Lista 4 - Conjuntos e Relações

Nesta lista as demonstrações devem estar corretas e bem redigidas. Entenda exatamente o que deve ser provado. Declare variáveis e hipóteses. Justifique cada passo importante. Escreva frases completas, *uma demonstração é um texto, não uma lista de equações*. Explicite a estratégia. Introduza corretamente novos objetos. Use resultados anteriores explicitamente. Mantenha a lógica em uma única direção. Indique claramente quando a tese foi obtida. Encerre a demonstração. Recomento a leitura da seção 2.2.6 das notas de aula.

---

0. Quem é o conjunto das partes de $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$?

---

1. Seja A um conjunto tal que

$$\begin{cases} 0 \in A, \\ \text{para todo } k \in \mathbb{N},\ k \in A \rightarrow k+5 \in A \end{cases}$$

e seja $B = \{5k \colon k \in \mathbb{N}\}$, o conjunto dos múltiplos de 5.
É possível provar que $B \subseteq A$?
É possível provar que $A \subseteq B$?
Em cada caso, justifique sua resposta.

---

2. Demonstre que a composta de funções bijetivas é bijetiva.

---

3. Prove que uma relação R sobre A é transitiva se, e somente se, $R \circ R \subseteq R$.

---

4. Nas aulas usamos os conjuntos da partes $2^{A \cup B}$ para definir par ordenado. Vale $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$? E $2^{A \times B} = 2^A \times 2^B$?

---

5. Se $f \subset X \times Y$ é uma função e $B \subset Y$ então definimos $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$. Demonstre, para $A, B \subseteq Y,$ que valem as igualdades de conjuntos:
$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

---

6. Demonstre que se $B \subseteq A$ e A é finito, então B é finito.

---

7. Demonstre o **Princípio da Casa dos Pombos** (PCB) (ou, **Princípio das Gavetas**):
Se m e n são números naturais tais que $m > n > 0$, então não existe

$$f \colon \{0, \dots, m-1\} \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$$

injetiva.

---

8. Demonstre que se S é infinito (i.e., S não é vazio e não existe bijeção $f\colon \{0, \ldots, n-1\} \to S$ para nenhum $n \in \mathbb{N}$) e $\{s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\} \subset S$ então $S \setminus \{s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\}$ é não vazio.

---

9. Seja S um conjunto infinito. Demonstre que existe uma função injetora $g : \mathbb{N} \to S$. (*Dica*: Construa g por recursão, definindo $s_n = g(n)$ em cada passo. Aqui usa Axioma da Escolha)

---

10. Use os exercícios 6–9 e demonstre que:

    S é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $f\colon S \to A$ para algum $A \subsetneqq S$.
