Lista 1 — Algoritmos Probabilísticos **[JD 24-3]**

Exercício 1. Sejam A, B e C eventos de um mesmo espaço amostral. Verifique que vale a seguinte igualdade $\mathbb{P}(\mathsf{C} \cap \mathsf{A} | \mathsf{B}) = \mathbb{P}(\mathsf{C} | \mathsf{A} \cap \mathsf{B})\mathbb{P}(\mathsf{A} | \mathsf{B})$ sempre que as condicionais estão definidas.

Exercício 2. Considere o lançamento repetido de uma moeda equilibrada até sair coroa (Exemplo 1.14 das notas de aula). Com que probabilidade o número de lançamentos é par?

Exercício 3. Suponha que você tem três moedas e uma delas é viciada de modo que $\mathbb{P}(\text{cara}) = 2/3$. Escolhendo uma delas ao acaso a probabilidade de acertar qual é a viciada é um terço. Agora, suponha que o resultado do lançamento de cada uma delas, sem conhecer qual é a viciada, resulta em (cara, cara, coroa). Mostre, usando o Teorema de Bayes, que a probabilidade da primeira moeda ser a viciada é 2/5.

Exercício 4. Considere uma moeda que resulta em cara com probabilidade $p \in (0,1)$. Prove que a probabilidade de que em n lançamentos (independentes) temos mais que k caras é no máximo

$$\binom{n}{k} p^k \leqslant \left(\frac{enp}{k}\right)^k.$$

Exercício 5. Sejam $\Omega = \{0,1\}^n$, x o resultado de um sorteio uniforme em Ω e y o resultado de um sorteio em Ω de acordo com alguma medida de probabilidade, possivelmente diferente da uniforme. Mostre que $y \oplus x$ (o símbolo $\oplus$ denota operação ou-exclusivo coordenada-a-coordenada) é qualquer elemento de Ω com probabilidade $(1/2)^n$.

Exercício 6. Em um treino de paraquedistas um grupo de n paraquedistas estão enfileirados e um paraquedista é escolhido ao acaso no seu grupo. O paraquedista escolhido cumprimenta todos os paraquedistas do seu grupo e salta da avião; o grupo fica então dividido em dois: um grupo formado pelos paraquedistas que se encontravam a esquerda daquele que pulou e o outro grupo formado pelos paraquedistas a direita. O procedimento é repetido nos grupos restantes até sobrarem grupos de um único paraquedista, que pulam um a um. Note que paraquedistas que em algum momento ficam em grupos diferentes não se cumprimentaram e não se cumprimentarão desse momento em diante. A ordem da fila dentro de cada grupo é sempre mantida. Prove que os paraquedistas das posições i e j (spg, $j > i$) se cumprimentam com probabilidade $2/(j-i+1)$.

Exercício 7. Considere a seguinte proposta de algoritmo que recebe um inteiro positivo $\mathsf{M} > 0$ e devolve um inteiro escolhido aleatoriamente em $\{0,1,\ldots,\mathsf{M}-1\}$:

Instância: inteiro positivo M.

Resposta : uma escolha aleatória em $\{0,1,\ldots,\mathsf{M}-1\}$.

seja k o número de bits de M;
$(d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}) \xleftarrow{\mathrm{R}} \{0,1\}^k$;
$\mathsf{N} \leftarrow \sum_i d_i 2^i$;
responda N mod M.

Prove que as possíveis respostas não são equiprováveis.

Exercício 8. Prove que no seguinte algoritmo a probabilidade p_n do laço executar pelo menos n vezes, para todo $n \geqslant 2$, é maior que 0 e, mais que isso, essa probabilidade é maior que 0 no limite, ou seja, $\lim p_n > 0$ quando $n \to \infty$ (pode ser útil a desigualdade $1 - x \geqslant \exp(-2x)$ para $x \in [0, 1/2]$).

$j \leftarrow 0$;
repita
  $j \leftarrow j+1$;
  para cada $i \in \{1,2,\ldots,j\}$ **faça** $d_i \xleftarrow{\mathrm{R}} \{0,1\}$;
até que $d_i = 1$ *para todo* i.