

PRÓXIMOS PASSOS

- 1** As leis da Teoria ZFC
- 2** Os Naturais, segundo von Neumann
- 3** Produto cartesiano
- 4** Relações e funções

DISCLAIMER

**A teoria (ZFC) é ferramenta, não objeto de estudo.
(explicado em aula o objetivo)**

Extensionalidade:

Quaisquer dois conjuntos com os mesmos elementos são iguais.

Vazio:

Existe um conjunto que não tem elementos.

Por extensionalidade, o vazio é único.

AXIOMAS ZFC

Par (não ordenado):

Dados conjuntos y e z existe o conjunto formado somente por tais elementos $\{y, z\}$

Portanto $\{y, z\} = \{z, y\}$

Separação:

De um conjunto B e um predicado P , formamos o conjunto $\{x \in B : P(x)\}$.

AXIOMAS DE ZFC

União:

Para qualquer conjunto A existe o conjunto $\bigcup A$ formado pela união dos elementos de A .

Dados B e C , pelo axioma do Par temos $\{B, C\}$ e do princípio da União $\bigcup\{B, C\}$

$$B \cup C = \bigcup\{B, C\}$$

AXIOMAS DE ZFC

União:

Para qualquer conjunto A existe o conjunto $\bigcup A$ formado pela união dos elementos de A .

Dados B e C , pelo axioma do Par temos $\{B, C\}$ e do princípio da União $\bigcup\{B, C\}$

$$B \cup C = \bigcup\{B, C\}$$

Se A é não vazio então

$$\bigcap A =$$

AXIOMAS DE ZFC

União:

Para qualquer conjunto A existe o conjunto $\bigcup A$ formado pela união dos elementos de A .

Dados B e C , pelo axioma do Par temos $\{B, C\}$ e do princípio da União $\bigcup\{B, C\}$

$$B \cup C = \bigcup\{B, C\}$$

Se A é não vazio então

$$\bigcap A = \left\{ y \in \bigcup A : \forall B \in A, y \in B \right\}.$$

O conjunto das partes:

*Para qualquer conjunto A ,
existe o conjunto $\wp(A)$ tal que
 $x \in \wp(A)$ se, e só se, $x \subseteq A$.*

Também usa-se a notação 2^A .

Infinitude:

*Existe conjunto **indutivo**: um conjunto I tal que*

1. $\emptyset \in I$ e,

2. se $x \in I$ é elemento, então $x \cup \{x\} \in I$.

OS NÚMEROS NATURAIS

Proposição.

A interseção de conjuntos indutivos é um conjunto indutivo.

Corolário (ω é o “menor” indutivo)

Existe ω indutivo tal que para todo conjunto indutivo A

$$\omega \subseteq A.$$

IDEIA DA DEMONSTRAÇÃO DO COROL.

I é o conjunto indutivo dado pelo axioma

$\omega_I := \bigcap \{ C \subseteq I : C \text{ é indutivo} \}$ é indutivo

$\omega_I \subseteq C$ ($\forall C \subseteq I$ indutivo.)

Se J for qualquer outro indutivo

$\omega_J := \bigcap \{ C \subseteq J : C \text{ é indutivo} \}$ é indutivo

$\omega_J \subseteq C$ ($\forall C \subseteq J$ indutivo.)

$\omega_I = \omega_J$:

IDEIA DA DEMONSTRAÇÃO DO COROL.

$\omega_I \subseteq I \cap J \subseteq I$ pois $I \cap J$ ind., logo $\omega_I \subseteq J$

$\omega_I \subseteq J$ indutivo implica $\omega_J \subseteq \omega_I$

$\omega_J \subseteq I \cap J \subseteq J$ pois $I \cap J$ ind., logo $\omega_J \subseteq I$

$\omega_J \subseteq I$ indutivo implica $\omega_I \subseteq \omega_J$

Portanto

$$\omega_J = \omega_I$$

Ou seja, $\exists!$ ω indutivo, contido em todo indutivo.

OS NÚMEROS NATURAIS

Um número natural é, por definição, um elemento de ω . Equivalentemente, um número natural é um conjunto que pertence a todo conjunto indutivo.

OS NÚMEROS NATURAIS

o conjunto $x^+ := x \cup \{x\}$ é o sucessor de x .

$$0 := \emptyset,$$

$$1 := \{\emptyset\} = \{0\},$$

$$2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\},$$

$$3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$$

⋮

$$n + 1 := n^+ = n \cup \{n\} = \{0, 1, \dots, n\}$$

Se $A \subseteq \omega$ é tal que

1. $0 \in A$
2. **para todo n , se $n \in A$ então $n^+ \in A$**

Então A é indutivo

Logo $A = \omega$.

AXIOMAS “+ SOFISTICADOS” DE ZFC

Regularidade Cada conjunto não vazio a tem um elemento b com $a \cap b = \emptyset$.

Substituição Para toda função F e todo conjunto X , é conjunto

$$\{ F(A) : A \in X \}.$$

Escolha Para qualquer conjunto A com elementos não-vazios, existe uma função f que atribui para cada $x \in A$ um $f(x) \in x$ (**uma escolha em x**).

**Par ordenado
e
Produto cartesiano**

PAR ORDENADO

Definição: $(a, b) := \{ \{ a \}, \{ a, b \} \}$.

Exercício: Verifique que a definição acima satisfaz a propriedade fundamental de par ordenado

se $(a, b) = (x, y)$ então $a = x$ e $b = y$.

Conclua que se $a \neq b$ então $(a, b) \neq (b, a)$.

PRODUTO CARTESIANO

A e B são conjuntos.

$A \times B$ denota o conjunto formado por todos os pares (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.

$$A \times B = \left\{ (x, y) \in \boxed{?} : x \in A \text{ e } y \in B \right\}$$

PRODUTO CARTESIANO

A e B são conjuntos.

$A \times B$ denota o conjunto formado por todos os pares (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.

$$A \times B = \left\{ (x, y) \in \boxed{?} : x \in A \text{ e } y \in B \right\}$$

Separando

$$A \times B = \left\{ (x, y) \in \wp(\wp(A \cup B)) : x \in A \text{ e } y \in B \right\}$$

RELAÇÕES

Se A e B são conjuntos, uma **relação** R com **domínio** A e **contradomínio** B é um subconjunto

$$R \subseteq A \times B.$$

Se $A = B$ escrevemos A^2 para $A \times B$ e dizemos que $R \subseteq A^2$ é uma relação *sobre* A , ou *em* A .

EXEMPLOS DE RELAÇÕES SOBRE $A = \{1, 2, 3, 4\}$

1. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$
2. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$
3. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
4. $\{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$
5. $\{(3, 4)\}$
6. $\{(a, b) \in A^2 : \exists n \in \mathbb{N}, a + n = b\}$

EXEMPLOS DE RELAÇÕES SOBRE $A = \{1, 2, 3, 4\}$

1. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$
2. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$
3. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
4. $\{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$
5. $\{(3, 4)\}$
6. $\{(a, b) \in A^2 : \exists n \in \mathbb{N}, a + n = b\}$ é o “ \leq ”

EXEMPLOS

A relação sobre $A \times A$ (A não vazio qualquer)

$$\text{id}_A := \{ (a, a) : a \in A \}$$

é chamada de **identidade** ou **diagonal**.

Uma relação $R \subseteq A \times B$ é **função** se, e só se,

para cada $x \in A$
existe um único $y \in B$
tal que $(x, y) \in R$.

Uma relação $R \subseteq A \times B$ é **função** se, e só se,

para cada $x \in A$
existe um **único** $y \in B$
tal que $(x, y) \in R$.

Como y é **único** ganha um nome: **imagem** de x
por R , denotado $R(x)$.

FUNÇÕES

Escrevemos $R: A \rightarrow B$ para a relação que é função.

Escrevemos B^A para o conjunto de todas as funções de A em B .

COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES

$R \subset A \times B$ e $S \subset B \times C$ relações.

A **relação composta**

$$S \circ R \subset A \times C$$

é dada por:

$$(x, z) \in S \circ R \text{ sse } \exists y \in B \text{ tal que} \\ (x, y) \in R \text{ e } (y, z) \in S.$$

COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES

Por exemplo, $A = B = C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e

$$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$$

$$S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

A composição $S \circ R$ é

COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES

Por exemplo, $A = B = C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e

$$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$$

$$S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

A composição $S \circ R$ é

$$S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$$

NOTAÇÃO

R relação

$(a, b) \in R$ escrevemos $a R b$

é mais comum usarmos símbolos como \sim , \equiv , \simeq , \approx , \prec , \preceq , \preccurlyeq em vez de R , S ou qualquer letra do alfabeto.

Propriedades das relações sobre um conjunto A não vazio

REFLEXIVIDADE

Uma relação \sim é **reflexiva** sse

para todo $a \in A$, $a \sim a$

Uma relação \sim é **irreflexiva** sse

para todo $a \in A$, $a \not\sim a$

REFLEXIVIDADE

1. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ **é reflexiva.**
2. $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ **é irreflexiva.**
3. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ **é nenhuma das duas.**

SIMETRIA

Uma relação \sim é **simétrica** sse

para todo $a \in A$, para todo $b \in A$, $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

Uma relação \sim é **antissimétrica** sse

para todos $a \in A$ e $b \in A$, $a \sim b$ e $b \sim a \Rightarrow a = b$

Uma relação \sim é **assimétrica** sse

para todo $a \in A$, para todo $b \in A$, $a \sim b \Rightarrow b \not\sim a$

1. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ sobre $\{1, 2\}$ é **simétrica**.
2. $\{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ é **antissimétrica**.
3. $\{(1, 2), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ é **assimétrica**.

TRANSITIVIDADE

Uma relação \sim é **transitiva** sse para todo $a \in A$,
para todo $b \in A$, para todo $c \in A$,

se $a \sim b$ e $b \sim c$ então $a \sim c$.

1. $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ é **irreflexiva, antissimétrica e transitiva.**
2. $\{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ é **reflexiva, antissimétrica e transitiva.**
3. $\{(3, 4)\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ é **irreflexiva, antissimétrica, assimétrica e transitiva.**

PROPRIEDADES DE FUNÇÕES

As principais propriedades de funções são

- 1. Injetividade**
- 2. Sobrejetividade**
- 3. Bijetividade**

FINITUDE

Um conjunto A é **finito** se é vazio ou, para algum $n \in \mathbb{N}$, existe

$$f: \{0, \dots, n-1\} \rightarrow A$$

bijetiva.

A é **infinito** se não for finito.

Teorema

\mathbb{N} é infinito.