Primeira prova de Algoritmos e Teoria dos Grafos

2° semestre de 2002

Para resolver os exercícios você pode usar todos os resultados vistos em aula e pode usar todos os resultados dos exercícios das listas e que não são questões da prova, mas você deve escrever o enunciado de tudo o que for usado. Qualquer outro resultado que você usar tem que ser provado. A prova é **sem** consulta e a nota será o menor dentre 100 e a soma dos pontos que obtiver.

(1) (**5 pontos**) Desenhe todas as árvores não-isomorfas com 7 vértices e grau máximo pelo menos 4.

(2) (**5 pontos**) Para que valores de n o grafo completo K^n é euleriano? E para quais valores é hamiltoniano?

(3) (**10 pontos**) Sejam F e G grafos isomorfos. Mostre que se F é conexo, então G é conexo.

(4) (**10 pontos**) Decida se é verdadeiro ou falso e justifique: Todo grafo G com grau mínimo pelo menos $(|G|-1)/2$ é conexo.

(5) (**10 pontos**) Dada uma árvore T mostre que qualquer grafo G com $\delta(G) \geqslant |T|-1$ contém um subgrafo isomorfo à T.

(6) (**20 pontos**) Mostre que todo grafo conexo $H=(V,E)$ tem pelo menos $|E|-|V|+1$ circuitos. (Dica: Considere uma subárvore geradora de H.)

(7) (**20 pontos**) Seja G um grafo com 4 vértices de grau ímpar. Mostre que existem trilhas P_1 e P_2 em G tais que $E(P_1)\cap E(P_2)=\emptyset$ e $E(G)=E(P_1)\cup E(P_2)$.

(8) (**30 pontos**) Suponha que T é uma árvore. Sejam $T_1,T_2,\ldots,T_k$ subárvores de T tais que $V(T_i)\cap V(T_j)\neq\emptyset$, para todos $1\leqslant i<j\leqslant k$. Prove que $V(T_1)\cap V(T_2)\cap\cdots\cap V(T_k)\neq\emptyset$.

(9) (**30 pontos**) Uma aresta e num grafo G é chamada *aresta de corte* de G se o número de componentes conexas de $G-e$ é maior que o número de componentes conexas de G. Por exemplo, toda aresta de uma floresta é uma arestas de corte, e nenhuma aresta de um circuito é uma aresta de corte.

Seja G um grafo conexo com pelo menos 2 vértices e seja $\mathscr{T}$ o conjunto de *todas* as subárvores geradoras do grafo G.

Mostre que se $e\in E(T)$ para toda árvore geradora $T\in\mathscr{T}$, então e é uma aresta de corte de G. Reciprocamente, mostre que se $e\in E(G)$ é uma aresta de corte de G, então e é uma aresta que pertence a toda árvore geradora de G. Em símbolos, mostre que

$$E(T_1)\cap E(T_2)\cap\cdots\cap E(T_{|\mathscr{T}|})=\{e\in E(G)\colon e \text{ é aresta de corte de } G\},$$

onde $T_1,T_2,\ldots,T_{|\mathscr{T}|}$ são as subárvores geradoras de G.