Prova Final de Algoritmos e Teoria dos Grafos

1° semestre de 2005

---

(1) LEIA COM ATENÇÃO TODA A PROVA.

(2) ENTENDER o enunciado das questões faz parte da prova.

(3) EXPLIQUE todas as suas RESPOSTAS e os ALGORITMOS.

(4) Você pode usar todos os resultados vistos nas aulas. Nesses casos, escreva o que você está usando.

(5) Pode usar lápis e não precisa devolver a folha de questões.

---

1) **(50)** Considere um universo com n elementos e a configuração resultante de n MAKE's.

(a) Mostre que podem ser realizadas até $n-1$ uniões até a configuração resultante ser um único conjunto.

(b) Mostre que com $m < n$ uniões o tamanho do maior conjunto é no máximo $m+1$.

(c) Mostre que com $m < n$ uniões restam pelo menos $\max\{n-2m, 0\}$ conjuntos unitários.

(d) Mostre que se forem feitas menos de $n/2$ uniões então resta pelo menos um conjunto unitário.

2) **(40)** Considere o seguinte algoritmo que recebe um grafo G representado por sua matriz de adjacências e determina quantos triângulos G contém.

Algoritmo 1 TRIANGULO(G)

$K3 = 0$
PARA $(i = 1; i \leq |V| - 2; i{+}{+})$
    PARA $(j = i + 1; j \leq |V| - 1; j{+}{+})$
        PARA $(k = j + 1; k \leq |V|; k{+}{+})$
            SE $(a[i][j] == a[i][k] == a[j][k] == 1)$
                $K3{+}{+}$
DEVOLVA $K3$

Determine a complexidade do algoritmo.

Em 1969, Strassen mostrou um algoritmo que determina o produto de matrizes $n \times n$ usando $O(n^{\log 7}) = O(n^{2,81})$ operações aritméticas.

Como o algoritmo de Strassen pode ser usado para determinar o número de triângulos em tempo $O(n^{2,81})$? (Dica: o que é a posição (i, j), $i \neq j$, na matriz A^2?)

3) **(10)** Se $G = (X \cup Y, E)$ é um grafo bipartido determine $|X|$ em função de $|V(G)|$ para que o número de arestas em G seja máximo.

(1) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ os conjuntos unitários resultantes de n MAKE's.

(a) Associamos a cada A_i um vértice v_i e a cada união de conjuntos diferentes ligamos dois vértices quaisquer de cada um dos conjuntos que foram unidos. Esse grafo não conterá circuito pois arestas ligam vértices de conjuntos distintos. Teremos um único conjunto quando o grafo for conexo, ou seja, tiver $n-1$ arestas.

(b) Suponha que existe uma seqüência de m uniões que resulta num conjunto com mais que $m+1$ elementos. Como cada união diminui de 1 o número de conjuntos, com m uniões teremos os conjuntos

$$A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n-m}$$

como cada um tem pelo menos um elemento e algum tem mais que $m+1$

$$|A'_1| + |A'_2| + \cdots + |A'_{n-m}| > (m+1) + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-m-1 \text{ vezes}} > n$$

absurdo pois o universo tem n elementos.

(c) Se em

$$A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n-m}$$

exatamente k conjuntos são unitários então $n-m-k$ conjuntos têm pelo menos 2 elementos e

$$|A'_1| + |A'_2| + \cdots + |A'_{n-m}| \geq k + 2(n-m-k).$$

Por outro lado $|A'_1| + |A'_2| + \cdots + |A'_{n-m}| = n$, portanto, o número de conjuntos unitários k satisfaz

$$n \geq k + 2(n-m-k)$$

e resolvendo para k temos $k \geq n-2m$. Como $k \geq 0$ e $n-2m < 0$ para $m > n/2$, o número de unitários é $\max\{n-2m, 0\}$.

(d) Se $m < n/2$ então $n-2m > 0$ e, pelo item anterior, $k > 0$.

(2) Dos três PARA aninhados deduzimos $O(n^3)$, $n = |V|$.

Para contar o número de triângulos a idéia é

```
Calcular A^2
Para cada par (i,j) com i<j
          Se A(i,j)=1 então K3 <- k3+A^2(i,j)
```

Isso porque A^2 na posição (i,j) é o número de vértices que são adjacentes tanto a i quanto a j. Se ℓ é adjacente a i e a j e $A(i,j) = 1$ então i, j, ℓ formam um triângulo. Resumindo,

$A^2(i,j)$ *é o número de triângulos que contêm a aresta* ij.

No final do algoritmo acima `K3` tem 3 vezes o número de triângulos de G. A primeira linha custa $O(n^{2,81})$ e a segunda $O(n^2)$, portanto é um algoritmo com complexidade $O(n^{2,81})$.

(3) $|V(G)| = |X| + |Y|$ e número máximo de arestas é $|E(G)| = |X||Y|$. Como $|Y| = |V(G)| - |X|$ substituindo temos $|E(G)| = |X||V(G)| - |X|^2$ que assume valor máximo para $|V(G)| - 2|X| = 0$, ou seja

$$|X| = \frac{|V(G)|}{2}.$$