{10}{3}\ell_1 - \frac{1}{3}\ell_2$

$\ell_1 = -\frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_2$ e $\ell_2 = -\frac{10}{3}c_1 + \frac{11}{3}c_2$.

4.3 Deduza que os vetores-linha e os vetores-coluna da matriz geram o mesmo subespaço do $\mathbb{R}^3$.

Sol.: De (4.1), o subespaço gerado pelas linhas é $L = [\{\ell_1, \ell_2\}]$ e o das colunas $C = [\{c_1, c_2\}]$.

Se $v \in L$ então existem escalares α e β tais que $v = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$. De (4.2)

$v = \alpha(-\frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_2) + \beta(-\frac{10}{3}c_1 + \frac{11}{3}c_2) = (\frac{-\alpha}{3} - \frac{10\beta}{3})c_1 + (\frac{2\alpha}{3} + \frac{11\beta}{3})c_2 \in C$.

Analogamente, se $v \in C$ então existem escalares α e β tais que $v = \alpha c_1 + \beta c_2$. De (4.2)

$v = \alpha(\frac{11}{3}\ell_1 - \frac{2}{3}\ell_2) + \beta(\frac{10}{3}\ell_1 - \frac{1}{3}\ell_2) = (\frac{11\alpha}{3} + \frac{10\beta}{3})\ell_1 + (\frac{-2\alpha}{3} + \frac{-\beta}{3})\ell_2 \in L.$

4.4 Dê um exemplo de matriz 3×3 em que os vetores-linha e vetores-coluna geram subespaços diferentes.

Sol.: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

O subespaço gerado pelos vetores-linha é $L = [\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}]$. Observamos que a terceira coordenada é sempre 0 em todo subespaço.

O subespaço gerado pelas colunas de A é $C = [\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,0)\}]$ e como c_3 é o vetor nulo, podemos ignorá-lo, $C = [(1,0,1),(0,1,1)]$.

O vetor $(1,0,1)$ pertence a C mas não a L, pois tem componente não nulo na 3ª coordenada. Logo os subespaços são diferentes.

---

5. (**bônus: 30**) Considere o corpo $\mathbb{F}_2$ dado pelo conjunto $\{0,1\}$ com as operações:

$$\begin{array}{c|cc} +_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \text{ e } \begin{array}{c|cc} \cdot_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Agora, para A um conjunto não vazio qualquer, considere o conjunto $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ das partes de A. Sobre $\mathcal{P}(A)$ definimos as operações:
soma: $B_1 \oplus B_2 = (B_1 \cup B_2) \setminus (B_1 \cap B_2)$ (conhecida com diferença simétrica), para quaisquer $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(A)$, e
multiplicação por escalar: $0 \odot B = \emptyset$ e $1 \odot B = B$, para todo $B \in \mathcal{P}(A)$.

$\big(\mathcal{P}(A), \oplus, \odot\big)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_2$?