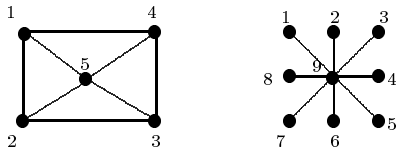
Segunda prova de Grafos

11/03/2003

Para resolver os exercícios você pode usar todos os resultados vistos em aula e pode usar todos os resultados dos exercícios das listas e que não são questões da prova, mas você deve escrever o enunciado de tudo o que for usado. Qualquer outro resultado que você usar tem que ser provado. A prova é **sem** consulta e a nota será o menor dentre 100 e a soma dos pontos que obtiver.

1. (**5 pontos**) Escreva a matriz de adjacências e a lista de adjacências dos grafos abaixo.



2. (**5 pontos**) Escreva a lista de adjacências do grafo representado pela seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. (**10 pontos**) Dada uma representação por listas de adjacências de um grafo, qual o tempo gasto para computar o grau de cada vértice deste grafo? E para computar o grau de entrada e o grau de saída de um grafo dirigido?

4. (**10 pontos**) Forneça um algoritmo eficiente para determinar se um grafo é bipartido.

5. (**20 pontos**) Mostre que uma árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito.

6. (**20 pontos**) Mostre que o k-cubo tem um emparelhamento perfeito, para $k \geq 1$.

7. (**20 pontos**) Quando uma representação por uma matriz de adjacências é utilizada, muitos algoritmos sobre grafos precisam de tempo $\Theta(V^2)$, mas existem algumas exceções. Mostre que determinar se um grafo dirigido contém uma **sorvedouro** — isto é, um vértice com grau de entrada $|V| - 1$ e grau de saída 0 — pode ser determinado em tempo $O(V)$, mesmo se uma representação por matriz de adjacências é utilizada.

8. (**30 pontos**) Seja G um grafo dirigido com peso nas arestas: $p\colon E \to \{0, 1, \ldots, W\}$, para algum inteiro W não-negativo. Modifique o Algoritmo de Dijkstra para computar os caminhos mínimos a partir de um vértice s em tempo $O(WV + E)$.

9. (**30 pontos**) Mostre que o Algoritmo de Kruskal funciona corretamente.