Sumário

1 Espaço vetorial

2 Subespaço vetorial

3 Combinação linear

§5 — Espaço vetorial sobre um corpo

UFABC

Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K} = (K, +_k, \cdot_k)$

$$(\mathcal{V}, \boxplus, \boxdot)$$

$\mathcal{V}$ um conjunto não vazio cujos elementos são ditos vetores

$\boxplus$ uma soma de vetores

$\boxdot$ uma multiplicação por escalar (escalar $=$ elemento do corpo)

formam um *espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ se valem os seguintes axiomas

UFABC

Axiomas

Axiomas de fechamento

A (fechamento para a soma) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$; $\boxed{\vec{u} \boxplus \vec{v} \in \mathcal{V}}$

M (fechamento para multiplicação por escalar) $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{K}$; $\boxed{\alpha \boxdot \vec{u} \in \mathcal{V}}$

Axiomas

Axiomas da soma

A1 (comutativa) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V};\ \boxed{\vec{u} \boxplus \vec{v} = \vec{v} \boxplus \vec{u}}$

A2 (associativa) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V};\ \boxed{\vec{u} \boxplus (\vec{v} \boxplus \vec{w}) = (\vec{u} \boxplus \vec{v}) \boxplus \vec{w}}$

A3 (vetor nulo) $\exists \vec{0} \in \mathcal{V}, \forall \vec{u} \in \mathcal{V};\ \boxed{\vec{u} \boxplus \vec{0} = \vec{0} \boxplus \vec{u} = \vec{u}}$

A4 (vetor oposto, ou inverso) $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \exists \vec{w} \in \mathcal{V};\ \boxed{\vec{u} \boxplus \vec{w} = \vec{w} \boxplus \vec{u} = \vec{0}}$

Axiomas

Axiomas da multiplicação por escalar

M1 $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$ $\boxed{\alpha \boxdot (\beta \boxdot \vec{u}) = (\alpha \cdot_k \beta) \boxdot \vec{u}}$

M2 $\forall \vec{u} \in \mathcal{V};$ $\boxed{1_k \boxdot \vec{u} = \vec{u}}$

D1 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R};$ $\boxed{\alpha \boxdot (\vec{v} \boxplus \vec{u}) = (\alpha \boxdot \vec{v}) \boxplus (\alpha \boxdot \vec{u})}$

D2 $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$ $\boxed{(\alpha +_k \beta) \boxdot \vec{u} = (\alpha \boxdot \vec{u}) \boxplus (\beta \boxdot \vec{u})}$

UFABC

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Estamos interessados, principalmente, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, chamado

espaço vetorial real.

Esse sempre será o caso se não for dito outra coisa.

UFABC

Exemplos de espaços vetoriais reais

1. $\mathbb{R}$ com $+$ e $\cdot$ as operações usuais se soma e produto de números reais.
2. O conjunto $\mathbb{R}^{n\times m}$ com as operações de soma e multiplicação por escalar que definimos no início definem um espaço vetorial real.

Exemplos de espaços vetoriais reais

3. O conjunto de vetores $V = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ com as operações

$$x \boxplus y = x \cdot y \quad \text{e} \quad \lambda \boxdot x = x^{\lambda}$$

é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Os fechamentos são válidos pois tanto vetor quanto escalar são elementos de $\mathbb{R}$ e operações resultam em $(0, \infty)$.

Exemplos de espaços vetoriais reais

1. $x, y \in V$ temos $x \boxplus y = xy = yx = y \boxplus x$ para quaisquer $x, y \in V$;
2. $x \boxplus (y \boxplus z) = x \boxplus (yz) = x(yz) = (xy)z = (x \boxplus y)z = (x \boxplus y) \boxplus z$ para quaisquer $x, y, z \in V$
3. se $x \in V$ então, como $1 \in V$, temos $1 \boxplus x = 1x = x$; observe que neste caso, 1 é o elemento neutro da *adição*,
4. se $x \in V$, isto é, $x > 0$, então $x^{-1} \in V$ e $x \boxplus x^{-1} = xx^{-1} = 1$
5. $\lambda \boxdot (\mu \boxdot x) = \lambda \boxdot x^{\mu} = (x^{\mu})^{\lambda} = x^{\mu\lambda} = x^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \boxdot x$ para quaisquer $x \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
6. $(\lambda + \mu) \boxdot x = x^{\lambda+\mu} = x^{\lambda}x^{\mu} = x^{\lambda} \boxplus x^{\mu} = (\lambda \boxdot x) \boxplus (\mu \boxdot x)$ para quaisquer $x \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
7. $\lambda \boxdot (x \boxplus y) = \lambda \boxdot (xy) = (xy)^{\lambda} = x^{\lambda}y^{\lambda} = (\lambda \boxdot x) \boxplus (\lambda \boxdot y)$ para quaisquer $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;
8. $1 \boxdot x = x^1 = x$ para qualquer $x \in V$.

UFABC

Exemplos de espaços vetoriais reais

4. $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ com $+$ a soma coordenada-a-coordenada e $\cdot$ a multiplicação das coordenadas por um escalar.

UFABC

Exemplos de espaços vetoriais reais

5. Dê modo geral $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$, para qualquer inteiro $n > 0$, é um espaço vetorial real com as operações análogas as do $\mathbb{R}^3$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\text{para todo } \alpha \in \mathbb{R},\ \ \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

$$\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$

Exemplos de espaços vetoriais reais

6. Indo mais um pouco além, se tomarmos o conjunto de todas as sequências de números reais
$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \colon x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i\}$$
com as operações análogas as do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$,
$$(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$$
$$\text{para todo } \alpha \in \mathbb{R},\ \ \alpha(x_1, x_2, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots)$$
$$\vec{0} = (0, 0, \dots)$$
é um espaço vetorial real.

Exemplos de espaços vetoriais reais

7. para toda intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, o conjunto $\mathcal{F}(I)$ das funções $f : I \to \mathbb{R}$ com a soma de funções

$$\begin{aligned} f + g \colon I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

e a multiplicação por escalar λ

$$\begin{aligned} \lambda f \colon I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

é espaço vetorial real.

Exemplos de espaços vetoriais reais

8. $\mathcal{C}^0(I)$ o conjunto das funções $f : I \to \mathbb{R}$ contínuas num intervalo I com as operações do exemplo anterior.

9. $\mathcal{C}^1(I)$ o conjunto das funções $f : I \to \mathbb{R}$ com derivada contínua num intervalo I com as operações do exemplo anterior.

10. $\mathcal{C}^\infty(I)$ o conjunto das funções $f : I \to \mathbb{R}$ com todas as derivadas contínuas num intervalo I equipado com as operações do exemplo anterior.

Exemplos de espaços vetoriais reais

11. $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios em x de grau $\leq n$ com coeficientes reais mais o polinômio nulo com a soma usual de polinômios e produto usual por número real.

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \colon a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Observe que $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

12. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios em x com coeficientes reais.

Exemplos de espaços vetoriais reais

12. O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ com a soma usual de complexos e a multiplicação por real é um espaço vetorial real.

    Note que o espaço vetorial definido é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

    Entretanto $\mathbb{C}$ é um corpo, de modo que $\mathbb{C}$ com a soma de complexos e o produto de complexos é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Exercício

O conjunto $U = \{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$ com as operações

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c) \quad \text{e} \quad \alpha \odot (a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

é espaço vetorial real?

Exercício 3

O vetor oposto e o vetor nulo de um espaço vetorial são únicos.

O **único** oposto de $\vec{v}$ é denotado por $-\vec{v}$.

Propriedades

Consequências dos axiomas

Teorema 6

Se $(\mathcal{V}, \boxplus, \boxdot)$ é um espaço vetorial então

1. $\alpha \boxdot \vec{0} = \vec{0}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. $0 \boxdot \vec{v} = \vec{0}$ para todo $\vec{v} \in \mathcal{V}$;
3. se $\alpha \boxdot \vec{v} = \vec{0}$ então $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
4. $(-\alpha) \boxdot \vec{v} = \alpha \boxdot (-\vec{v}) = -(\alpha \boxdot \vec{v})$; para todos $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \in \mathcal{V}$;
5. se $\vec{u} \boxplus \vec{w} = \vec{v} \boxplus \vec{w}$ então $\Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$;
6. $-(-\vec{v}) = \vec{v}$ para todo $\vec{v} \in \mathcal{V}$.

UFABC

Observação

Consequências dos axiomas

Da propriedade 4 $\boxed{(-\alpha) \boxdot \vec{v} = \alpha \boxdot (-\vec{v}) = -(\alpha \boxdot \vec{v})}$

e do axioma M2 $\boxed{1_k \boxdot \vec{u} = \vec{u}}$

obtemos que $(-1_k) \boxdot \vec{v}$ é **o** vetor oposto de $\vec{v}$.

UFABC

Exercício

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto qualquer e considere o conjunto $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ das partes de A.

Fixe o conjunto de escalares $\{0, 1\}$ com as operações do Exercício 2.

Sobre $\mathcal{P}(A)$ defina as operações:
soma: $B_1 \oplus B_2 = (B_1 \cup B_2) \setminus (B_1 \cap B_2)$ (conhecida com diferença simétrica), para quaisquer $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(A)$, e
multiplicação por escalar: $0 \odot B = \emptyset$ e $1 \odot B = B$, para todo $B \in \mathcal{P}(A)$.

$\big(\mathcal{P}(A), \oplus, \odot\big)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_2$?

UFABC

§6 — Subespaço

Subespaço vetorial

$(\mathcal{V}, \boxplus, \boxdot)$ um espaço vetorial

O subconjunto $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ **não vazio** é um **subespaço** do espaço vetorial se e só se munido das operações $\boxplus$ e $\boxdot$ do espaço vetorial ele é espaço vetorial.

Subespaço vetorial

Um exemplo é

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

pois $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ é e.v. quando usamos as mesmas $+$ e $\cdot$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

UFABC

Subespaço vetorial

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

Porém, se já não soubéssemos disso, note que

- $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ é fechado para a soma de funções.
- $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ é fechado para multiplicação de função por escalar.
- Há vetores nulo e oposto em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
- Os axiomas das operações em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ são automaticamente satisfeitas, pois já valiam em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Subespaço vetorial

Analogamente, podemos dizer que

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

é subespaço pois

- $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é fechado para a soma de funções.
- $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é fechado para multiplicação de função por escalar.
- Há vetores nulo e oposto em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.
- Os axiomas das operações são automaticamente satisfeitas.

Subespaço vetorial

Em $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ não vazio e fechado para as operações de $\mathcal{V}$ alguns axiomas são automaticamente satisfeitos.

Se as operações são as mesmas, as propriedades operacionais são herdadas.

O que **não** sabemos

- fechamento das operações no subconjunto;
- existência de vetor zero no subconjunto;
- existência de oposto no subconjunto.

UFABC

Subespaço

Se $\mathcal{V} \supset \mathcal{U} \neq \emptyset$, então há $\vec{u} \in \mathcal{U}$ e

se $\mathcal{U}$ é fechado para $\boxdot$

- do Teor. 6, item (2): $\vec{0} = 0_k \boxdot \vec{u} \in \mathcal{U}$
- do Teor. 6, item (4): $-\vec{u} = (-1_k) \boxdot \vec{u} \in \mathcal{U}$.

Essa última afirmação vale para todo $\vec{u} \in \mathcal{U}$.

UFABC

Subespaço vetorial

Em $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ não vazio e fechado para as operações de $\mathcal{V}$ alguns axiomas são automaticamente satisfeitos.

Se as operações são as mesmas, as propriedades operacionais são herdadas.

O que **não** sabemos

- fechamento das operações no subconjunto;
- ~~existência de vetor zero no subconjunto;~~
- ~~existência de oposto no subconjunto.~~

Subespaço vetorial

Teorema 7

$\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ **não vazio** é subespaço do espaço vetorial $(\mathcal{V}, \boxplus, \boxdot)$ se valem

1. (fechamento para soma) $\forall \vec{u},\ \vec{v} \in \mathcal{U}$ vale $\vec{u} \boxplus \vec{v} \in \mathcal{U}$;
2. (fechamento para multiplicação por escalar) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in \mathcal{U}$ vale $\alpha \boxdot \vec{u} \in \mathcal{U}$.

UFABC

Subespaços triviais

Todo $(\mathcal{V}, \boxplus, \boxdot)$ tem ao menos dois subespaços: $\{\vec{0}\}$ e $\mathcal{V}$.

Exemplos

1. $\mathbb{R}$ tem os subespaços triviais e mais nenhum.
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x + 3y = 0\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$.
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 5x + y - 3z = 0\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

UFABC

Exemplos

Exercício 4

Dados $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ quaisquer

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

é subespaço de $\mathbb{R}^n$. Quando $a_i \neq 0$ para todo i, é chamado de **hiperplano**.

UFABC

Exemplos

4. O espaço $\mathbb{R}^{n\times n}$ das matrizes reais tem como subespaço o conjunto das matrizes simétricas

$A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica se $a_{i,j} = a_{j,i}$ para todo i e todo j.

O subconjunto das matrizes inversíveis com as operações usuais é um subespaço de $\mathbb{R}^{n\times n}$?

UFABC

Exemplos

5. $\mathcal{C}([0,1])$ tem como subespaço o conjunto das $f \in \mathcal{C}([0,1])$ tais que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

UFABC

Exercício

Exercício 5

Prove que o conjunto das soluções de um sistema linear homogêneo $AX = \mathbf{0}$, em que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, é um subespaço de $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

UFABC

Interseção de subespaços

Teorema 8

Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ são subespaços de $\mathcal{V}$ então $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ é subespaço de $\mathcal{V}$.

União de subespaços

União de subespaços $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ nem sempre é subespaço. Por quê?

O **menor subespaço** de $\mathcal{V}$ que contém $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ é soma deles, definida por

$$\mathcal{U} + \mathcal{W} = \{\vec{u} \boxplus \vec{w} \colon \vec{u} \in \mathcal{U} \text{ e } \vec{w} \in \mathcal{W}\}$$

Exercício 6

$\mathcal{U} + \mathcal{W}$ é subespaço de $(\mathcal{V}, \boxplus, \boxdot)$.

Exercício

Dados $\mathcal{U} = \{(0, y) \colon y \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{W} = \{(x, 0) \colon x \in \mathbb{R}\}$ são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

O que é $U + W$?

O que é $U \cap W$?

$U \cup W$ é subespaço?

Exercício 7

Prove que $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ é o "menor" subespaço que contém $U \cup W$, isto é, prove que qualquer subespaço que contém o conjunto $U \cup W$ também contém o subespaço $\mathcal{U} + \mathcal{W}$.

UFABC

§7 — Combinação linear
Subespaço gerado

Combinação linear

$(\mathcal{V}, +, \cdot)$ espaço vetorial

Uma combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathcal{V}$ com escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ é o vetor

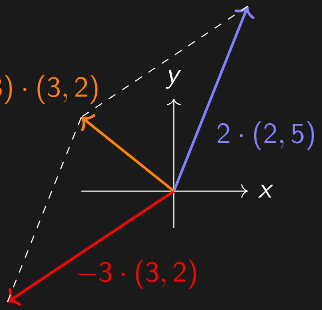
$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot \vec{v}_{n-1} + \alpha_n \cdot \vec{v}_n \in \mathcal{V}$$

UFABC

Exemplo, combinação linear no $\mathbb{R}^2$

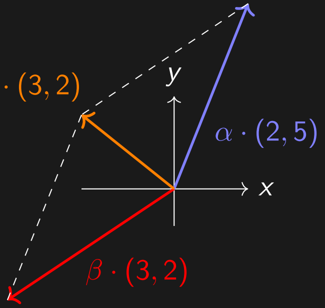
$$(5,-4) = 2\cdot(2,5) + (-3)\cdot(3,2)$$

Quais são os vetores que podem ser escritos como c.l. de $(2,5)$ e $(3,2)$?



Exemplo, combinação linear no $\mathbb{R}^2$

$(x_0, y_0) = \alpha \cdot (2,5) + \beta \cdot (3,2)$



Quais são os vetores que podem ser escritos como c.l. de $(2,5)$ e $(3,2)$?

Dados x_0 e y_0

$$(x_0, y_0) = \alpha \cdot (2,5) + \beta \cdot (3,2) = (2\alpha + 3\beta, 5\alpha + 2\beta)$$

Resolvendo o sistema linear, $\alpha = \frac{1}{11}(-2x_0 + 3y_0)$ e $\beta = \frac{1}{11}(5x_0 - 2y_0)$.

Todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como c.l. desses vetores.

UFABC

Exemplo, combinação linear no $\mathbb{R}^3$

Quais vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ podem ser escritos como c.l. de $(1, 2, 1)$ e $(2, 1, 1)$?

$$(x, y, z) = \alpha(1, 2, 1) + \beta(2, 1, 1) \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ 2\alpha + \beta = y \\ \alpha + \beta = z \end{cases}$$

UFABC

Exemplo, combinação linear no $\mathbb{R}^3$

a matriz aumentada é linha-equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & (2x-y)/3 \\ 0 & 0 & (-5x+y+3z)/3 \end{bmatrix}$$

$\{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \colon -\mathbf{5x}+\mathbf{y}+\mathbf{3z}=\mathbf{0}\}$ é o conjunto dos vetores que são c.l. dos vetores $(1,2,1)$ e $(2,1,1)$ dados.

Subespaço gerado

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ -5x + y + 3z = 0\}$ é subespaço do $\mathbb{R}^3$.

É o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1,2,1)$ e $(2,1,1)$.

Subespaço gerado

$S \subset \mathcal{V}$ subconjunto não vazio qualquer do e.v. $\mathcal{V}$.

O **conjunto** $[S]$ **dos vetores de** $\mathcal{V}$ que são geradosaaa por S é dado por

todas as combinações lineares de vetores pertencentes a S.

Convenciona-se $[\emptyset] = \{\vec{0}\}$.

Subespaço gerado

Ou seja,

$$\text{se } \vec{w} \in [S] \text{ então}$$

existem

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in S \quad \text{e} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

para algum $n > 0$ inteiro, tais que

$$\vec{w} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot \vec{v}_{n-1} + \alpha_n \cdot \vec{v}_n$$

Subespaço gerado

Teorema 9

Para todo subconjunto S de vetores de um espaço vetorial $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ o conjunto $[S]$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

Professor: jair.donadelli@ufabc.edu.br *Sala*: 546-2-A

Espaço/subespaço finitamente gerado

Dado um espaço/subespaço vetorial $\mathcal{V}$ existe S finito tal que $[S] = \mathcal{V}$?

Quando há dizemos que $\mathcal{V}$ é finitamente gerado ou de dimensão finita.

Exemplo

1. $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é finitamente gerado, por $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.
2. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ **não** é finitamente gerado.
3. $\mathbb{R}^n$ é finitamente gerado.
4. $\mathbb{R}^\infty$ **não** é finitamente gerado.

Subespaço finitamente gerado

Vimos que $(2,5)$ e $(3,2)$ geram o $\mathbb{R}^2$.

Vimos que $(1,2,1)$ e $(2,1,1)$ não geram o $\mathbb{R}^3$, mas geram um hiperplano.

$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é gerado por $\{1+x, x+2x^2, 1-x^2\}$.

Exercício 8

Dado um subconjunto de vetores de um e.v. $\mathcal{V}$, prove que $[S]$ é o "menor" subespaço de $\mathcal{V}$ que contém S, isto é, prove que qualquer subespaço de $\mathcal{V}$ que contém o conjunto S também contém o subespaço $[S]$.

Exercício 9

Prove a seguinte afirmação. Se S e S' são conjuntos não vazios de vetores de um espaço vetorial $\mathcal{V}$, então $[S] = [S']$ se, e só se, cada vetor em S é uma combinação linear dos vetores em S', e cada vetor em S' é uma combinação linear dos vetores em S.

UFABC

Exercício 10

Sejam $S, T \subset \mathcal{V}$. Verifique

3. $S \subset [S]$;
4. se $S \subset T$ então $[S] \subset [T]$;
5. $\big[[S]\big] = [S]$;
6. se S é subespaço então $[S] = S$;
7. $[S \cup T] = [S] + [T]$.