Lista 5 - Relação de equivalência

Nesta lista as demonstrações devem estar corretas e bem redigidas. Entenda exatamente o que deve ser provado. Declare variáveis e hipóteses. Justifique cada passo importante. Escreva frases completas, *uma demonstração é um texto, não uma lista de equações*. Explicite a estratégia. Introduza corretamente novos objetos. Use resultados anteriores explicitamente. Mantenha a lógica em uma única direção. Indique claramente quando a tese foi obtida. Encerre a demonstração. Recomento a leitura da seção 2.2.6 das notas de aula.

---

1. Defina a relação de congruência módulo n nos inteiros e demonstre que a relação é de equivalência.

---

2. Seja A um conjunto. Demonstre que uma relação $R \subseteq A \times A$ é simétrica se, e somente se, $R = R^{-1}$.

---

3. Seja A um conjunto. Demonstre que $R \subseteq A \times A$ é uma relação reflexiva se e somente se $\Delta_A \subseteq A$.

---

4. Seja A um conjunto. $\emptyset$ é uma relação sobre A? Se for uma relação, responda:
   É reflexiva? É irreflexiva ? É simétrica? É antissimétrica? É transitiva?

---

5. Explique o que está errado na seguinte suposta demonstração. Considere uma relação R sobre A:
   Teorema *Se R é uma relação simétrica e transitiva então R é uma relação reflexiva.*
   Prova Seja x um elemento de A. Para todo y, se $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ então $y \mathrel{\mathrm{R}} x$, pois a relação é simétrica. Se $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ e $y \mathrel{\mathrm{R}} x$, então $x \mathrel{\mathrm{R}} x$ pela transitividade. Portanto, R é reflexiva. □

---

6. Seja A um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência sobre A. Prove que a função π: $A \to A/{\sim}$ dada por $\pi(a) = [a]_\sim$, chamada **projeção canônica**, é sobrejetiva

---

7. Sejam f: $A \to B$ uma função sobrejetiva e $\sim$ a relação de equivalência definida por: para todos $x, y \in A$, $x \sim y$ se e somente se $f(x) = f(y)$. Demonstre que existe uma única bijeção g: $A/{\sim} \to B$ tal que $f = g \circ \pi$, onde π é a projeção canônica.