

Lista 6 - Contagem

Nesta lista as demonstrações devem estar corretas e bem redigidas. Entenda exatamente o que deve ser provado. Declare variáveis e hipóteses. Justifique cada passo importante. Escreva frases completas, *uma demonstração é um texto, não uma lista de equações*. Explicita a estratégia. Introduza corretamente novos objetos. Use resultados anteriores explicitamente. Mantenha a lógica em uma única direção. Indique claramente quando a tese foi obtida. Encerre a demonstração. Recomendo a leitura da seção 2.2.6 das [notas de aula](#).

1. Mostre que a função $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ por

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } p = 0 \\ 2^p 3^q, & \text{se } p > 0 \\ 5^{-p} 3^q, & \text{se } p < 0 \end{cases}$$

onde $\frac{p}{q}$ está escrita na forma reduzida com $q > 0$, é injetiva.

2. Seja A um conjunto de cardinalidade n e $f: [n] \rightarrow A$ uma enumeração de A . Para cada subconjunto $B \subseteq A$, defina $b_i \in \{0, 1\}$ para todo $i \in [n]$, por $b_i = 1$ se, e só se, $f(i) \in B$. Verifique que a função

$$\begin{aligned} \mathbf{b} : 2^A &\rightarrow \{0, 1\}^n \\ B &\mapsto (b_0, b_2, \dots, b_{n-1}) \end{aligned}$$

é bijetiva. Use o resultado obtido para provar que $|2^A| = 2^n$.

3. Seja $A \subset \mathcal{U}$ tal que $|2^A| = n$. Determine $|2^B|$ se

1. $B = A \cup \{x\}$ para algum $x \in \mathcal{U} \setminus A$;
 2. $B = A \cup \{x, y\}$ para alguns $x, y \in \mathcal{U} \setminus A$, $x \neq y$;
 3. $B = A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ para $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathcal{U} \setminus A$ distintos.
-

4. Demonstre, usando indução em $n \in \mathbb{N}$, que $|2^{[n]}| = 2^n$.

5. Defina

$$\prod_{i=1}^{\infty} \{0, 1\} = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) : a_i \in \{0, 1\} \ \forall i \geq 1\}.$$

Demonstre que esse conjunto não é enumerável. (Dica: Use o argumento da diagonal de Cantor.)

6. Chico e sua esposa foram a uma festa com três outros casais. No encontro deles houve vários apertos de mão. Ninguém apertou a própria mão ou a mão da(o) esposa(o), e ninguém apertou a mão da mesma pessoa mais que uma vez. Após os cumprimentos, Chico perguntou para todos, inclusive para a esposa, quantas mãos cada um apertou e recebeu de cada pessoa uma resposta diferente. Quantas mãos Chico apertou?

7. Demonstre: A é infinito se, e somente se, existe $f: [n] \rightarrow A$ injetiva para todo $n \in \mathbb{N}$.
