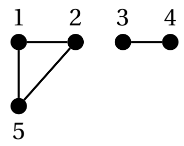
1ª Prova de Teoria dos Grafos — 2012-3 matutino

Jair Donadelli

A prova tem duração de 1h30min. É individual e sem consulta. É proibido usar qualquer objeto que não seja lápis, borracha, caneta e papel.

***Exercício* 1.** Todo grafo com pelo menos três vértices, exatamente dois vértices de grau 1 e os demais vértices com grau 2 é um caminho? Justifique sua resposta.

Não:



***Exercício* 2.** Seja G um grafo e A sua matriz de adjacências. O que significa em termos do grafo a posição (i,j), $i \neq j$, na matriz A^2? (lembrando que $A^2(i,j) = \sum_k A(i,k)A(k,j)$)

se $i \neq j$, cada termo da soma indica se k é vizinho de i e de j

$$A^2(i,j) = \sum_k \underbrace{A(i,k)A(k,j)}_{\substack{1 \text{ se } A(i,k)=A(k,j)=1 \\ \text{nos outros casos}=0}}$$

a soma conta o número de vizinhos comuns a i e j.

se $i = j$ a soma é o grau do vértice i.

Explique como um algoritmo que recebe A como entrada pode usar A^2 para determinar o número de triângulos de um grafo.

percorre a matriz $A(i,j)$ para $i \neq j$

se $A(i,j) = 1$ então há $A^2(i,j)$ triangulos de base ij.

cada triângulo é contado 3 vezes para cada base ij e mais 3 vezes para a base ji; cada triângulo é contado 6 vezes.

o total de triângulos é $(\sum_{i \neq j} A^2(i,j))/6$.

Justifique suas respostas.

***Exercício* 3.** Seja $k \geq 1$ um número natural. O k-cubo é o grafo cujo conjunto de vértices são as sequências binárias de k bits e dois vértices são adjacentes se e somente se as k-tuplas correspondentes diferem exatamente em uma posição. Determine, em função de k, o número de vértices, o grau dos vértices, o número de arestas, o comprimento do maior caminho, e o comprimento do menor circuito.

$|V| =$ no. de sequências binárias de comprimento k, $= 2^k$

v tem como vizinhos as seqs. que diferem de v numa única posição, portanto, k vizinhos

$|E| = (1/2)\sum_v d(v) = (1/2)2^k k = 2^{k-1}k$.

por indução que maior caminho tem comprimento $2^k - 1$:

Para $k = 1$ temos caminho de comprimento 1.

Suponha que para o $k-1$ cubo há caminho de comprimento $2^{k-1} - 1$.

No k cubo as sequências binárias que começam com 0 definem um $k-1$-cubo, denotemos esses vértice por $0x$, com $x \in \{0,1\}^{k-1}$. Analogamente, $1x$ define um $k-1$ cubo.

Pela hipótese, cada um desses subcubos tem um caminho de comprimento $2^{k-1} - 1$:

$0x_1, 0x_2, \ldots, 0x_{2^{k-1}-1}$ e $1x_1, 1x_2, \ldots, 1x_{2^{k-1}-1}$ e $\{0x_{2^{k-1}-1}, 1x_{2^{k-1}-1}\}$ é aresta logo

$0x_1, 0x_2, \ldots, 0x_{2^{k-1}-1}, 1x_{2^{k-1}-1}, \ldots, 1x_2, 1x_1$ é um caminho de comprimento $2^k - 1$ no k-cubo.

Para $k = 1$ o menor circuito é de comprimento ∞.

Para $k \geq 2$ o menor circuito é de comprimento 4: $00x, 01x, 11x, 10x$, para x de $k-2$ bits fixo.

Como é bipartido (veremos a seguir), não pode ter triângulo.

Prove que o k-cubo é bipartido.

Se A é o subconjunto dos vértices com quantidade par de 1's então A é independente, pela definição de adjacência no cubo. Do mesmo modo, o restante dos vértices é independente, pois os vértices tem quantidade ímpar de 1's. Logo é bipartido

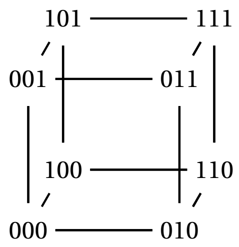


Figura 1: um diagrama do 3-cubo.

Determine os parâmetros α (maior conjunto independente), e ω (maior clique) do k-cubo. Justifique sua resposta. Justifique suas respostas.

como tem aresta e não tem triângulo, $\omega = 2$.

cada uma das partes de bipartição tem metade dos vértices, $\alpha \geq 2^{k-1}$.

o k-cubo tem um caminho que passa por todos os vértices logo qualquer subconjunto com mais da metade dos vértices tem 2 deles adjacentes, portanto não pode ser independente.

portanto, $\alpha = 2^{k-1}$.