# Propriedade Forte de Markov

**Teorema 1** (Propriedade Forte de Markov)**.** *Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S$, distribuição inicial $\lambda$ e matriz de transição $P$. Seja $T$ um tempo de parada para $(X_n)_{n\geq 0}$. Então, condicionado em $T < \infty$ e $X_T = i$, o processo $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov com estado inicial $i$ e matriz de transição $P$. Além disso, $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ é independente de $(X_0, X_1, \ldots, X_T)$.*

Sejam $A$ um evento que depende apenas do futuro $(X_{T+1}, X_{T+2}, \ldots)$ e $B$ um evento que depende apenas do passado $(X_0, \ldots, X_T)$. Pela definição de probabilidade condicional, temos

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B \mid T < \infty, X_T = i)}{\mathbb{P}(B \mid T < \infty, X_T = i)} = \mathbb{P}(A \mid B, T < \infty, X_T = i).$$

A Propriedade ("fraca") de Markov em tempo fixo garante que, dado $X_T = i$, o futuro é independente do passado. Assim,

$$\mathbb{P}(A \mid B, T < \infty, X_T = i) = \mathbb{P}(A \mid T < \infty, X_T = i).$$

Por fim, a Propriedade Forte de Markov afirma que, condicionado em $X_T = i$, o futuro $(X_{T+1}, X_{T+2}, \ldots)$ tem a mesma lei que uma cadeia de Markov iniciada em $i$. Ou seja,

$$\mathbb{P}(A \mid T < \infty, X_T = i) = \mathbb{P}(A \mid X_0 = i).$$

Isso mostra que o futuro é independente do passado, e que o processo reinicia como uma nova cadeia de Markov em $i$.

O Teorema 1 diz que, se $T < \infty$, então, dado que $X_T = i$:

(i) $(X_{T+1}, \ldots, X_{T+n})$ é independente de $(X_0, \ldots, X_{T-1})$; e
(ii) tem a mesma distribuição que $(X_1, \ldots, X_n)$ sob $\mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = i)$.

*Demonstração.* Sejam $i, j_1, \ldots, j_n \in S$ e seja $B$ um evento determinado por $(X_0, \ldots, X_T)$. Nosso objetivo é mostrar que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{T+1} = j_1, \ldots, X_{T+n} = j_n,\ B \mid T < \infty, X_T = i)\\ &\quad = \mathbb{P}(X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n \mid X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(B \mid T < \infty, X_T = i).\end{aligned}$$

**1. Redução ao caso $T = m$.** Se $T = m$, o evento $B \cap [T = m]$ depende apenas de $(X_0, \ldots, X_m)$. No evento $[T = m]$ temos $X_T = X_m$, logo para cada $m$

$$\big[X_T = i, X_{T+1} = j_1, \ldots, X_{T+n} = j_n,\ B,\ T = m\big] \;=\; [X_m = i] \cap A_m \cap B \cap [T = m]$$

onde $A_m = [X_{m+1} = j_1, \ldots, X_{m+n} = j_n]$.

Como $B \cap [T = m]$ depende apenas do passado até $m$, a propriedade de Markov em $m$ implica em $\mathbb{P}(A_m \mid X_m = i, B, T = m) = \mathbb{P}(A_m \mid X_m = i)$, ou seja, a probabilidade do futuro partindo do estado $i$, logo pela definição de probabilidade condicional

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_m = i, A_m, B, T = m) &= \mathbb{P}(B, T = m, X_m = i) \cdot \mathbb{P}(A_m \mid X_m = i, B, T = m).\\ &= \mathbb{P}(B, T = m, X_m = i) \cdot \mathbb{P}(A_m \mid X_m = i).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_T = i, \ldots, X_{T+n} = j_n, B, T = m) &= \mathbb{P}(X_m = i, A_m, B, T = m)\\ = \mathbb{P}(B, T = m, X_m = i) \cdot &\underbrace{\mathbb{P}(X_m = i, \ldots, X_{m+n} = j_n \mid X_m = i)}_{=\mathbb{P}(X_0 = i, \ldots, X_n = j_n \mid X_0 = i)}.\end{aligned} \tag{1}$$

**2. Soma sobre os valores possíveis de $T$.** Os eventos $[T = m]$, para $m = 0, 1, 2, \ldots$, são disjuntos e cobrem $[T < \infty]$. Logo,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_T = i, \ldots, X_{T+n} = j_n, B, T < \infty)\\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_T = i, \ldots, X_{T+n} = j_n, B, T = m).\end{aligned}$$

Substituindo no resultado acima

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_T = i, \ldots, X_{T+n} = j_n, B, T < \infty)\\ &= \mathbb{P}(X_0 = i, \ldots, X_n = j_n \mid X_0 = i) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(B, T = m, X_m = i)\\ &= \mathbb{P}(X_0 = i, \ldots, X_n = j_n \mid X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(B, T < \infty, X_T = i).\end{aligned}$$

**3. Condicionamento final.** Dividindo por $\mathbb{P}(T < \infty, X_T = i)$ concluímos:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_T = i, \ldots, X_{T+n} = j_n, B \mid T < \infty, X_T = i)\\ &\quad = \mathbb{P}(X_0 = i, \ldots, X_n = j_n \mid X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(B \mid T < \infty, X_T = i).\end{aligned}$$

Isto prova que, condicionado em $T < \infty$ e $X_T = i$, o futuro $(X_{T+n})_{n \geq 0}$ tem a mesma lei que uma cadeia de Markov iniciada em $i$ e é independente do passado $(X_0, \ldots, X_T)$. $\square$