

Sumário I

- 1 Determinante
- 2 Autovalor e autovetor
- 3 Polinômio característico
- 4 Diagonalização

Aparece no século XVII, com Leibniz e Cramer. Cauchy no século XIX formalizou muitas das propriedades que conhecemos hoje.

A ideia mais antiga vem da geometria: o determinante surgiu como uma forma de medir o volume orientado de paralelepípedos no espaço.

Outra motivação foi resolver sistemas lineares. Isso vem de métodos como a regra de Cramer, conhecida desde o século XVIII.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} b_1 & A_{12} \\ b_2 & A_{22} \end{bmatrix}$$

Ambas equações podem ser resolvidas se, e somente se, a expressão $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ for diferente de zero.



O mesmo procedimento pode ser feito para sistemas de três equações em três variáveis.
Dado o sistema:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 = b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = b_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & x_2 + \\ A_{21} & A_{22} & \end{array} \right. \begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{13} & x_3 = \\ A_{21} & A_{23} & \end{array} \begin{array}{cc|c} A_{11} & b_1 & \\ A_{21} & b_2 & \end{array}$$

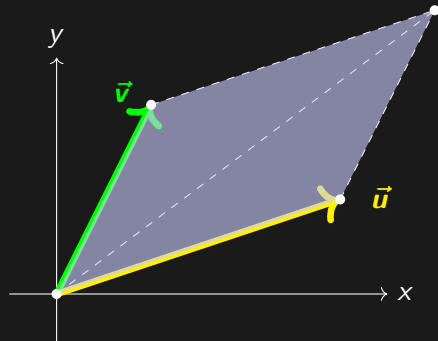
Motivação geométrica

Dados $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$,

o determinante $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

é a área com sinal (depende da orientação) do paralelogramo que eles geram:

$$\{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} : \alpha, \beta \in [0, 1]\}$$



Área positiva se ao girar $\vec{v}_1$ em direção a $\vec{v}_2$, o giro for anti-horário.

Área de um paralelogramo

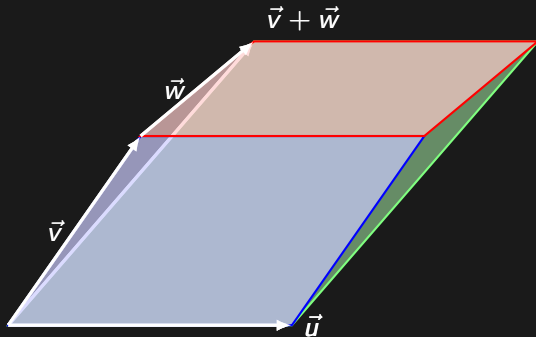
O valor da área do paralelogramo $(\vec{0}, \vec{u}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{v})$ é o valor absoluto do determinante.

Se $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$, então

$$\text{Área}((\vec{0}, \vec{u}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{v})) = |ad - bc|.$$

O valor absoluto “remove” a orientação.

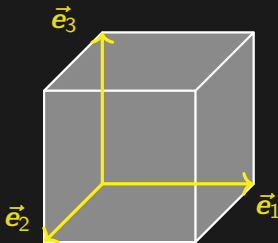
O quadrado unitário tem área 1.



$$|\vec{u} \quad \vec{v} + \vec{w}| =$$

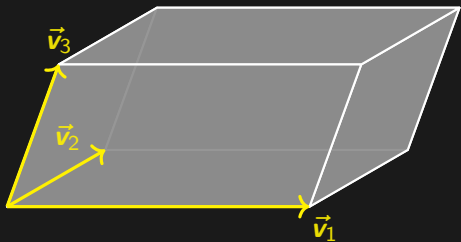
$$|\vec{u} \quad \vec{v}| + |\vec{u} \quad \vec{w}|$$

Determinante como volume no $\mathbb{R}^3$



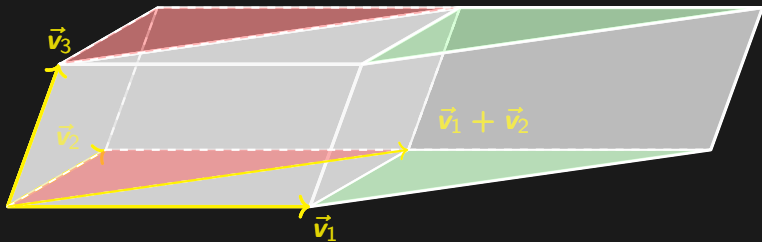
Paralelepípedo unitário. O volume desse paralelepípedo é igual a 1. Isso reflete o determinante $\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}$ corresponde ao da matriz identidade.

Determinante como volume no $\mathbb{R}^3$

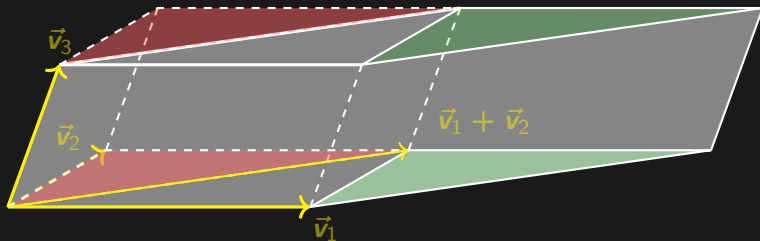


Paralelepípedo gerado por $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$. O volume (com sinal) desse paralelepípedo é igual ao determinante $|\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3|$.

Determinante como volume no $\mathbb{R}^3$



Determinante como volume no $\mathbb{R}^3$



Paralelepípedo gerado por $\vec{v}_1$, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{v}_3$. Para o volume (com sinal) desse paralelepípedo $|\vec{v}_1 \ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \ \vec{v}_3| = |\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3| = |\vec{v}_1 \ \vec{v}_1 \ \vec{v}_3| + |\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3|$.

Volume de um paralelepípedo

O volume do paralelepípedo formado por $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ é:

$$\text{Vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

Sem o valor absoluto, temos:

$$\hat{\text{Área}}_{\text{or}} = \det(\vec{u}, \vec{v}), \quad \text{Vol}_{\text{or}} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Volume em dimensão n

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o volume do paralelepípedo Ax com $x \in [0, 1]^n$ é:

$$\text{Vol}(Ax) = |\det(A)|, \quad \text{Vol}_{\text{or}}(Ax) = \det(A)$$

Se B é inversível de ordem n e $W = Ax$ um paralelepípedo, então:

$$\text{Vol}(BW) = |\det B| \cdot \text{Vol}(W)$$

$$\text{Vol}_{\text{or}}(BW) = \det B \cdot \text{Vol}_{\text{or}}(W)$$

Volume de imagens por transformações lineares é escalado por $\det$

Função multilinear

$D : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n \rightarrow \mathbb{R}$ é multilinear se, **fixado** $n - 1$ argumentos da função, no argumento restante a função é linear, isto é, valem

$$\textcircled{1} \quad D(\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_{i-1}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{\ell}_{i+1}, \dots, \vec{\ell}_n) = \\ D(\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_{i-1}, \vec{u}, \vec{\ell}_{i+1}, \dots, \vec{\ell}_n) + D(\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_{i-1}, \vec{v}, \vec{\ell}_{i+1}, \dots, \vec{\ell}_n)$$

$$\textcircled{2} \quad D(\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_{i-1}, \alpha \vec{u}, \vec{\ell}_{i+1}, \dots, \vec{\ell}_n) = \alpha D(\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_{i-1}, \vec{u}, \vec{\ell}_{i+1}, \dots, \vec{\ell}_n)$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Função determinante

$D : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função determinante** se

- 1 $D(A) = 0$ se A tem linhas l.d.
- 2 $D(I_n) = 1$;
- 3 D é multilinear nas linhas.

Propriedades de uma função determinante

Proposição

Permutar duas linhas consecutivas muda o sinal de uma função determinante.

Ideia para a prova: Tome A' obtida de A trocando as linhas k e $k + 1$ por $\vec{\ell}_k + \vec{\ell}_{k+1}$, a soma delas.

$$0 = D(\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_k + \vec{\ell}_{k+1}, \vec{\ell}_k + \vec{\ell}_{k+1}, \dots, \vec{\ell}_n) = \\ D(\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_k, \vec{\ell}_{k+1}, \dots, \vec{\ell}_n) + D(\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_{k+1}, \vec{\ell}_k, \dots, \vec{\ell}_n)$$

portanto estes devem ter sinais opostos.



Propriedades de uma função determinante

Com respeito às operações elementares nas linhas

Lema – Propriedades de uma função determinante

Para qualquer escalar $\alpha \neq 0$ e quaisquer $i \neq j$

- ❶ Se $A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} B$ então $D(B) = -D(A)$.
- ❷ Se $A \xrightarrow{L_i \leftarrow \alpha L_i} B$ então $D(B) = \alpha D(A)$.
- ❸ Se $A \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j} B$ então $D(B) = D(A)$.

Propriedades de uma função determinante

Corolário 1 do lema anterior

$D(E \cdot A) = D(E) \cdot D(A)$ para qualquer matriz elementar E .

Corolário 2 do lema anterior

Se B é obtida de A por operações elementares e $D(A) = 0$, então $D(B) = 0$. Em particular, se A é inversível então $D(A) \neq 0$.

Propriedades de uma função determinante

Corolário 3 do lema anterior

Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e E_i matrizes elementares tais que $B = E_1 \cdots E_r A$. Então, existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ tais que

$$D(B) = (-1)^t \alpha_1 \cdots \alpha_s D(A)$$

onde t é o número de operações do tipo I (troca de duas linhas) e s é o número de operações do tipo II (substituição de uma linha por um múltiplo α_i dela).

Exemplo

Cálculo por Escalonamento

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1) L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2} L_1 \\ (2) L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ (3) L_3 \leftarrow L_3 - 4 L_2 \end{array}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1) L_2 \leftarrow L_2 + 0.5 L_3 \\ (2) L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ (3) L_1 \leftarrow L_1 - 2 L_2 \end{array}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Até aqui o determinante não muda.

Função determinante

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (1)L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ (2)L_2 \leftarrow 2L_2 \\ (3)L_3 \leftarrow (-1)L_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D(A) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1) \cdot D(I_3) = -1.$$

Propriedades de uma função determinante

Corolário 4 do lema anterior

Se uma matriz é triangular (superior ou inferior), então seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal.

Propriedades de uma função determinante

Teorema

A é inversível se, e somente se, $D(A) \neq 0$.

Vimos acima que se A é inversível então $D(A) \neq 0$.

Por outro lado, se A não é inversível, então é linha equivalente a uma matriz escalonado B com uma linha nula, logo $D(A) = 0$.

Teorema

$$D(A \cdot B) = D(A)D(B).$$

Em particular, se A é inversível, então $1 = D(A)D(A^{-1})$.

Teorema

$D(A^T) = D(A)$, onde A^T denota a transposta de A .

Teorema fundamental das matrizes invertíveis (em construção)

Para toda matriz quadrada A de ordem n são equivalentes:

- 1 A é invertível;
- 2 I_n é a forma escalonada reduzida;
- 3 $AX = B$ tem solução única para todo vetor-coluna B ;
- 4 $AX = 0$ tem somente a solução trivial $X = 0$;
- 5 os n vetores definidos pelas linhas de A formam base do $\mathbb{R}^n$;
- 6 os n vetores definidos pelas colunas de A formam base do $\mathbb{R}^n$;
- 7 $\text{posto}(A) = n$;
- 8 $\det(A) \neq 0$.

Determinante por Escalonamento

- 1 Escalone a matriz, reduzindo matriz à forma triangular superior; leve em conta a cada operação elementar o efeito sobre o determinante:
 - 1 trocar linhas implica em determinante troca de sinal;
 - 2 multiplicar linha por constante implica em determinante é multiplicado pela constante;
- 2 Calcule determinante da matriz resultante pelo produto dos elementos da diagonal.

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$ e i uma linha fixa:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

- a_{ij} : elemento da linha i , coluna j .
- A_{ij} : matriz que resulta da remoção da linha i e coluna j .

Fórmula de Laplace - Expansão por linha

Exemplo: Expansão da 1ª linha:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(24 - 0) - 2(0 - 5) + 3(0 - 4) = 22$$

Fórmula de Laplace - Expansão por coluna

A fórmula também permite expandir pela coluna j :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Exemplo: Expansão da 3ª coluna:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3(-4) - 5(-2) + 6(4) = -12 + 10 + 24 = \boxed{22} \end{aligned}$$

Fórmula de Leibniz

O que é uma Permutação?

- Uma **permutação** é uma reordenação dos elementos de um conjunto.
- Exemplo com 3 elementos:

$$\{1, 2, 3\} \rightarrow (1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 2, 1), \dots$$

- Existem $n!$ permutações de um conjunto com n elementos.

Permutações Pares e Ímpares

- Uma permutação é **par** se o número de inversões ($i < j$ e $\sigma(j) < \sigma(i)$) é **par**.
- É **ímpar** se o número de inversões é **ímpar**.

Exemplos:

- $(1, 2, 3) \rightarrow (2, 1, 3)$: 1 troca - **ímpar**
- $(1, 2, 3) \rightarrow (3, 1, 2)$: 2 trocas - **par**

Sinal de uma Permutação

O **sinal** de uma permutação σ é:

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{se } \sigma \text{ é par} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Exemplos

- $\sigma = (2, 1, 3) \Rightarrow \text{sgn}(\sigma) = -1$
- $\sigma = (3, 1, 2) \Rightarrow \text{sgn}(\sigma) = +1$

Fórmula de Leibniz para o Determinante

Fórmula de Leibniz

Para uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

- A soma é feita sobre todas as permutações de $\{1, \dots, n\}$.
- O sinal de cada termo depende da paridade da permutação σ .

Comparação

Dada matriz $n \times n$, a fórmula de Laplace ou Leibniz necessita de cerca de $n!$ operações, enquanto que o algoritmo baseado em escalonamento $2n^3/3$ operações, aproximadamente.

n	Laplace/Leibniz	Escalaonamento
2	3	4
3	14	15
4	63	37
6	2000	130
20	6×10^{18}	5000

§15 — Autovalores e autovetores

$T: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ uma TL entre espaços vetoriais de dimensão finita.

Vimos que é possível escolher bases B, C para $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, tal que

$$[T]_{BC} \in \mathbb{R}^{\dim \mathcal{V} \times \dim \mathcal{U}} \text{ é "diagonal"}$$

Lembrando que

$$[T]_{BC} = [[T(\vec{v}_1)]_C \quad \cdots \quad [T(\vec{v}_n)]_C]$$

Se $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ (nesse caso, a transformação linear também é chamada de **operador linear**) então $[T]_{BC}$ é quadrada.

Porém, se $B = C$ nem sempre é possível descobrir uma representação por matriz diagonal.

Estudaremos o problema de determinar quais transformações entre espaços de dimensão finita podem ser representadas por matriz diagonal.

Matriz diagonal

Uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada é **diagonal** se $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é **diagonalizável** se existe $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversível tal que

$$P^{-1}AP$$

é uma matriz diagonal.

Exemplo

$$\text{Dado } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ tome } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ e obtém-se } D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Notação

Se A é diagonal e $a_{ii} = \alpha_i$ escrevemos

$$A = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

TL com representação por matriz diagonal

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão n .

Se $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ tem representação por uma matriz diagonal $A = [a_{ij}]$ com respeito a alguma base ordenada $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, então

$$T(\vec{v}_k) = \sum_{i=1}^n a_{ik} \vec{v}_i = a_{kk} \vec{v}_k$$

para todo $k = 1, 2, \dots, n$.

Reciprocamente....

Se existe $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ l.i. e escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que $T(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$, então B é base e

$$[T]_{BB} = \begin{bmatrix} [T(\vec{v}_1)]_B & \cdots & [T(\vec{v}_n)]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Caracterização do problema

A transformação $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ admite representação por matriz diagonal *se e somente se* existem $n = \dim \mathcal{V}$ vetores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ l.i. associados a n escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que

$$T(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$$

para todo i .

Autovetor e Autovalor de Operador Linear

$\vec{u} \in V$ não nulo é **autovetor** de $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ se

existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$

O escalar λ é **autovalor associado a** $\vec{u}$.

Autovetor e Autovalor de Operador Linear

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x, -y)$.

$$T(1, 0) = (1, 0) = 1(1, 0)$$

$(1, 0)$ autovetor associado a 1 como autovalor.

$$T(0, 1) = (0, -1) = (-1)(0, 1)$$

$(0, 1)$ autovetor associado a -1 como autovalor.

Exemplos I

- 1 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (4x, -y)$ tem autovetores $(0, 1)$ e $(1, 0)$ com os respectivos autovalores -1 e 4 associados.
- 2 $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $S(x, y) = (2x - y, x)$ tem autovetor $(1, 1)$ com autovalor 1 associado.
- 3 $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $R(x, y) = (x + y, -x)$ não tem autovalores (reais).

Exemplos II

- 4 No espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ das funções infinitamente deriváveis
- i a derivada é uma TL e um autovetor é a função exponencial e^x é autovetor com o autovalor associado 1. A função exponencial e^{2x} é autovetor com o autovalor associado 2.
 - ii a derivada segunda é uma TL e um autovetor é a função seno com autovalor associado -1 .

Exemplos III

5 No espaço $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, a TL

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 2a_0 + 3a_1x + 2a_2x^2$$

os polinômios da forma $a_0 + a_2x^2$ são autovetores do autovalor 2
os polinômios da forma a_1x são autovetores do autovalor 3.

Exemplos IV

Quem são os autovetores e os respectivos autovalores da identidade $I_V: V \rightarrow V$? E do operador nulo?

Caracterização do problema

A transformação $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ admite representação por matriz diagonal *se e somente se* existem $n = \dim \mathcal{V}$ vetores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ l.i. associados a n escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que

$$T(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$$

para todo i .

A transformação $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ admite representação por matriz diagonal *se e somente se* existe uma base de $\mathcal{V}$ formada por $(n = \dim \mathcal{V})$ autovetores de T .

Exercício 17

Um autovetor só pode estar associado a um único autovalor.

Exercício 18

Se $\vec{u}$ é autovetor associado ao autovalor λ , então todo $\vec{v} \in [\{\vec{u}\}]$ *não nulo* é autovetor associado a λ .

Autovalor 0

$\vec{0} \in \mathcal{V}$ não é autovetor de $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, mas
 $0 \in \mathbb{R}$ pode ser autovalor associado a $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Nesse caso $T(\vec{v}) = 0\vec{v} = \vec{0}$, logo $\vec{v} \in N(T)$.

Se $N(T) \neq \{\vec{0}\}$, então os vetores não-nulos de $N(T)$ são autovetores associados ao autovalor 0.

Autoespaço do autovalor λ

Defina

$$\mathcal{E}_T(\lambda) = \{\vec{u} \in \mathcal{V} \mid T(\vec{u}) = \lambda \vec{u}\}$$

Proposição 15

Se $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ é TL, então $\mathcal{E}_T(\lambda) = N(T - \lambda I_{\mathcal{V}})$.

Corolário

$\mathcal{E}_T(\lambda)$ é subespaço de $\mathcal{V}$.

Autoespaço do autovalor λ

Se λ for autovalor de T então $\mathcal{E}_T(\lambda)$ é o conjunto dos autovetores associados a λ **mais** o vetor nulo, chamado de **autoespaço** do autovalor λ .

λ é autovalor de T se e só se $\mathcal{E}_T(\lambda) \neq \{\vec{0}\}$.

Exemplo

Quais são todos os autovalores do operador $T(x, y) = (x, -y)$ no $\mathbb{R}^2$?

λ é autovalor se e só se $\lambda(x, y) = (x, -y)$ se e só se $\begin{cases} (1 - \lambda)x = 0 \\ (-1 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ tem pelo menos uma solução não trivial.

O sistema é indeterminado se e só se $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Portanto, 1 e -1 são os autovalores.

Exemplo

Os autoespaços são 2:

$$\mathcal{E}_T(1) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{E}_T(-1) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

No mais

$$\mathcal{E}_T(\lambda) = \{(0, 0)\} \text{ para todo } \lambda \neq -1, 1 \text{ real.}$$

Exemplo

Seja D o operador derivada em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Então $D(p(x)) = \lambda p(x)$ $\begin{cases} \text{com } p \text{ não nulo só vale para } p(x) = a \text{ (real não nulo) e } \lambda = 0 \\ \text{se } \lambda \neq 0, \text{ só vale para } p \text{ nulo (que não é autovetor).} \end{cases}$

$\lambda = 0$ e $p(x) = 1$ são autovalor e autovetor associados.

$$\mathcal{E}_D(0) = N(D) = \mathcal{P}_0(\mathbb{R}).$$

Autovalor e autovetor de um Operador linear

$\mathcal{E}_T(\lambda)$ é o núcleo de $T - \lambda I_V$, **não** de T .

Disso, λ é autovalor de T se, e somente se, $\mathcal{E}_T(\lambda) \neq \{\vec{0}\}$.

Em particular, 0 é autovalor de T se, e somente se,

$$\mathcal{E}_T(0) = N(T - 0I_V) = N(T) \neq \{\vec{0}\}$$

se, e somente se, T não é injetora.

Proposição 16

Para $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ são equivalentes:

- 1 T é injetiva;
- 2 0 não é autovalor de T ;
- 3 $\dim(\mathcal{E}_T(0)) = 0$.

Exercício

Exercício 19

Sejam $\mathcal{V}$ um espaço de dimensão finita, T um operador em $\mathcal{V}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Prove que são equivalentes as afirmações abaixo.

- ① λ é autovalor de T ;
- ② $T - \lambda I_{\mathcal{V}}$ não é injetiva;
- ③ $T - \lambda I_{\mathcal{V}}$ não é sobrejetiva;
- ④ $T - \lambda I_{\mathcal{V}}$ não é inversível.

Polinômio característico

Sejam T um operador sobre $\mathcal{V}$ de dimensão n , B base ordenada, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \text{ se, e só se, } (T - \lambda I_{\mathcal{V}})(\vec{v}) = \vec{0}$$

se, e só se, $(T - \lambda I_{\mathcal{V}})$ não tem inversa.

se, e só se, $[T - \lambda I_{\mathcal{V}}]_{BB}$ não tem inversa

se, e só se, $[T]_{BB} - \lambda I_n$ não tem inversa

se, e só se,

$$\det([T]_{BB} - \lambda I_n) = 0$$

Polinômio característico de uma matriz

Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ então $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ é um polinômio em λ , chamado de **polinômio característico** da matriz A .

p_A tem grau n , o coeficiente de λ^n é $(-1)^n$ e o coeficiente do termo λ^0 é $\det(A)$.

Se $A = P^{-1}BP$, vale:

Proposição 17

Se A e B são semelhantes, então $p_A(x) = p_B(x)$.

pois $\det(A - xI_n) =$

$$\begin{aligned}\det(P^{-1}BP - xI_n) &= \det(P^{-1}BP - xP^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(B - xI_n)P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(B - xI_n) \det(P) \\ &= \det(B - xI_n)\end{aligned}$$

Polinômio característico

De volta a T operador sobre $\mathcal{V}$ de dimensão n e B base,

o polinômio $\det([T]_{BB} - \lambda I_n)$ não depende da base B :

Pelo Corolário do Teorema 17, se C também é base de $\mathcal{V}$

$$[T]_{CC} = [I_{\mathcal{V}}]_{CB}^{-1} \cdot [T]_{BB} \cdot [I_{\mathcal{V}}]_{CB}$$

ou seja, $[T]_{CC}$ e $[T]_{BB}$ são semelhantes.

Polinômio característico

O **polinômio característico** de T é dado por

$$p_T(\lambda) = p_{[T]}(\lambda) = \det([T] - \lambda I_n)$$

onde $[T]$ é uma representação matricial de T numa base ordenada qualquer.

Polinômio característico

Proposição 18

As **raízes reais** de $p_T(\lambda)$ são os autovalores de T , e vice-versa. Logo, se T é um operador em um espaço vetorial de dimensão n , então T possui no máximo n autovalores distintos.

Exemplo

Dado $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, matriz que representa o operador T_A no $\mathbb{R}^3$ com respeito a base canônica.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

logo os autovalores são 2 (com multiplicidade 2) e 4.

Exemplo

Os autovetores do autovalor 2 são os vetores não nulos de $N(A - 2I_3)$ (o núcleo da $T_A - 2I_{\mathbb{R}^3}$)

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{cases} \text{ tem soluções } t(-1, 1, 1) \ (t \in \mathbb{R}).$$

Os autovetores do 2 são $t(-1, 1, 1)$ para todo real $t \neq 0$.

$$\mathcal{E}_{T_A}(2) = \{t(-1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\} \text{ logo } \dim(\mathcal{E}_{T_A}(2)) = 1.$$

Exemplo

Os autovetores do autovalor 4 são os vetores não nulos de $N(A - 4I_3)$

Logo, esses autovetores são $t(-1, 1, 1)$, $t \neq 0$ real.

$$\mathcal{E}_{T_A}(4) = \{t(1, -1, 1) : t \in \mathbb{R}\} \text{ logo } \dim(\mathcal{E}_{T_A}(4)) = 1.$$

Aqui não tem base de autovetores

Multiplicidades

O autovalor 2 ocorre 2 vezes como raiz do polinômio característico, portanto sua **multiplicidade algébrica** é 2. O autoespaço tem dimensão $\dim(\mathcal{E}_A(2)) = 1$ portanto sua **multiplicidade geométrica** é 1.

O autovalor 4 ocorre 1 vezes como raiz do polinômio característico, portanto sua **multiplicidade algébrica** é 1. O autoespaço tem dimensão $\dim(\mathcal{E}_A(4)) = 1$ portanto sua **multiplicidade geométrica** é 1.

Exemplo

Seja T um operador em $\mathbb{R}^3$ tal que, na base canônica,

$$[T] = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Então $p_T(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$.

Exemplo

$\mathcal{E}_T(2) = N(T - 2I_{\mathbb{R}^3})$ que é dado pelas soluções de

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{E}_T(2) = \{y(0, 1, 0) + z(-1/2, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}$ e $\dim(\mathcal{E}_T(2)) = 2$.

Exemplo

$\mathcal{E}_T(-1) = N(T + I_{\mathbb{R}^3})$ que é dado pelas soluções de

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{E}_T(-1) = \{z(-1, 0, 1) : z \in \mathbb{R}\}$ e $\dim(\mathcal{E}_T(-1)) = 1$.

Aqui pode ter base de autovetores

Multiplicidades

O autovalor 2 ocorre 2 vezes como raiz do polinômio característico, portanto sua **multiplicidade algébrica** é 2. O autoespaço tem dimensão $\dim(\mathcal{E}_A(2)) = 2$ portanto sua **multiplicidade geométrica** também é 2.

O autovalor -1 ocorre 1 vez como raiz do polinômio característico, portanto sua **multiplicidade algébrica** é 1. O autoespaço tem dimensão $\dim(\mathcal{E}_A(4)) = 1$ portanto sua **multiplicidade geométrica** é 1.

Exemplo

O conjunto $B = \{(0, 1, 0), (-1/2, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$ dado pela união dos geradores dos autoespaços de todos os autovalores de T é l.i., portanto, uma base do $\mathbb{R}^3$!!!, e

$$[T]_{BB} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Coincidência?

Teorema 18

Sejam T um operador linear em $\mathcal{V}$ de dimensão finita e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ autovalores distintos dois a dois.

Se, para $i = 1, \dots, k$, $B_i \subset \mathcal{E}_T(\lambda_i)$ é l.i., então $B_1 \cup \dots \cup B_k$ é l.i..

Autovetores de autovalores distintos

Corolário 1 do Teorema 18

T tem no máximo $\dim(\mathcal{V})$ autovalores distintos.

Se tem exatamente $\dim(\mathcal{V})$ autovalores distintos, então os autovetores formam uma base de $\mathcal{V}$.

No caso de n autovalores distintos a representação matricial de T é por matriz diagonal.

Autovetores de autovalores distintos

Corolário 2 do Teorema 18

Se $\sum_{i=1}^k \dim(\mathcal{E}_T(\lambda_i)) = \dim(\mathcal{V})$ então $\mathcal{V}$ tem uma base de autovetores.

Autovetores de autovalores distintos

Lema

Se T é um operador linear sobre $\mathcal{V}$ de dimensão finita e $\mu \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T com multiplicidade algébrica r , então $1 \leq \dim(\mathcal{E}_T(\mu)) \leq r$.

Demonstração I

Ponha $d = \dim(\mathcal{E}_T(\mu))$. Por ser autoespaço $d \geq 1$.

Ponha m a multiplicidade algébrica de μ .

Vamos mostrar que $d \leq m$.

Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_d$ vetores l.i. em $\mathcal{E}_T(\mu)$

Pelo Teorema do Completamento podemos estender para uma base ordenada B de $\mathcal{V}$:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_d, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-d}$$

A matriz da transformação com respeito a B é

$$\begin{aligned} [T]_{BB} &= \begin{bmatrix} [T(\vec{v}_1)]_B & [T(\vec{v}_2)]_B & \dots & [T(\vec{v}_d)]_B & [T(\vec{u}_1)]_B & \dots & [T(\vec{u}_{n-d})]_B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\mu \vec{v}_1]_B & \mu[\vec{v}_2]_B & \dots & \mu[\vec{v}_d]_B & [T(\vec{u}_1)]_B & \dots & [T(\vec{u}_{n-d})]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu I_d & P \\ 0 I_{n-d} & Q \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Demonstração II

$$\text{Logo } p_T(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} \mu I_d & P \\ 0 I_{n-d} & Q \end{bmatrix} - \lambda I_n \right) = (\mu - \lambda)^d \det(Q - \lambda I_{n-d}).$$

Portanto $p_T(\lambda)$, $d \leq m$



§16 — Diagonalização de matrizes

Recordando...

Um operador linear sobre um espaço de dimensão finita é **diagonalizável** se existe uma base do espaço para a qual a representação matricial do operador é uma matriz diagonal.

$T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ admite representação por matriz diagonal se e *somente* se $\mathcal{V}$ admite uma base formada por autovetores.

Analogamente, para matrizes ...

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é diagonalizável se, e só se, existe P inversível tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

Então, $AP = PD$, com D diagonal.

Escrevendo $P = [\vec{c}_1 \ \cdots \ \vec{c}_n]$ por suas colunas

$$AP = [A\vec{c}_1 \ \cdots \ A\vec{c}_n] \text{ e } PD = [d_{11}\vec{c}_1 \ \cdots \ d_{nn}\vec{c}_n].$$

Logo $A\vec{c}_i = d_{ii}\vec{c}_i$, para todo i , as colunas de P são n autovetores l.i..

Portanto, para $C = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$, temos $[T_A]_{CC}$ diagonal.

Analogamente, para matrizes ...

Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ são **autovalores** e **autovetores** (associados) da matriz A se são autovalores e autovetores de T_A .

Ademais, sempre que houver uma relação matricial da forma

$$AP = PD$$

com matrizes quadradas e P invertível e D diagonal saberemos que a j -ésima coluna de P é autovetor associado ao autovalor na j -ésima posição diagonal de D .

Teorema fundamental das matrizes inversíveis

Para toda matriz quadrada A de ordem n são equivalentes:

- ① A é invertível;
- ② I_n é a forma escalonada reduzida;
- ③ $AX = B$ tem solução única para todo vetor-coluna B ;
- ④ $AX = 0$ tem somente a solução trivial $X = 0$;
- ⑤ os n vetores definidos pelas linhas de A formam base do $\mathbb{R}^n$;
- ⑥ os n vetores definidos pelas colunas de A formam base do $\mathbb{R}^n$;
- ⑦ $\text{posto}(A) = n$;
- ⑧ $\det(A) \neq 0$;
- ⑨ 0 não é um autovalor de A .

Exemplo I

(1) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$ é representada na base canônica, por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad p_A(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

Como são 3 raízes distintas, 0, 1 e 3, respectivos autovetores são l.i., logo a matriz (e o operador) é diagonalizável.

Exemplo II

Para cada autovalor λ , os autovetores são calculados resolvendo os sistemas $(A - \lambda I_3)X = 0$, para $\lambda = 0, 1, -3$.

Encontramos uma base de autovetores $(-1, -1, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 2)$.

Exemplo III

(2) $T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dado por $T(p(x)) = p''(x) - 2p'(x) + p(x)$.

Com respeito a base canônica $[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ cujo polinômio característico é $(1 - \lambda)^3$.

Então, para ser diagonalizável devemos ter $\dim \mathcal{E}_A(1) = 3$.

O autoespaço é dado pelas soluções de $([T] - 1 I_3)X = \vec{0}$ que tem dimensão 1. Assim, a matriz não é diagonalizável.



Procedimento para diagonalizar uma matriz

Passo 1. Confirme que a matriz é realmente diagonalizável encontrando n autovetores linearmente independentes. Uma maneira de fazer isso é encontrar uma base de cada autoespaço e juntar todos esses vetores num único conjunto S . Se esse conjunto tiver menos do que n elementos, a matriz não é diagonalizável.

Passo 2. Forme a matriz $P = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]$ que tem os vetores de S como vetores coluna.

Passo 3. A matriz $P^{-1}AP$ será diagonal com os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ correspondentes aos autovetores $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ como entradas diagonais sucessivas.

Teorema — Caracterização das matrizes diagonalizáveis

Uma matriz A quadrada de ordem n é diagonalizável se, e somente se, tiver n autovetores l.i.

Multiplicidades

Teorema

Seja A uma matriz quadrada de ordem n com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ distintos. São equivalentes:

- ① A é diagonalizável;
- ② a união das bases dos autoespaços de A contém n vetores;
- ③ todas as raízes p_A são reais e para todo autovalor a multiplicidade algébrica é igual a multiplicidade geométrica.