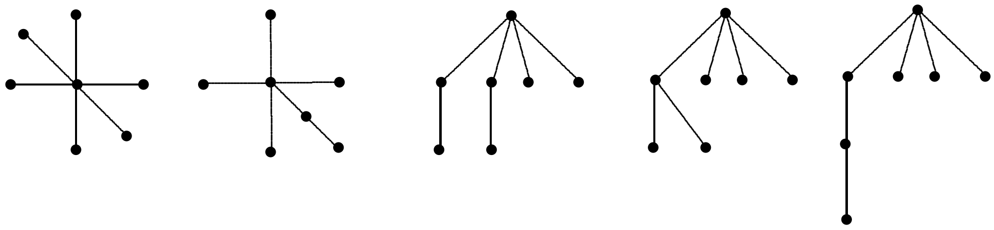
# Gabarito da 2ª prova de Algoritmos e Teoria dos Grafos

2° semestre de 2005

1) Desenhe todas as árvores não-isomorfas com sete vértices e grau máximo pelo menos quatro.

$\rightarrow$ *São elas:*



2) Mostre que vale a seguinte desigualdade entre conexidade e grau médio

$$\kappa(G) \le d(G)$$

para todo grafo.

$\rightarrow$ *Vimos em aula (Teorema 8) que* $\kappa(G) \le \delta(G)$ *(removendo a vizinhança do vértice de menor grau deixa ele desconectado). Obviamente* $\delta(G) \le d(G)$ *e temos*

$$\kappa(G) \le \delta(G)) \le d(G).$$

3) Mostre que se $G$ é bipartido e $k$-regular ($k \ge 1$) então $G$ tem um emparelhamento perfeito.

$\rightarrow$ *Sejam* $A$ *e* $B$ *as partes de vértices de* $G$*. Primeiro nota-se que* $|A| = |B|$ *pois*

$$\sum_{v \in A} d(v) = |E| = \sum_{u \in B} d(u)$$

*e* $d(u) = d(v) = k$ *logo as duas somas têm que ter o mesmo número de parcelas. Agora basta verificar que tem emparelhamento que cobre* $A$*.*

*Para todo* $S \subseteq A$ *o número de arestas que incidem em vértices de* $S$ *é* $|S|k$*. Em* $N(S)$ *incidem* $|N(S)|k$ *arestas e* $|N(S)|k \ge |S|k$*, pois toda aresta que incide em* $S$ *incide em* $N(S)$ *mas nem toda que incide em* $N(S)$ *incide em* $S$*. Como* $|N(S)| \ge |S|$ *pelo Teorema de Hall existe um emparelhamento que cobre* $A$*.*

4) Considere uma floresta $F$ com $n$ vértices e $m$ arestas.

(a) Mostre que o número de vértices na componente conexa que tem mais vértices é no máximo $m+1$.

$\rightarrow$ *Cada componente conexa de uma flaresta é uma árvore. Uma árvore com $m$ arestas tem $m+1$ vértices.*

(b) Mostre que há pelo menos $\max\{n-2m, 0\}$ vértices de grau zero.

$\rightarrow$ *Se $F$ tem $k$ componentes conexas então $m = n-k$ pois cada componente $C$ é uma árvore portanto tem $|V(C)|-1$ arestas e*

$$\sum_C |V(C)| - 1 = n - k.$$

*Sejam $C_1, C_2, \dots C_{n-m}$ as componentes conexas de $F$ (pois $k = n-m$).*

*Se em $C_1, C_2, \dots, C_{n-m}$ exatamente $x$ componentes são unitários então $n-m-x$ componentes têm pelo menos 2 elementos e*

$$|C_1| + |C_2| + \cdots + |C_{n-m}| \geq x + 2(n-m-x).$$

*Por outro lado $|C_1|+|C_2|+\cdots+|C_{n-m}| = n$, portanto, o número de componentes unitárias $x$ satisfaz*

$$n \geq x + 2(n-m-x)$$

*e resolvendo para $x$ temos $x \geq n-2m$. Como $x \geq 0$ e $n-2m < 0$ para $m > n/2$, o número de unitários é $\max\{n-2m, 0\}$.*

(c) Mostre que se $m < n/2$ então resta pelo menos um vértice de grau zero.

$\rightarrow$ *Se $m < n/2$ então $n-2m > 0$ e, pelo item anterior, $x > 0$.*

$\rightarrow$ *sem usar(b) — Se todo vértice tem grau pelo menos 1 então $2m = \sum_v d(v) \geq n$. Logo $m \geq n/2$. Assim, se $m < n/2$ então há pelo menos um vértice de grau 0.*