Lista 3 - Indução e Boa Ordem

Nesta lista as demonstrações devem estar corretas e bem redigidas. Entenda exatamente o que deve ser provado. Declare variáveis e hipóteses. Justifique cada passo importante. Escreva frases completas, *uma demonstração é um texto, não uma lista de equações*. Explicite a estratégia. Introduza corretamente novos objetos. Use resultados anteriores explicitamente. Mantenha a lógica em uma única direção. Indique claramente quando a tese foi obtida. Encerre a demonstração. Recomento a leitura da seção 2.2.6 das notas de aula.

---

1. Considere o predicado sobre os números naturais $P(n)$: " se $n > 1$ então $n^2 > n$". Demonstre $P(0)$. Em que método de prova se encaixa sua demonstração?

---

2. Prove usando indução que todo número natural não-nulo pode ser expresso como soma de potências inteiras e não negativas distintas de 2 (i.e., $n = x_0 2^0 + x_1 2^1 + \cdots + x_k 2^k$, para algum $k \in \mathbb{N},$ com $x_i \in \{0, 1\}$ para todo $i = 0, 1, \ldots, k$).

---

3. Demonstre usando indução (PIFc):

   Princípio da Indução Finita Completa e Generalizada(PIFcg) Sejam $P(z)$ um predicado sobre os inteiros e $z_0 \in \mathbb{Z}$.
   Suponha que:

   1. $P(z_0)$ é verdadeiro;
   2. para todo inteiro $z \geq z_0$, se

   $$P(z_0),\ P(z_0+1),\ \ldots,\ P(z)$$

   são verdadeiros, então $P(z+1)$ também é verdadeiro.

   Então $P(z)$ é verdadeiro para todo inteiro $z \geq z_0$.

---

4. Qual é o erro na seguinte dedução por indução para a sentença: *para qualquer conjunto de n retas no plano, se não há quaisquer duas delas paralelas (ou coincidentes), então todas se encontram num ponto.*

Vamos denotar por $P(n)$ a sentença acima.

Para $n = 1$ e para $n = 2$ a sentença $P(n)$ é, claramente, verdadeira.

Seja $k \geq 2$ um inteiro arbitrário e assuma que $P(k)$ é verdadeiro. Considere um conjunto qualquer de $k+1$ retas no plano, dadas por $r_1, r_2, \ldots, r_{k+1}$, em que quaisquer duas não são paralelas.

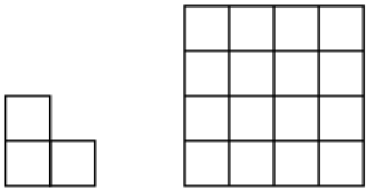
Pela hipótese da indução, $P(k)$ vale, logo as k retas $r_1, r_2, \ldots, r_k$ se encontram em um ponto p. Também por $P(k)$, $r_2, r_3, \ldots, r_{k+1}$ se encontram em um ponto q.

Como as retas r_2 e r_3 estão nos dois conjuntos de k retas, obtemos que $p = q$, portanto, $r_1, r_2, \ldots, r_{k+1}$ se encontram em um ponto. Pelo PIF, $P(n)$ vale para todo $n \geq 1$.$\square$

---

5. Para todo natural $n \geq 1$, mostre que uma grade de quadrados $2^n \times 2^n$ (conforme figura (b) abaixo)

com qualquer um de seus quadrados removidos pode ser coberta por ladrilhos de tamanho fixo em forma de L (conforme figura (a) abaixo).



(a) (b)

---

6. Demonstre usando indução a seguinte afirmação para os números de Fibonacci: F_{5n} é divisível por 5.

---

7. Dois jogadores se alternam nas jogadas em que retiram 1, 2 ou 3 palitos de um monte com n palitos. O jogador que remove o último palito perde. Prove, para todo $n \geq 1$, que o primeiro jogador a jogar tem uma estratégia vencedora se, e só se, n dividido por 4 deixa resto diferente de 1.

---

8. Uma função $f : \mathbb{N} \to A$ (ou, equivalentemente, uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A), pode ser definida recursivamente em duas etapas:

1. (na *base*) especificamos o valor da função f em $0, \ldots, k$;
2. (no *passo*) fornecemos uma regra para encontrar o valor de $f(n+1)$ em função dos valores nos inteiros menores, $f(n), f(n-1), \ldots, f(n-k)$.

Por exemplo, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ para $n \geq 2$. Essa é a **definição recursiva** da sequência de Fibonacci. Use indução para provar que $f(n) = F_n$ dado por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

---

9. Suponha que um casal de urubus começa a dar crias com dois anos de idade, e produz 6 crias (três casais) de urubuzinhos a cada ano. Suponha que um lixão começou a ser frequentado por 1 casal recém-nascido e que nenhum urubu é acrescentado ou eliminado do lixão. Escreva uma definição recursiva para o número de urubus no ano n, para todo $n \geq 0$.