

MATEMÁTICA DISCRETA

— CONTAGEM —

JAIR DONADELLI

CMCC–UFABC

jair.donadelli@ufabc.edu.br

2026

- 1 Cardinalidade**
- 2 Princípios de contagem**
- 3 Arranjos e Combinações**
- 4 Soluções inteiras de equações lineares**
- 5 Bolas em caixas**
- 6 Permutação com repetição**
- 7 Permutação circular**

MESMA CARDINALIDADE

Dois conjuntos A e B

têm a mesma cardinalidade

se e somente se existe uma bijeção $f: A \rightarrow B$.

MESMA CARDINALIDADE NOTAÇÃO

$$|A| = |B|$$

Para A e B de **mesma cardinalidade**

Lê-se $|A|$ como **cardinalidade** de A .

MESMA CARDINALIDADE NOTAÇÃO

$$|A| = |B|$$

Para A e B de **mesma cardinalidade**

Lê-se $|A|$ como **cardinalidade** de A .

OBS: NÃO ESTÁ DEFINIDO O QUE É CARDINALIDADE.

MESMA CARDINALIDADE

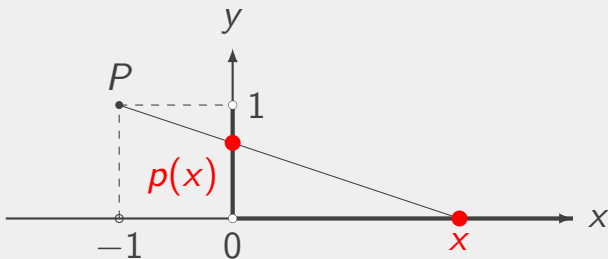
EXEMPLOS

- $|(0, +\infty)| = |(0, 1)|$

MESMA CARDINALIDADE

EXEMPLOS

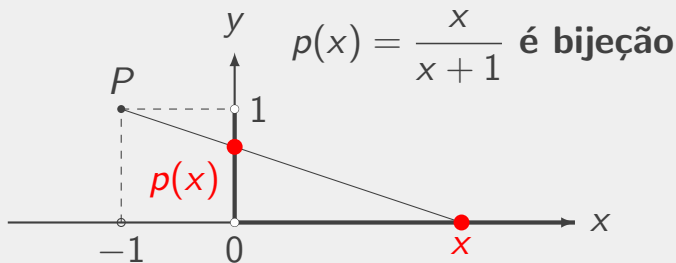
- $|(0, +\infty)| = |(0, 1)|$



MESMA CARDINALIDADE

EXEMPLOS

- $|(0, +\infty)| = |(0, 1)|$



MESMA CARDINALIDADE

EXEMPLOS

- $|(0, +\infty)| = |\mathbb{R}|$

$$g(x) = e^x$$

MESMA CARDINALIDADE

EXEMPLOS

- $|(0, +\infty)| = |\mathbb{R}|$

$$g(x) = e^x$$

- $|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$ usando a p anterior

$$p \circ g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

MESMA CARDINALIDADE

EXEMPLOS

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$$

MESMA CARDINALIDADE

EXEMPLOS

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$$

$(\mathbb{Z}, \prec):$	0	-1	1	-2	2	-3	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	...
$(\mathbb{N}, <):$	0	1	2	3	4	5	...

MESMA CARDINALIDADE

EXEMPLOS

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$$

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{Z}, \prec): & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ (\mathbb{N}, <): & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

$$n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n(z) = \begin{cases} 2z, & \text{se } z \geq 0 \\ 2(-z) - 1, & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

MESMA CARDINALIDADE

EXEMPLOS

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$$

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$$

é bijetiva.

MESMA CARDINALIDADE

EXEMPLOS

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$$

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$
$$f(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$$

é bijetiva.

OBS: Todo $n \geq 2$ é unicamente escrito na forma $2^k \ell$ com ℓ ímpar.

COMPARANDO CARDINALIDADES I

Escrevemos

$$|A| \leq |B|$$

para abreviar que existe $f: A \rightarrow B$ injetiva.

COMPARANDO CARDINALIDADES I

Escrevemos

$$|A| < |B|$$

para abreviar que

- existe $f: A \rightarrow B$ injetiva e
- **não** existe $g: A \rightarrow B$ bijetiva.

**Não confundir $\leq$
sobre conjuntos
com $\leq$ sobre $\mathbb{N}$.**

COMPARANDO CARDINALIDADES

Valem

Reflexividade: $|A| \leq |A|$.

COMPARANDO CARDINALIDADES

Valem

Reflexividade: $|A| \leq |A|$.

Transitividade: se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |C|$ então

COMPARANDO CARDINALIDADES

Valem

Reflexividade: $|A| \leq |A|$.

Transitividade: se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |C|$ então $|A| \leq |C|$.

Antissimetria: ?

COMPARANDO CARDINALIDADES

Valem

Reflexividade: $|A| \leq |A|$.

Transitividade: se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |C|$ então $|A| \leq |C|$.

Antissimetria: SIM

COMPARANDO CARDINALIDADES

Teorema (**Cantor–Schröder–Bernstein**)

Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$ então $|A| = |B|$.

Proposição

Se $A \subseteq B$ então $|A| \leq |B|$,

EXEMPLOS

- $|(0, 1)| = |(0, 1/2)|$; $x \mapsto \frac{x}{2}$ é injetiva.
- $|[0, 1)| = |(0, 1)|$; $x \mapsto \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$ é injetiva.

EXEMPLOS

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$$

$\frac{p}{q}$ na forma reduzida

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } p = 0 \\ 2^p 3^q, & \text{se } p > 0 \\ 5^{-p} 3^q, & \text{se } p < 0 \end{cases}$$

- $|\mathbb{N}| < |(0, 1)|$:

Suponha existir $f: \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$ bijetiva

$$f(0) = 0, \textcolor{blue}{d}_{0,0} d_{0,1} d_{0,2} d_{0,3} d_{0,4} \dots d_{0,n} \dots$$

$$f(1) = 0, d_{1,0} \textcolor{blue}{d}_{1,1} d_{1,2} d_{1,3} d_{1,4} \dots d_{1,n} \dots$$

$$f(2) = 0, d_{2,0} d_{2,1} \textcolor{blue}{d}_{2,2} d_{2,3} d_{2,4} \dots d_{2,n} \dots$$

$$\vdots$$

$$f(n) = 0, d_{n,0} d_{n,1} d_{n,2} d_{n,3} d_{n,4} \dots \textcolor{blue}{d}_{n,n} \dots$$

$$\vdots$$

com $d_{i,j} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

o seguinte número real não está listado

$$\alpha = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots$$

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{se } d_{i,i} \neq 1, \\ 2, & \text{se } d_{i,i} = 1, \end{cases}$$

para todo i .

o seguinte número real não está listado

$$\alpha = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots$$

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{se } d_{i,i} \neq 1, \\ 2, & \text{se } d_{i,i} = 1, \end{cases}$$

para todo i .

$$|(0, 1)| = |\mathbb{R}|.$$

o seguinte número real não está listado

$$\alpha = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots$$

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{se } d_{i,i} \neq 1, \\ 2, & \text{se } d_{i,i} = 1, \end{cases}$$

para todo i .

$|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$. **Logo** $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. (justifique)

o seguinte número real não está listado

$$\alpha = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots$$

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{se } d_{i,i} \neq 1, \\ 2, & \text{se } d_{i,i} = 1, \end{cases}$$

para todo i .

$|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$. **Logo** $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. **(justifique)**

Qual é uma função injetiva $\mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$?

CONJUNTOS FINITOS

Definição de cardinalidade para conjuntos finitos

$$|A| = \begin{cases} 0 & \text{se } A = \emptyset \\ n & \text{se existe bijeção } \{0, \dots, n-1\} \rightarrow A \end{cases}$$

Notação:

$$[n] := \{ 0, 1, 2, \dots, n - 1 \}$$

CARDINALIDADE DE CONJUNTOS FINITOS

$|A|$ está bem definido?

$|A|$ está bem definido?

Se $A \neq \emptyset$ é conjunto e $f: [n] \rightarrow A$ e $g: [m] \rightarrow A$ são bijeções então $m = n$?

PRINCÍPIO DAS GAVETAS

Teorema (Princípio das Gavetas (PG))

Se $1 \leq n < m$ então não existe função $f : [m] \rightarrow [n]$ injetiva.

A prova é por indução em n , não podemos usar a noção de cardinalidade (quantidade de elementos) nessa prova

CONJUNTOS FINITOS

A é **finito** se, e só se, $|A| = n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Já sabemos que $\mathbb{N}$ não é finito.

CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

O conjunto A é enumerável se é finito ou se tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$.

Exemplos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis e $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Definição:

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0 \quad (\text{álefe} - \text{zero})$$

e é o menor cardinal não finito.

CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

Se A é enumerável seus elementos podem ser descritos por uma enumeração $(a_n)_n$

$$A = \{ a_0, a_1, \dots \}$$

$2^{\mathbb{N}}$ NÃO É ENUMERÁVEL

$$2^{\mathbb{N}} = \{f \subseteq \mathbb{N} \times \{0, 1\} : f \text{ é função}\}$$

$2^{\mathbb{N}}$ NÃO É ENUMERÁVEL

$$2^{\mathbb{N}} = \{f \subseteq \mathbb{N} \times \{0, 1\} : f \text{ é função}\}$$

Suponha $2^{\mathbb{N}}$ enumerável.

$2^{\mathbb{N}}$ NÃO É ENUMERÁVEL

$$2^{\mathbb{N}} = \{f \subseteq \mathbb{N} \times \{0, 1\} : f \text{ é função}\}$$

Suponha $2^{\mathbb{N}}$ enumerável.

$$2^{\mathbb{N}} = \{f_0, f_1, f_2, f_3, \dots\}.$$

$2^{\mathbb{N}}$ NÃO É ENUMERÁVEL

	0	1	2	3	...
f_0	$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	...
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	...
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	...
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$2^{\mathbb{N}}$ NÃO É ENUMERÁVEL

	0	1	2	3	...
f_0	$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	...
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	...
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	...
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Definimos $F : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \in 2^{\mathbb{N}}$ alterando a diagonal:

$$F(n) = 1 - f_n(n) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$2^{\mathbb{N}}$ NÃO É ENUMERÁVEL

Pela enumeração, deve existir $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$F = f_k.$$

Avaliando essa igualdade no ponto k :

$$F(k) = f_k(k).$$

Mas, pela definição de F ,

$$F(k) = 1 - f_k(k).$$

Contradição.

CONJUNTOS INFINITOS

A é infinito se, e só se, não é finito.

Definição:

$$|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$$

é a cardinalidade do **contínuo**.

TEOREMA DE CANTOR

Teorema (**Teorema de Cantor**)

Para todo conjunto A , $|A| < |2^A|$.

TEOREMA DE CANTOR

Teorema (Teorema de Cantor)

Para todo conjunto A , $|A| < |2^A|$.

Em particular, temos

$$|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}| < |2^{2^{\mathbb{N}}}| < |2^{2^{2^{\mathbb{N}}}}| < \dots$$

São $|2^{\mathbb{N}}|$ funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$

São $|2^{\mathbb{N}}|$ funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$

São $|\mathbb{N}|$ programas (e.g., em C).

APLICAÇÃO

São $|2^{\mathbb{N}}|$ funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$

São $|\mathbb{N}|$ programas (e.g., em C).

Conclusão: existem funções **não computáveis**.

CONJUNTOS INFINITOS

Vale que para qualquer conjunto A

- 1. se $|A| < |\mathbb{N}|$ então A é finito e enumerável;**
- 2. se $|A| = |\mathbb{N}|$ então A é infinito e enumerável;**
- 3. se $|\mathbb{N}| < |A|$ então A é infinito e não enumerável.**

PRINCÍPIO ADITIVO

Teorema (princípio aditivo)

Se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, então
 $|A \cup B| = |A| + |B|.$

Corolário

Se $A_1, \dots, A_n$ são conjuntos dois-a-dois disjuntos então

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Teorema (princípio multiplicativo)

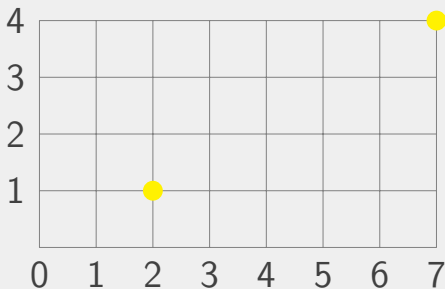
Se A e B são conjuntos finitos não vazios, então
 $|A \times B| = |A| \cdot |B|.$

Corolário

Se $A_1, \dots, A_n$ são conjuntos não vazios então

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

De quantas maneiras pode-se caminhar do ponto $(2, 1)$ até o ponto $(7, 4)$ se cada passo só pode ser para a direita ou para cima?



ARRANJOS E COMBINAÇÕES

De quantos modos podemos
selecionar r dentre n ?

	sem repetição	com repetição
com ordem		
sem ordem		

ARRANJOS E COMBINAÇÕES

De quantos modos podemos
selecionar r dentre n ?

	sem repetição	com repetição
com ordem	$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	
sem ordem		

CONTAGEM E RELAÇÃO DE EQUI- VALÊNCIA

Teorema

Se A é finito e $\sim$ é uma relação de equivalência sobre A cujas classes de equivalência têm a mesma cardinalidade, digamos k , então

$$|A| = |A/\sim| \cdot k.$$

CONTAGEM E RELAÇÃO DE EQUI- VALÊNCIA

$\mathcal{A}$ conjunto das seleções ordenadas de r elementos.

$\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ são equivalentes sse são constituídas pelos mesmos elementos (*se diferem, é na ordem dos elementos*).

É uma relação de equivalência sobre $\mathcal{A}$.

Cada classe de equivalência tem $\binom{n}{r}$ elementos.

CONTAGEM E RELAÇÃO DE EQUI- VALÊNCIA

$\mathcal{A}$ conjunto das seleções ordenadas de r elementos.

$\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ são equivalentes sse são constituídas pelos mesmos elementos (*se diferem, é na ordem dos elementos*).

É uma relação de equivalência sobre $\mathcal{A}$.

Cada classe de equivalência tem $r!$ elementos.

CONTAGEM E RELAÇÃO DE EQUI- VALÊNCIA

Portanto

$$\binom{n}{r} := \frac{(n)_r}{r!}$$

modos de selecionar r dentre n sem repetição e sem ordem.

CONTAGEM E RELAÇÃO DE EQUI- VALÊNCIA

Uma seleção de r elementos de um conjunto de cardinalidade n sem repetição e sem ordem é *um subconjunto de cardinalidade r* .

Corolário

Todo conjunto de cardinalidade n tem $\binom{n}{r}$ subconjuntos de cardinalidade r .

CONTAGEM E RELAÇÃO DE EQUI- VALÊNCIA

Corolário

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} =$$

CONTAGEM E RELAÇÃO DE EQUI- VALÊNCIA

Corolário

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$$

ARRANJOS E COMBINAÇÕES

De quantos modos podemos
selecionar r dentre n ?

	sem repetição	com repetição
com ordem	$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	
sem ordem	$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!}$	

ARRANJOS E COMBINAÇÕES

De quantos modos podemos
selecionar r dentre n ?

	sem repetição	com repetição
com ordem	$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
sem ordem	$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!}$	

De quantos modos podemos selecionar r dentre n com repetição e sem ordem?

O que importa é a quantidade x_i de vezes que o “tipo i ” vai ser repetido ($1 \leq i \leq n$).

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

com $x_i \geq 0$ para todo i

SOLUÇÕES INTEIRAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Quantas soluções tem a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \text{ com } x_i \in \mathbb{N} \text{ para todo } i.$$

?

SOLUÇÕES INTEIRAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Quantas soluções tem a equação

$$y_1 + y_2 + y_3 = 6 + 3 \text{ com } y_i \in \mathbb{Z}^+ \text{ para todo } i.$$

?

SOLUÇÕES INTEIRAS DE EQUAÇÕES LINEARES

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ com $x_i \in \mathbb{N}$ tem

tantas soluções quantas tem

$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = r + n$ com $y_i \in \mathbb{Z}^+$ que tem

$$\binom{r + n - 1}{n - 1} = \binom{r + n - 1}{r} \text{ soluções.}$$

ARRANJOS E COMBINAÇÕES

De quantos modos podemos
selecionar r dentre n ?

	sem repetição	com repetição
com ordem	$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
sem ordem	$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!}$	$\left(\binom{n}{r}\right) = \binom{n+r-1}{r}$

ARRANJOS E COMBINAÇÕES

- **arranjo**: quando a ordem da seleção importa,
- **combinação**: quando a ordem não importa.

ARRANJOS E COMBINAÇÕES

Convenção

$$0! = 1$$

BOLAS EM CAIXAS

Um outro modelo para problemas de contagem:

de quantos modos podemos distribuir de bolas
em caixas?

se considerarmos os casos:

- *caixas distinguíveis* ou *caixas idênticas* e
- *bolas distinguíveis* ou *bolas idênticas*.

BOLAS E CAIXAS DISTINGUÍVEIS

Há 8 modos de distribuir as **bolas distinguíveis** a, b, c em duas **caixas distinguíveis** (por exemplo, *esquerda e direita*)

$$\begin{array}{l} abc| \\ ac|b \end{array}$$
$$\begin{array}{l} ab|c \\ bc|a \end{array}$$
$$\begin{array}{l} a|bc \\ b|ac \end{array}$$
$$\begin{array}{l} |abc \\ c|ab \end{array}$$

CAIXAS INDISTINGUÍVEIS

Se as caixas são indistinguíveis, são 4 modos

- $abc|$ e $|abc$ definem a mesma distribuição,
- $ac|b$ e $b|ac$ definem a mesma distribuição,
- $ab|c$ e $c|ab$ definem a mesma distribuição,
- $bc|a$ e $a|bc$ definem a mesma distribuição.

BOLAS INDISTINGUÍVEIS

Se as 3 bolas são idênticas e as 2 caixas não

* * * | ** | * * | ** | * * *

Também são 4 modos.

CAIXAS E BOLAS INDISTINGUÍVEIS

Se caixas e bolas são indistinguíveis

■ * * * | e | * * * são equivalentes, e
■ ** | * e * | ** são equivalentes.

São 2 modos.

EXERCÍCIO

De quantas maneiras podemos

1. distribuir r bolas distintas em n caixas distintas com qualquer número de bolas por caixa;
2. distribuir r bolas distintas em n caixas distintas com no máximo uma bola por caixa;
3. distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas com no máximo uma bola por caixa;
4. distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas com qualquer número de bolas por caixa.

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Uma permutação qualquer das letras de uma dada palavra é chamada de *anagrama* dessa palavra, mesmo que esta permutação não tenha sentido. Por exemplo, “lodo” é um anagrama de “dolo”, bem como “odol” e “dool”.

Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra “ana”?

Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra “ana”?

ana ana aan aan naa naa

Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra “ana”?

ana ana aan aan naa naa

$$\frac{3!}{2} = 3 \text{ anagramas}$$

Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra “*dado*”?

Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra “*dado*”?

(a, d_1, d_2, o)	(o, d_1, d_2, a)	(d_1, d_2, a, o)	(d_1, a, d_2, o)
(a, d_2, d_1, o)	(o, d_2, d_1, a)	(d_2, d_1, a, o)	(d_2, a, d_1, o)
(a, d_1, o, d_2)	(o, a, d_1, d_2)	(d_1, a, o, d_2)	(d_1, d_2, o, a)
(a, d_2, o, d_1)	(o, a, d_2, d_1)	(d_2, a, o, d_1)	(d_2, d_1, o, a)
(a, o, d_1, d_2)	(o, d_1, a, d_2)	(d_1, o, a, d_2)	(d_1, o, d_2, a)
(a, o, d_2, d_1)	(o, d_2, a, d_1)	(d_2, o, a, d_1)	(d_2, o, d_1, a)

Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra “*dado*”?

(a, d_1, d_2, o)	(o, d_1, d_2, a)	(d_1, d_2, a, o)	(d_1, a, d_2, o)
(a, d_2, d_1, o)	(o, d_2, d_1, a)	(d_2, d_1, a, o)	(d_2, a, d_1, o)
(a, d_1, o, d_2)	(o, a, d_1, d_2)	(d_1, a, o, d_2)	(d_1, d_2, o, a)
(a, d_2, o, d_1)	(o, a, d_2, d_1)	(d_2, a, o, d_1)	(d_2, d_1, o, a)
(a, o, d_1, d_2)	(o, d_1, a, d_2)	(d_1, o, a, d_2)	(d_1, o, d_2, a)
(a, o, d_2, d_1)	(o, d_2, a, d_1)	(d_2, o, a, d_1)	(d_2, o, d_1, a)

$$\frac{4!}{2} = 12 \text{ anagramas}$$

Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra “*banana*”?

Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra “*banana*”?

bana ^{green} na ^{blue}	bana ^{green} na ^{blue}	ba ^{blue} na ^{green} na	ba ^{blue} na ^{green} na	ba ^{blue} na ^{green} na	ba ^{blue} na ^{green} na
ba ^{green} na ^{blue} na	ba ^{green} na ^{blue} na	ba ^{blue} na ^{green} na	ba ^{blue} na ^{green} na	ba ^{blue} na ^{green} na	ba ^{blue} na ^{green} na

$12 = 3! \cdot 2!$ permutações correspondem ao mesmo anagrama.

Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra “*banana*”?

bana ^g na	bana ^g na	ba ⁿ ana ^g	ba ⁿ ana ^g	ba ⁿ ana ^g	ba ⁿ ana ^g
ba ⁿ ana ^g	ba ⁿ ana ^g	ba ⁿ ana ^g	ba ⁿ ana ^g	ba ⁿ ana ^g	ba ⁿ ana ^g

$12 = 3! \cdot 2!$ permutações correspondem ao mesmo anagrama.

São $5! = 120$ permutações que começam com b e que correspondem a 10 anagramas:

banana	banana	banana	banana	banana	banana
banana	banana	banana	banana	banana	banana
banaan	banaan	banaan	banaan	banaan	banaan
banaan	banaan	banaan	banaan	banaan	banaan
baanna	baanna	baanna	baanna	baanna	baanna
baanna	baanna	baanna	baanna	baanna	baanna
baanan	baanan	baanan	baanan	baanan	baanan
baanan	baanan	baanan	baanan	baanan	baanan
bannaa	bannaa	bannaa	bannaa	bannaa	bannaa
bannaa	bannaa	bannaa	bannaa	bannaa	bannaa
bnaana	bnaana	bnaana	bnaana	bnaana	bnaana
bnaana	bnaana	bnaana	bnaana	bnaana	bnaana
bnaaa	bnaaa	bnaaa	bnaaa	bnaaa	bnaaa
bnaaa	bnaaa	bnaaa	bnaaa	bnaaa	bnaaa
bnanaa	bnanaa	bnanaa	bnanaa	bnanaa	bnanaa
bnanaa	bnanaa	bnanaa	bnanaa	bnanaa	bnanaa
bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa
bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa
baaann	baaann	baaann	baaann	baaann	baaann
baaann	baaann	baaann	baaann	baaann	baaann

De quantos modos podemos arranjar n objetos de r tipos diferentes e o objeto do tipo i ocorre k_i vezes para todo $i \in [r]$, sendo que $k_1 + \cdots + k_r = n$?

De quantos modos podemos arranjar n objetos de r tipos diferentes e o objeto do tipo i ocorre k_i vezes para todo $i \in [r]$, sendo que $k_1 + \cdots + k_r = n$?

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!}$$

MÃOS DE *BRIDGE*

Exemplo: Numa mão de Bridge as 52 cartas de um baralho embaralhado são divididas igualmente entre 4 jogadores. O número de modos distintos com que isso é feito é

MÃOS DE *BRIDGE*

Exemplo: Numa mão de Bridge as 52 cartas de um baralho embaralhado são divididas igualmente entre 4 jogadores. O número de modos distintos com que isso é feito é

$$\binom{52}{13, 13, 13, 13} =$$

MÃOS DE *BRIDGE*

Exemplo: Numa mão de Bridge as 52 cartas de um baralho embaralhado são divididas igualmente entre 4 jogadores. O número de modos distintos com que isso é feito é

$$\binom{52}{13, 13, 13, 13} =$$

53.644.737.765.488.792.839.237.440.000

MÃOS DE *BRIDGE*

Exemplo: A quantidade de mãos de Bridge em que cada jogador tem uma carta A é

MÃOS DE *BRIDGE*

Exemplo: A quantidade de mãos de Bridge em que cada jogador tem uma carta *A* é

$$4! \binom{48}{12, 12, 12, 12} =$$

MÃOS DE *BRIDGE*

Exemplo: A quantidade de mãos de Bridge em que cada jogador tem uma carta *A* é

$$4! \binom{48}{12, 12, 12, 12} =$$

$$5.659.423.235.091.422.706.737.318.400$$

EXERCÍCIO

Com que probabilidade cada jogador recebe um A ?

EXERCÍCIO

Com que probabilidade cada jogador recebe um A?

$$\frac{4! \frac{48!}{12!12!12!12!}}{\frac{58!}{13!13!13!13!}} = \frac{4!48!13^4}{52!} = \frac{219}{20825} \approx 0.1$$

PERMUTAÇÃO CIRCULAR

De quantos modos 5 crianças, denominadas a, b, c, d, e podem ser arrumadas numa mesa para um jogo que segue em sentido horário?

PERMUTAÇÃO CIRCULAR

O número de permutações circulares de $n \geq 1$ objetos distintos é igual a

$$\frac{n!}{n}$$

Quantas funções de $[r]$ em $[n]$?

Quantas funções injetivas de $[r]$ em $[n]$?

Quantas funções sobretivas de $[r]$ em $[n]$?

A, B conjuntos com cardinalidades r e n .

A quantidade de funções $f: A \rightarrow B$ é n^r .

A quantidade de funções injetivas é $(n)_r$.

Quantas são as funções sobrejetivas $f: A \rightarrow B$?
($r \geq n \geq 1$).

PRINCÍPIO INCLUSÃO-EXCLUSÃO

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|$$

Lado direito:

Soma individual: $\sum_{i=1}^n |A_i|$

Pares: $- \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$

Trios: $+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$

$\vdots$

Todos conjuntos: $(-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|$

DESCRIÇÃO MAIS COMPACTA

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\substack{I: \\ I \subseteq \{1, \dots, n\}}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

PASSO INDUTIVO

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup \dots \cup A_k) \cup A_{k+1}| &= \\ |A_1 \cup \dots \cup A_k| + |A_{k+1}| - |(A_1 \cup \dots \cup A_k) \cap A_{k+1}| &= \\ |A_1 \cup \dots \cup A_k| + |A_{k+1}| - \\ |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \dots \cup (A_k \cap A_{k+1})| \end{aligned}$$

agora aplica hipótese indutiva nas uniões de k conjuntos.

FUNÇÕES SOBREJETORAS

$$f: A \rightarrow B, \quad |A| = m \text{ e } |B| = n$$

$$B = \{ b_1, b_2, \dots, b_n \}.$$

$$A_i := \{ f: A \rightarrow B \mid b_i \notin \text{Im}(f) \}$$

O conjunto da funções sobrejetivas é

$$S = B^A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Usando inclusão-exclusão

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{ f : A \rightarrow B \mid b_i \notin \text{Im}(f) \ \forall i \in I \}$$

$$\text{para } I \neq \emptyset, \quad \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = (n - |I|)^m$$

portanto

$$\begin{aligned}|S| &= n^m - \sum_{\substack{I: \\ \emptyset \neq I \subseteq [n]}} (-1)^{|I|+1} (n - |I|)^m \\&= n^m - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n-i)^m \\&= n^m + \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m \\&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m\end{aligned}$$