

# MATEMÁTICA DISCRETA

JAIR DONADELLI

CMCC-UFABC

[jair.donadelli@ufabc.edu.br](mailto:jair.donadelli@ufabc.edu.br)

2026

# REVISÃO

$\preceq$  denota relação de ordem genérica.

Lemos  $x \preceq y$  como “ $x$  precede, ou é igual a,  $y$ ”.

Se  $x \preceq y$  ou  $y \preceq x$

$x$  e  $y$  são **comparáveis**.

Se  $x \not\preceq y$  nem  $y \not\preceq x$

$x$  e  $y$  são **incomparáveis**.



# MÁXIMO E MAXIMAL

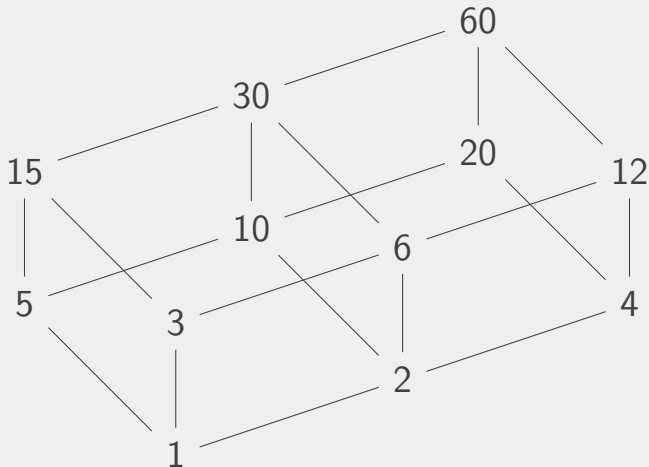
$x \in A$  é

**maximal**  $\forall y \in A, x \preceq y$  implica  $y = x$ .

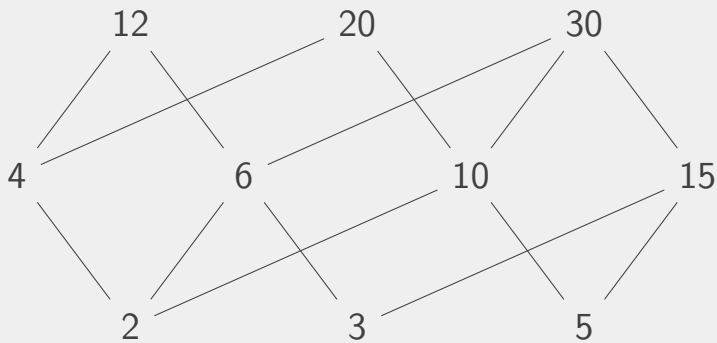
**máximo**  $\forall y \in A, y \preceq x$ .

**minimal**  $\forall y \in A, y \preceq x$  implica  $y = x$ .

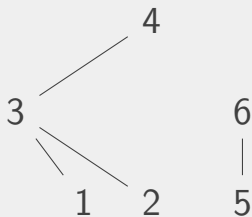
**mínimo**  $\forall y \in A, x \preceq y$ .



**1 é mínimo e 60 é máximo**



**2, 3, 5 são minimais e 12, 20, 30 são maximais**



**Figura: diagrama da ordem parcial**

$\{(1, 3), (2, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 6), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

# BOA ORDEM

Uma ordem parcial  $(A, \preceq)$  é **bem ordenada**, ou **boa ordem**, sse

**todo subconjunto não vazio de  $A$  tem mínimo**

# BOA ORDEM

Uma ordem parcial  $(A, \preceq)$  é **bem ordenada**, ou **boa ordem**, sse

**todo subconjunto não vazio de  $A$  tem mínimo**

Não pode haver anticadeias, logo a ordem é total.

# EXEMPLO

$\mathbb{Z}$  com  $x \preccurlyeq y$  se, e somente se,

1.  $|x| < |y|$  ou
2.  $|x| = |y|$  e  $x \leq y$ .

Nesse caso  $0 \prec -1 \prec 1 \prec -2 \prec 2 \prec \dots$ .

Exercício: Verifique que é boa ordem

# EXEMPLO — ORDEM LEXICOGRÁFICA

Ordem lexicográfica em  $\mathbb{N}^2$ :

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  com  $(x, y) \preceq_{\text{lex}} (a, b)$

$$x < a \text{ ou } (x = a \text{ e } y \leq b)$$

e  $(x, y) = (a, b)$  se e só se  $x = a$  e  $y = b$ .

Exercício: Verifique que é boa ordem

# EXEMPLO — ORDEM PRODUTO

## Ordem produto em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(x, y) \preceq_x (a, b)$  sse

$$x \leq a \text{ e } y \leq b$$

e  $(x, y) = (a, b)$  se e só se  $x = a$  e  $y = b$ .

# EXEMPLO — ORDEM PRODUTO

## Ordem produto em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(x, y) \preceq_x (a, b)$  sse

$$x \leq a \text{ e } y \leq b$$

e  $(x, y) = (a, b)$  se e só se  $x = a$  e  $y = b$ .

**É boa ordem?**

# INDUÇÃO

## Teorema (Princípio de Indução em Boa Ordem)

$(A, \preceq)$  boa ordem e  $P$  predicado sobre  $A$ .

**Se**

1.  $P(x)$  é **V** no elemento mínimo  $x \in A$
2. Para todo  $y \in A$ ,  
 $P(x)$  é **V** em todo  $x \prec y$  **implica**  $P(y)$  é **V**,

**Então**  $P(x)$  é verdadeiro para todo  $x \in A$ .

**OBS:**  $\prec$  é  $\preceq \setminus \Delta_A$ , a ordem estrita associada a  $\preceq$ .

$$\frac{\forall y \in A \left( (\forall x \in A, x \prec y \rightarrow P(x)) \rightarrow P(y) \right)}{\forall x \in A, P(x)}$$

$$\frac{\forall y \in A \left( (\forall x \in A, x \prec y \rightarrow P(x)) \rightarrow P(y) \right)}{\forall x \in A, P(x)}$$

**a BASE é nos  $y$  sem predecessores por  $\prec$**

$$\frac{\forall y \in A \left( (\forall x \in A, x \prec y \rightarrow P(x)) \rightarrow P(y) \right)}{\forall x \in A, P(x)}$$

**a BASE é nos  $y$  sem predecessores por  $\prec$**

$$\forall x \in A, x \prec y \rightarrow P(x)$$

**é verdadeira por vacuidade**

$$\frac{\forall y \in A \left( (\forall x \in A, x \prec y \rightarrow P(x)) \rightarrow P(y) \right)}{\forall x \in A, P(x)}$$

a BASE é nos  $y$  sem predecessores por  $\prec$

$$\forall x \in A, x \prec y \rightarrow P(x)$$

é verdadeira por vacuidade

portanto, a premissa é  $\forall$  quando  $P(y)$  vale no mínimo. **E isso temos que verificar para aplicar a indução.**

# DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

Para provar uma propriedade para todos os elementos de  $A$

- que a propriedade é verdadeira para o mínimo;
- que a propriedade é verdadeira para qualquer  $y$  não mínimo sempre que for verdadeira nos seus precedentes (estritos).

# TEOREMA DE BACHET–BÉZOUT

**Para todos  $a, b \in \mathbb{Z}_+$**

$$ax + by = \text{mdc}(a, b)$$

**tem solução  $x, y \in \mathbb{Z}$ .**

# TEOREMA DE BACHET–BÉZOUT

Para todos  $a, b \in \mathbb{Z}_+$

$$ax + by = \text{mdc}(a, b)$$

tem solução  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

*Prova:* Por indução em  $(a, b)$  na ordem  $(\mathbb{N}^2, \preceq_{\text{lex}})$ .

# ORDEM BEM FUNDADA

Uma *ordem parcial*  $(A, \preceq)$  é **bem fundada** se, e só se, a

**todo subconjunto não vazio de  $A$  tem minimal(is)**

# ORDEM BEM FUNDADA

Uma *ordem parcial*  $(A, \preceq)$  é **bem fundada** se, e só se, a

**todo subconjunto não vazio de  $A$  tem minimal(is)**

Agora pode haver anticadeias.

# ORDEM BEM FUNDADA

## Teorema

$(A, \prec)$  é bem fundada **sse** vale a **condição de cadeia descendente** para  $\prec$ :

*não existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $A$   
tal que  $x_{i+1} \prec x_i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$*

*ou seja, em  $A$  não há uma cadeia da forma*

$$\cdots \prec x_2 \prec x_1 \prec x_0$$

*descendente infinita.*

## São ordens parciais bem fundadas:

1.  $\leq$  em  $\mathbb{N}$
2.  $\preceq_{\text{lex}}$  em  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
3.  $\subseteq$  em  $\wp(\{1, 2, \dots, 100\})$
4. a divisibilidade em  $\mathbb{N}$

## Não são ordens bem fundadas:

1.  $\geq$  em  $\mathbb{N}$

2.  $\leq$  em  $\mathbb{Z}$

3.  $\leq$  em  $\mathbb{Q}^+$

4.  $\subseteq$  em  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$X_0 :=$  naturais múltiplos de 3

$X_i := X_{i-1} \setminus \{6i\}$  para todo inteiro  $i \geq 1$

**Temos a cadeia descendente**

$$\dots \subset X_3 \subset X_2 \subset X_1 \subset X_0$$

$$\subseteq \text{EM } \wp(\mathbb{N})$$

$X_0 :=$  naturais múltiplos de 3

$X_i := X_{i-1} \setminus \{6i\}$  para todo inteiro  $i \geq 1$

**Temos a cadeia descendente**

$$Y \subset \cdots \subset X_3 \subset X_2 \subset X_1 \subset X_0$$

onde  $Y :=$  múltiplos de 3 ímpares.

# INDUÇÃO

## Teorema (Princípio de indução para ordem bem fundada)

$(A, \preceq)$  bem fundada e  $P$  predicado sobre  $A$ .

**Se**

1.  $P(x)$  é **V** nos elementos minimais  $x \in A$
2. Para todo  $y \in A$ ,  
 $P(x)$  é **V** em todo  $x \prec y$  **implica**  $P(y)$  é **V**,

**Então**  $P(x)$  é verdadeiro para todo  $x \in A$ .

$$\frac{\forall y \in A \left( (\forall x \in A, x \prec y \rightarrow P(x)) \rightarrow P(y) \right)}{\forall x \in A, P(x)}$$

$$\frac{\forall y \in A \left( (\forall x \in A, x \prec y \rightarrow P(x)) \rightarrow P(y) \right)}{\forall x \in A, P(x)}$$

a BASE é nos  $y$  sem predecessores por  $\prec$

$$\frac{\forall y \in A \left( (\forall x \in A, x \prec y \rightarrow P(x)) \rightarrow P(y) \right)}{\forall x \in A, P(x)}$$

**a BASE é nos  $y$  sem predecessores por  $\prec$**

$$\forall x \in A, x \prec y \rightarrow P(x)$$

**é verdadeira por vacuidade**

$$\frac{\forall y \in A \left( (\forall x \in A, x \prec y \rightarrow P(x)) \rightarrow P(y) \right)}{\forall x \in A, P(x)}$$

a BASE é nos  $y$  sem predecessores por  $\prec$

$$\forall x \in A, x \prec y \rightarrow P(x)$$

é verdadeira por vacuidade

portanto, a premissa é  $\forall$  quando  $P(y)$  vale nos elementos minimais. **E isso temos que verificar para aplicar a indução.**

# DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

Para provar uma propriedade para todos os elementos de  $A$

- que a propriedade é verdadeira para todos elementos minimais;
- que a propriedade é verdadeira para qualquer  $y$  não minimal sempre que for verdadeira nos seus precedentes (estritos).

# EXEMPLO

Na ordem estrita e bem fundada  $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mid_{\neq})$ .

# EXEMPLO

Na ordem estrita e bem fundada  $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mid)$ .

$P(n)$ :  $n$  é primo ou produto de primos.

# EXEMPLO

Na ordem estrita e bem fundada  $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$ .

$P(n)$ :  $n$  é *primo ou produto de primos*.

(Base) **Se  $n$  é primo  $P(n)$  é verdadeiro.**

# EXEMPLO

Na ordem estrita e bem fundada  $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mid_{\neq})$ .

$P(n)$ :  $n$  é *primo ou produto de primos*.

(Base) **Se  $n$  é primo  $P(n)$  é verdadeiro.**

(Passo) **Seja  $y$  composto arbitrário.**

(H.I.) **Assuma  $P(x)$  para todo  $x \mid_{\neq} y$ .**

# EXEMPLO

Na ordem estrita e bem fundada  $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \neq)$ .

$P(n)$ :  $n$  é *primo ou produto de primos*.

(Base) **Se  $n$  é primo  $P(n)$  é verdadeiro.**

(Passo) **Seja  $y$  composto arbitrário.**

(H.I.) **Assuma  $P(x)$  para todo  $x \neq y$ .**

$\exists a, b \in \mathbb{N}, y = a \cdot b$ . **Logo  $a \neq y$  e  $b \neq y$**

# EXEMPLO

Na ordem estrita e bem fundada  $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mid_{\neq})$ .

$P(n)$ :  $n$  é *primo ou produto de primos*.

(Base) **Se  $n$  é primo  $P(n)$  é verdadeiro.**

(Passo) **Seja  $y$  composto arbitrário.**

(H.I.) **Assuma  $P(x)$  para todo  $x \mid_{\neq} y$ .**

$\exists a, b \in \mathbb{N}, y = a \cdot b$ . **Logo  $a \mid_{\neq} y$  e  $b \mid_{\neq} y$**

**Por  $P(a)$  e  $P(b)$ ,  $y$  é produto de primos.**

**Por indução  $P(n)$  é verdadeiro para todo  $n$ .**