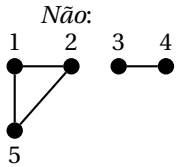


A prova tem duração de 1h30min. É individual e sem consulta. É proibido usar qualquer objeto que não seja lápis, borracha, caneta e papel.

Exercício 1. Todo grafo com pelo menos três vértices, exatamente dois vértices de grau 1 e os demais vértices com grau 2 é um caminho? Justifique sua resposta.



Exercício 2. Seja G um grafo e A sua matriz de adjacências. O que significa em termos do grafo a posição (i, j) , $i \neq j$, na matriz A^2 ? (lembrando que $A^2(i, j) = \sum_k A(i, k)A(k, j)$)
se $i \neq j$, cada termo da soma indica se k é vizinho de i e de j

$$A^2(i, j) = \sum_k \underbrace{A(i, k)A(k, j)}_{\substack{1 \text{ se } A(i, k)=A(k, j)=1 \\ \text{nos outros casos}=0}}$$

a soma conta o número de vizinhos comuns a i e j .

se $i = j$ a soma é o grau do vértice i .

Explique como um algoritmo que recebe A como entrada pode usar A^2 para determinar o número de triângulos de um grafo.

percorre a matriz $A(i, j)$ para $i \neq j$

se $A(i, j) = 1$ então há $A^2(i, j)$ triângulos de base ij .

cada triângulo é contado 3 vezes para cada base ij e mais 3 vezes para a base ji ; cada triângulo é contado 6 vezes.

o total de triângulos é $(\sum_{i \neq j} A^2(i, j))/6$.

Justifique suas respostas.

Exercício 3. Seja $k \geq 1$ um número natural. O k -cubo é o grafo cujo conjunto de vértices são as sequências binárias de k bits e dois vértices são adjacentes se e somente se as k -tuplas correspondentes diferem exatamente em uma posição. Determine, em função de k , o número de vértices, o grau dos vértices, o número de arestas, o comprimento do maior caminho, e o comprimento do menor circuito.

$|V| = \text{no. de sequências binárias de comprimento } k, = 2^k$

v tem como vizinhos as seqs. que diferem de v numa única posição, portanto, k vizinhos

$|E| = (1/2) \sum_v d(v) = (1/2) 2^k k = 2^{k-1} k$.

por indução que maior caminho tem comprimento $2^k - 1$:

Para $k=1$ temos caminho de comprimento 1.

Suponha que para o $k-1$ cubo há caminho de comprimento $2^{k-1} - 1$.

No k cubo as sequências binárias que começam com 0 definem um $k-1$ -cubo, denotemos esses vértice por $0x$, com $x \in \{0, 1\}^{k-1}$. Analogamente, $1x$ define um $k-1$ cubo.

Pela hipótese, cada um desses subcubos tem um caminho de comprimento $2^{k-1} - 1$:

$0x_1, 0x_2, \dots, 0x_{2^{k-1}-1}$ e $1x_1, 1x_2, \dots, 1x_{2^{k-1}-1}$ e $\{0x_{2^{k-1}-1}, 1x_{2^{k-1}-1}\}$ é aresta logo

$0x_1, 0x_2, \dots, 0x_{2^{k-1}-1}, 1x_{2^{k-1}-1}, \dots, 1x_2, 1x_1$ é um caminho de comprimento $2^k - 1$ no k -cubo.

Para $k=1$ o menor circuito é de comprimento ∞ .

Para $k \geq 2$ o menor circuito é de comprimento 4: $00x, 01x, 11x, 10x$, para x de $k-2$ bits fixo.

Como é bipartido (veremos a seguir), não pode ter triângulo.

Prove que o k -cubo é bipartido.

Se A é o subconjunto dos vértices com quantidade par de 1's então A é independente, pela definição de adjacência no cubo. Do mesmo modo, o restante dos vértices é independente, pois os vértices tem quantidade ímpar de 1's. Logo é bipartido

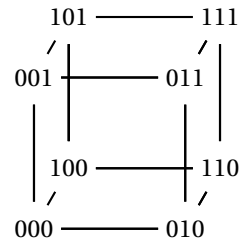


Figura 1: um diagrama do 3-cubo.

Determine os parâmetros α (maior conjunto independente), e ω (maior clique) do k -cubo. Justifique sua resposta. Justifique suas respostas.

como tem aresta e não tem triângulo, $\omega = 2$.

cada uma das partes de bipartição tem metade dos vértices, $\alpha \geq 2^{k-1}$.

o k -cubo tem um caminho que passa por todos os vértices logo qualquer subconjunto com mais da metade dos vértices tem 2 deles adjacentes, portanto não pode ser independente.

portanto, $\alpha = 2^{k-1}$.