Exercícios de Cadeias de Markov

---

1. Uma urna contém duas bolas, duas bolas pretas. Em cada passo uma bola é escolhida ao acaso e trocada por outra bola que é da mesma cor com probabilidade $0{,}8$ de de outra cor com probabilidade $0{,}2$. Só há bolas pretas e brancas. Com que probabilidade a quinta bola escolhida é preta? Você deve usar cadeia de Markov para formular e resolver o problema.

$X_n \in \{0, 1, 2\}$ o número de bolas pretas após n trocas; $X_0 = 2$.

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \qquad \lambda = [0 \quad 0 \quad 1]$$

$\mathbb{P}(\textbf{quinta bola preta}) = \sum_{i=0}^{2} P(X_4 = i) \times \frac{i}{2} = \sum_{i=0}^{2} (\lambda^{(0)} P^4)_i \times \frac{i}{2}$.

---

2. Uma loja de eletrônicos vende um videogame e adota uma política de controle de estoque do tipo (s, S). Essa política funciona da seguinte forma: se, ao final de um dia, o estoque disponível é menor ou igual a s, a loja realiza um pedido para que o estoque no início do dia seguinte seja reposto para S unidades.

Seja X_n o número de unidades em estoque ao final do dia n, e D_{n+1} a demanda no dia $n + 1$.
O estoque evolui segundo a regra:

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - D_{n+1})^+, & \text{se } X_n > s, \\ (S - D_{n+1})^+, & \text{se } X_n \leq s, \end{cases}$$

onde $x^+ = \max\{x, 0\}$.

Suponha que a loja adote a política $(s, S) = (1, 5)$, isto é, sempre que o estoque ao final do dia for 0 ou 1, ele é reposto para 5 no início do dia seguinte. A demanda diária D_{n+1} é uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidades:

$$\mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = 0.3, \quad \mathbb{P}(D_{n+1} = 1) = 0.4, \quad \mathbb{P}(D_{n+1} = 2) = 0.2, \quad \mathbb{P}(D_{n+1} = 3) = 0.1.$$

(2.1) Modele o processo $(X_n)_{n \geq 0}$ como uma cadeia de Markov, identificando o espaço de estados.
(2.2) Construa a matriz de transição P correspondente.
(2.3) Interprete o significado das transições: por exemplo, explique o que acontece quando $X_n = 2$ e a demanda é $D_{n+1} = 3$.
(2.4) Assuma que o precesso tenha uma distribuição estacionária π=[0.09 0.15 0.23 0.21 0.20 0.12]. Calcule, no longo prazo, a esperança do estoque ao final do dia.
(2.5) Suponha que a loja tenha um lucro de R$12 por unidade vendida, mas um custo de R$2 por dia por unidade em estoque. Qual o lucro médio de longo prazo por dia dessa política de estoque?

Espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Quando $X_n \leq 1$ (política $s = 1$), o estoque é reposto para $S = 5$ no início do próximo dia. A demanda máxima é 3 unidades. Partindo de 5 unidades, o menor valor possível ao final do dia é $(5-3)^+ = 2$. Partindo de estados maiores que s, o estoque pode chegar a 0.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix}$$

- (X_n = 2) e $D_{n+1} = 3$: no início do dia $n+1$, como $X_n = 2 > s = 1$, não há reposição. O estoque permanece em 2 unidades. Durante o dia $n+1$: a demanda é $D_{n+1} = 3$ unidades. Como há apenas 2 unidades em estoque e a demanda é 3, a loja vende apenas as 2 unidades disponíveis. Há demanda insatisfeita de 1 unidade. Final do dia $n+1$:

$$X_{n+1} = (2-3)^+ = \max\{-1, 0\} = 0$$

Como $X_{n+1} = 0 \leq s = 1$, haverá reposição para $S = 5$ no início do dia seguinte.

- A operação $(x)^+ = \max\{x, 0\}$ garante que o estoque nunca seja negativo.
- Demandas que excedem o estoque disponível resultam em vendas perdidas.
- Os estados 0 e 1 são estados de reposição, que sempre levam a um estoque inicial de 5 unidades.

Dada a distribuição estacionária $\pi = [0.09, 0.15, 0.23, 0.21, 0.20, 0.12]$, calculamos:

$$E[X] = \sum_{i=0}^{5} i \cdot \pi_i = 2,64$$

$$\text{Lucro médio} = 12 \times E[V] - 2 \times E[X]$$

Vendas médias de longo prazo: $E[V] = \sum_{i=0}^{5} \pi_i \cdot V_i$

Vendas esperadas partindo do estado i: $V_i = \mathbb{E}[\min\{estoque\ inicial, D\}]$.

$$E[V] = 1,077 \text{ unidades}$$

---

3. Verifique que a condição de Markov é equivalente a (1) e (2) abaixo:
(1) $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_{n_1} = i_{n_1}, X_{n_2} = i_{n_2}, \ldots, X_{n_k} = i_{n_k}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_{n_k} = i_{n_k})$ para $n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leq n$.
(2) $\mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_m = i_m) = \mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = i_m)$ para $n, m \geq 0$.

Forma padrão $\Longrightarrow$ Forma geral (1)

Passado conhecido $C = [X_{n_1} = i_{n_1}, \ldots, X_{n_k} = i_{n_k}]$

Passado desconhecido $D_{\mathbf{x}} = [X_{n_k+1} = x_{n_k+1}, \ldots, X_n = x_n]$, $\mathbf{x}$ representa uma trajetória específica.

Calculamos $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid C)$ usando a Lei da Probabilidade Total, somamos sobre todos os caminhos intermediários $D_{\mathbf{x}}$ possíveis, “preenchendo com os estados faltantes”

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid C)=\sum_{\mathbf{x}} \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid C, D_x)\cdot \mathbb{P}(D_x \mid C)$$

no lado direito, exibindo as variáveis e omitindo os valores

$$\sum_{x_{n_k+1},\dots,x_n} \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} \mid X_{n_1},\dots,X_{n_k},X_{n_k+1},\dots,X_n)}_{\text{Termo 1}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_{n_k+1},\dots,X_n \mid X_{n_1},\dots,X_{n_k})}_{\text{Termo 2}}$$

Simplificando o Termo 1

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_{n_1}=i_{n_1},\dots,X_{n_k}=i_{n_k},X_{n_k+1}=x_{n_k+1},\dots,X_n=x_n)$$

é a probabilidade do futuro (X_{n+1}) dado o passado e a informação mais recente é $X_n=x_n$.

Forma Padrão da Propriedade de Markov aplica-se e temos

$$\text{Termo 1}=\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=x_n)$$

Simplificando o Termo 2

$$\mathbb{P}(X_{n_k+1}=x_{n_k+1},\dots,X_n=x_n \mid X_{n_1}=i_{n_1},\dots,X_{n_k}=i_{n_k})$$

a probabilidade de um "caminho final" (de n_{k+1} até n) dado o "passado conhecido" (de n_1 até n_k com saltos). Podemos expandir a probabilidade desse caminho usando a [regra da cadeia]

$$\mathbb{P}(\text{Caminho} \mid C)=\mathbb{P}(X_n=x_n \mid C, X_{n-1}=x_{n-1})\cdot \mathbb{P}(X_{n-1}=x_{n-1} \mid C, X_{n-2}=x_{n-2})\cdot$$
$$\mathbb{P}(X_{n-2}=x_{n-2} \mid C, X_{n-3}=x_{n-3})\cdots \mathbb{P}(X_{n_k+1}=x_{n_k+1} \mid C)$$

Agora, aplicamos a *Condição Padrão de Markov* em cada passo dessa expansão

- $\mathbb{P}(X_n \mid C, X_{n-1})$ depende apenas de X_{n-1}, então vira $\mathbb{P}(X_n \mid X_{n-1})$
- ...
- $\mathbb{P}(X_{n_k+1} \mid C)$ depende apenas da informação mais recente em C, que é X_{n_k}, então vira $\mathbb{P}(X_{n_k+1} \mid X_{n_k})$

Portanto, o Termo 2 simplifica para

$$\text{Termo 2}=\mathbb{P}(X_{n_k+1}=x_{n_k+1},\dots,X_n=x_n \mid X_{n_k}=i_{n_k})$$

Substituímos os Termos 1 e 2 simplificados de volta na equação inicial

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid C)=\sum_{x_{n_k+1},\dots,x_n} \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=x_n)\cdot \mathbb{P}(X_{n_k+1}=x_{n_k+1},\dots,X_n=x_n \mid X_{n_k}=i_{n_k})$$

Essa soma não depende mais do "passado" C, exceto pelo seu ponto final X_{n_k} e é, por definição, a probabilidade de ir de $X_{n_k}=i_{n_k}$ para $X_{n+1}=j$, somando sobre todos os caminhos intermediários possíveis (Lei da Probabilidade Total), logo

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_{n_k}=i_{n_k})$$

Com isso, provamos que $\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_{n_1}=i_{n_1},\dots,X_{n_k}=i_{n_k})=\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_{n_k}=i_{n_k})$.

Forma geral (1) $\implies$ Forma padrão

A propriedade padrão é um caso particular da forma geral. Basta tomar $k=n+1$ e:

$$n_1=0,\ n_2=1,\dots,n_k=n$$

Então a forma geral nos dá:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n)$$

que é exatamente a forma padrão da propriedade de Markov.

Forma geral (2) $\Longrightarrow$ ***Forma padrão*** ...

Forma padrão $\Longrightarrow$ ***Forma geral (2)***

Por Indução. Queremos provar:

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid H_m) = \mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = i_m)$$

onde $H_m = [X_0 = i_0, \ldots, X_m = i_m]$.

Para $n = 1$ essa fórmula é exatamente a condição de Markov. Assuma como Hipótese de Indução (HI) que a afirmação é verdadeira para algum $n = k \geq 1$

$$\mathbb{P}(X_{m+k} = j' \mid H_m) = \mathbb{P}(X_{m+k} = j' \mid X_m = i_m)$$

para qualquer estado futuro j'. Queremos provar

$$\mathbb{P}(X_{m+k+1} = j \mid H_m) = \mathbb{P}(X_{m+k+1} = j \mid X_m = i_m)$$

Usando a Lei da Probabilidade Total no lado esquerdo

$$\mathbb{P}(X_{m+k+1} = j \mid H_m) = \sum_{j'} \mathbb{P}(X_{m+k+1} = j, X_{m+k} = j' \mid H_m)$$

Usando a definição de probabilidade condicional

$$\mathbb{P}(X_{m+k+1} = j \mid H_m) = \sum_{j'} \underbrace{\mathbb{P}(X_{m+k+1} = j \mid X_{m+k} = j', H_m)}_{\text{Termo A}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_{m+k} = j' \mid H_m)}_{\text{Termo B}}$$

Termo A: Pela forma padrão da condição de Markov , o próximo estado depende apenas do presente

$$\text{Termo A} = \mathbb{P}(X_{m+k+1} = j \mid X_{m+k} = j')$$

Termo B: Pela HI

$$\text{Termo B} = \mathbb{P}(X_{m+k} = j' \mid X_m = i_m)$$

logo

$$\mathbb{P}(X_{m+k+1} = j \mid H_m) = \sum_{j'} \mathbb{P}(X_{m+k+1} = j \mid X_{m+k} = j') \cdot \mathbb{P}(X_{m+k} = j' \mid X_m = i_m)$$

é a **Lei da Probabilidade Total**, condicionada apenas em $X_m = i_m$.

$$\mathbb{P}(X_{m+k+1} = j \mid H_m) = \mathbb{P}(X_{m+k+1} = j \mid X_m = i_m)$$

Por indução, ela vale para todo $n \geq 1$ (e trivialmente para $n = 0$).

---

4. No jogo das apostas da lista de revisão, suponha as jogadas CCC (cara-cara-cara) contra KCC (coroa-

cara-cara). Faça um modelo markoviano para esse jogo, isto é, descreva um conjunto de estados, as probabilidades de transição e distribuição inicial.

Precisamos rastrear o progresso em direção a cada sequência vencedora

- $S_\emptyset$ (Estado Inicial): nenhum progresso em direção a qualquer sequência
- S_C: Última jogada foi C (progresso para CCC)
- S_{CC}: Últimas duas jogadas foram CC (progresso para CCC)
- S_{KC}: Últimas duas jogadas foram KC (progresso para KCC)
- S_{CCC}: Sequência CCC completada (estado absorvente – jogador CCC vence)
- S_{KCC}: Sequência KCC completada (estado absorvente – jogador KCC vence)

Distribuição Inicial $\lambda = [1, 0, 0, 0, 0, 0]$

Probabilidades de Transição

	S_0	**S_C**	**S_CC**	**S_KC**	**S_CCC**	**S_KCC**
S_0	1/2	1/2	0	0	0	0
S_C	0	0	1/2	1/2	0	0
S_CC	0	0	0	0	1/2	1/2
S_KC	0	0	0	1/2	1/2	0
S_CCC	0	0	0	0	1	0
S_KCC	0	0	0	0	0	1

---

5. (Ruína) Um jogador participa de um jogo em que, a cada rodada, ganha ou perde 1 dinheiro conforme o resultado de uma aposta simples; o jogador ganha $1 com probabilidade p ou o jogador perde $1 com probabilidade $q = 1 - p$. O jogo termina se a fortuna do jogador atingir $0 (ruína) ou $N (meta). O jogador começa com uma fortuna inicial de $x, onde $0 < x < N$. Represente a fortuna do jogador ao longo do tempo por um processo estocástico $\{X_n : n \geq 0\}$.

X_né a fortuna do jogador no tempo n (após n rodadas).

Espaço de estados: S = {0,1,2,\dots,N}.

Estado inicial: $X_0 = x$, $0 < x < N$.

Probabilidades de transição:

$$P_{i,i+1} = p, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

$$P_{i,i-1} = q, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

$$P_{0,0} = 1, \quad P_{N,N} = 1,$$

$$P_{i,j} = 0 \quad \text{para outros } j.$$

Exercícios 1º passo, recorrência, transiência

Nos exercícios abaixo, sempre que necessário, considere $(X_n)_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov sobre o conjunto de estados S com transições P e distribuição inicial λ.

1. No jogo das apostas da lista de revisão e da lista da semana 2, suponha as jogadas CCC (cara-cara-cara) contra KCC (coroa-cara-cara) do segundo jogador. No seu modelo markoviano para esse jogo devem existir dois estados absorventes, um para cada jogador. Determine a probabilidade de absorção. Mostre que o tempo esperado de absorção é 7.

   Probabilidade de absorção em S_{CCC}

   Seja p_x a probabilidade de eventual absorção em S_{CCC}, começando no estado S_x. Usando análise de primeiro passo

$$\begin{aligned} p_\emptyset &= \tfrac{1}{2}p_C + \tfrac{1}{2}p_K, \\ p_C &= \tfrac{1}{2}p_{CC} + \tfrac{1}{2}p_K, \\ p_{CC} &= \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}p_K, \\ p_K &= \tfrac{1}{2}p_{KC} + \tfrac{1}{2}p_K, \\ p_{KC} &= \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}p_K. \end{aligned}$$

$$pK = 0, \qquad p_{CC} = \tfrac{1}{2}, \qquad p_C = \tfrac{1}{2}p_{CC} = \tfrac{1}{4}, \qquad p_S = \tfrac{1}{2}p_C = \tfrac{1}{8}.$$

   Portanto,

$$\mathbb{P}(\text{CCC antes de KCC}) = p_S = \tfrac{1}{8}$$

   e, consequentemente, S_{KCC} ocorre com probabilidade $7/8$.

   Tempo esperado de absorção:

   Denotemos por m_x o tempo esperado até atingir qualquer estado absorvente, começando em S_x. As equações de primeiro passo são

$$\begin{aligned} m_\emptyset &= 1 + \tfrac{1}{2}m_C + \tfrac{1}{2}m_K, \\ m_C &= 1 + \tfrac{1}{2}m_{CC} + \tfrac{1}{2}m_K, \\ m_{CC} &= 1 + \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}m_K, \\ m_K &= 1 + \tfrac{1}{2}m_{KC} + \tfrac{1}{2}m_K, \\ m_{KC} &= 1 + \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}m_K. \end{aligned}$$

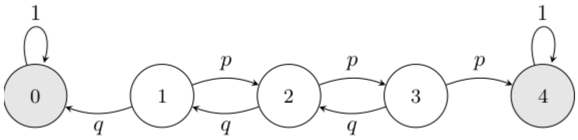
   Portanto,

$$m_\emptyset = \mathbb{E}[\text{tempo até absorção}] = 7.$$

   ---

2. O diagrama abaixo representa uma cadeia de Markov com transições $p, q > 0$. Mostre os estados

$i = 1, 2, 3$ são transientes verificando a desigualdade $\mathbb{P}(T_i = \infty \mid X_0 = 1) > 0$.



---

3. Demonstre que, condicionado a $X_m = i$, para eventos A da forma $[X_0 = i_0, \ldots, X_m = i_m]$ vale que

$$\mathbb{P}([X_m = i_m, \ldots, X_{m+n} = i_{m+n}] \cap A \mid X_m = i) =$$

$$\mathbb{P}(X_m = i_m, \ldots, X_{m+n} = i_{m+n} \mid X_m = i) \cdot \mathbb{P}(A \mid X_m = i)$$

Seja $B = [X_m = i_m, X_{m+1} = i_{m+1}, \ldots, X_{m+n} = i_{m+n}]$.

No lado esquerdo da equação enunciada

$$\mathbb{P}(B \cap A \mid X_m = i) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A \cap \{X_m = i\})}{\mathbb{P}(X_m = i)}.$$

Mas A já implica $X_m = i_m = i$, então $A \cap [X_m = i] = A$. Logo:

$$\mathbb{P}(B \cap A \mid X_m = i) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(X_m = i)}.$$

Agora,

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_m = i, X_{m+1} = i_{m+1}, \ldots, X_{m+n} = i_{m+n}).$$

Pela regrada cadeia

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_m = i) \cdot \mathbb{P}(X_{m+1} = i_{m+1}, \ldots, X_{m+n} = i_{m+n} \mid X_0 = i_0 \ldots, X_m = i).$$

Por condição de Markov

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_m = i) \cdot \mathbb{P}(X_{m+1} = i_{m+1}, \ldots, X_{m+n} = i_{m+n} \mid X_m = i).$$

O segundo fator é $P(B \mid X_m = i)$

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid X_m = i).$$

Substituindo

$$\mathbb{P}(B \cap A \mid X_m = i) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(X_m = i)} = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid X_m = i)}{P(X_m = i)}.$$

Mas

$$\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(X_m = i)} = \mathbb{P}(A \mid X_m = i).$$

Logo

$$\mathbb{P}(B \cap A \mid X_m = i) = \mathbb{P}(B \mid X_m = i) \cdot \mathbb{P}(A \mid X_m = i).$$

4. Defina a **probabilidade de primeira passagem por j em exatamente n passos**

$$f_{ij}^{(n)} \;=\; \mathbb{P}(X_1 \neq j,\, X_2 \neq j,\, \ldots,\, X_{n-1} \neq j,\, X_n = j \mid X_0 = i).$$

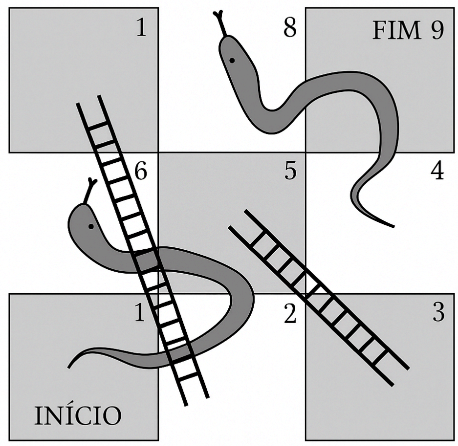
(4.1) $f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^n$?

(4.2) Se $T_i = \min\{n > 0 \colon X_n = i\}$ então $f_{ii}^{(n)} = \mathbb{P}(T_i = n \mid X_0 = i)$?

(4.3) Ainda, $f_{ii} = \mathbb{P}(T_i < \infty \mid X_0 = i)$ como definimos em aula. Então

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (f_{ii})^n?$$

5. (Cobras e Escadas e uma Cadeia de Markov) Um jogo é jogado em um tabuleiro de nove casas. A cada jogada, o jogador lança uma moeda justa e avança uma ou duas casas, de acordo com o resultado ser cara ou coroa. Se o jogador parar no pé de uma escada, ele sobe até o topo; se parar na cabeça de uma cobra, ele desliza até a cauda.



   - Quantas jogadas, em média, são necessárias para completar o jogo?
   - Qual é a probabilidade de que um jogador que chegou à casa do meio termine o jogo sem escorregar de volta para a casa 1?

Vamos definir estados 1..9, estado 9 absorvente. A matriz de transições é

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $X_0 = 1$. Seja m_i o número esperado de jogadas para atingir 9 a partir de i.

$$\begin{cases} m_1 = 1 + \frac{1}{2}m_7 + \frac{1}{2}m_5, \\ m_2 = 1 + \frac{1}{2}m_5 + \frac{1}{2}m_4, \\ m_3 = 1 + \frac{1}{2}m_4 + \frac{1}{2}m_5, \\ m_4 = 1 + \frac{1}{2}m_5 + \frac{1}{2}m_1, \\ m_5 = 1 + \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_7, \\ m_6 = 1 + \frac{1}{2}m_7 + \frac{1}{2}m_4, \\ m_7 = 1 + \frac{1}{2}m_4, \\ m_8 = 1, \qquad m_9 = 0. \end{cases}$$

donde $m_1 = 7$. (veja o ultimo exercício da lista)

Seja $p_i = \mathbb{P}(\text{atingir 9 antes de 1} \mid X_0 = i)$ a probabilidade de absorção partindo de i $p_1 = 0$ e $p_9 = 1$. Temos

$$p_i = \sum_j p_{ij} p_j, \quad p_1 = 0, \quad p_9 = 1$$

ou seja

$$\begin{cases} p_2 = 0.5\,p_5 + 0.5\,p_4, \\ p_3 = 0.5\,p_4 + 0.5\,p_5, \\ p_4 = 0.5\,p_5 + 0.5\,p_1 = 0.5\,p_5, \\ p_5 = 0.5\,p_1 + 0.5\,p_7 = 0.5\,p_7, \\ p_6 = 0.5\,p_7 + 0.5\,p_4, \\ p_7 = 0.5\,p_4 + 0.5\,p_9 = 0.5\,p_4 + 0.5, \\ p_8 = 1, \\ p_1 = 0, \\ p_9 = 1. \end{cases}$$

$$p_4 = 0.5\,p_5, \quad p_5 = 0.5\,p_7 \;\Rightarrow\; p_4 = 0.25\,p_7.$$

$$p_7 = 0.5 \cdot (0.25\,p_7) + 0.5 = 0.125\,p_7 + 0.5 \implies 0.875\,p_7 = 0.5 \implies p_7 = \frac{4}{7}.$$

Então

$$p_5 = 0.5 \times \frac{4}{7} = \frac{2}{7}.$$

---

6. (Continuação de Ruína da lista anterior) Classifique os estados da cadeia.
   Considere o instante aleatório

$$T = \min\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ ou } X_n = N\}.$$

   Deseja-se calcular a probabilidade de o jogador atingir $N antes de ir à falência, isto é,

$$h(x) = \mathbb{P}(X_T = N \mid X_0 = x),$$

   quando o jogo começa com fortuna inicial $X_0 = x$.
   Explique por que $h(0) = 0$ e $h(N) = 1$.

Usando o princípio da análise do primeiro passo, derive uma equação de recorrência para $h(x)$ quando $0 < x < N$, considerando as possíveis evoluções do jogo na primeira jogada.

O espaço de estados é:

$$S = \{0, 1, 2, \dots, N\}.$$

- **Estados absorventes:** 0 e N. Portanto, $\{0\}$ e $\{N\}$ são classes de comunicação fechadas e recorrentes (absorventes).
- **Estados transientes:** Todos os x com $0 < x < N$. Partindo de qualquer x interior, existe probabilidade positiva de eventualmente ser absorvido em 0 ou N.

$$\mathbb{P}(T_x = \infty \mid X_0 = x) \geq p_{x,x+1} p_{x+1,x+2} \cdots p_{N-1,N} = p^{N-x} > p > 0$$

-

Seja

$$h(x) = P(X_T = N \mid X_0 = x), \quad T = \min\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ ou } X_n = N\}.$$

- Se $X_0 = 0$, então $T = 0$ e $X_T = 0$, logo:

$$h(0) = 0.$$

- Se $X_0 = N$, então $T = 0$ e $X_T = N$, logo:

$$h(N) = 1.$$

Equação de Recorrência via Análise do Primeiro Passo: para $0 < x < N$, condicione no resultado da primeira jogada:

- Com probabilidade p, a fortuna passa de x para $x + 1$
- Com probabilidade $q = 1 - p$, passa de x para $x - 1$

Então $h(x) = \mathbb{P}(X_T = N \mid X_0 = x) =$

$$P(X_T = N \mid X_1 = x+1)\mathbb{P}(X_1 = x+1 \mid X_0 = x) + P(X_T = N \mid X_1 = x-1)\mathbb{P}(X_1 = x-1 \mid X_0 = x)$$

Como a cadeia a partir de $x + 1$ (ou $x - 1$) continua com a mesma lei:

$$P(X_T = N \mid X_1 = x+1) = h(x+1), \quad P(X_T = N \mid X_1 = x-1) = h(x-1).$$

Portanto, para $0 < x < N$:

$$h(x) = p\, h(x+1) + q\, h(x-1) \qquad \text{com as condições de contorno: } h(0) = 0, \quad h(N) = 1.$$

---

7. Seja $A \subseteq S$ um subconjunto de estados e defina o tempo de parada $T_A = \min\{n \geq 0 \colon X_n \in A\}$. O **tempo médio de primeira passagem** é dado por $m_i = \mathbb{E}[T_A \mid X_0 = i]$. Demonstre que para $i \notin A$ vale

$$m_i = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} m_j.$$

Condicionamos no primeiro passo ($X_1 = j$).

Se $X_0 = i \notin A$, então $T_A \geq 1$. Após o primeiro passo, o tempo restante até atingir A depende do valor de X_1. Pela propriedade de Markov, dado $X_1 = j$, o tempo de retorno tem a mesma distribuição que T_A começando em j.

$$\begin{aligned} m_i &= \sum_{j \in S} \mathbb{E}[T_A \mid X_1 = j, X_0 = i] \, \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in S} (1 + m_j) p_{ij} = 1 + \sum_{j \in S} m_j p_{ij}. \end{aligned}$$

Se $j \in A$, então $T_A = 1$ quando $X_1 = j$, ou seja $m_j = 0$. Portanto, podemos escrever:

$$m_i = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} \, m_j + \sum_{j \in A} p_{ij} \cdot 0 = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} \, m_j$$

obs.: essa equação foi usada no do jogo escadas/cobras.

Exercícios Classificação dos estados

Nos exercícios abaixo, sempre que necessário, considere $(X_n)_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov sobre o conjunto de estados S com transições P e distribuição inicial λ. A v.a. T_j é o tempo da primeira visita a j e N_j é o número de visitas a j a partir do instante 1. Alguns exercícios podem exigir a Propriedade Forte de Markov, deixe explícito quando usar essa propriedade.

1. Considere a cadeia de Markov em $\{1,2,3,4\}$ com matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq p \leq 1.$$

   Classifique os os estados.

---

2. Considere a cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{1,2,3\}$ e matriz de transição

$$P \;=\; \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

   (2.1) Prove que 3 é recorrente verificando $\mathbb{P}(T_3 > n \mid X_0 = 3) \leq (0.9)^n \to 0$ quando $n \to \infty$.
   (2.2) Prove que 3 é recorrente não-nulo mostrando que $\mathbb{E}[T_3 \mid X_0 = 3] \leq 10$.

---

3. Suponha que $\mathbb{P}(T_j \leq k \mid X_0 = i) \geq \alpha > 0$, para todo $i \in S$. Prove que

$$\mathbb{P}(T_j > nk \mid X_0 = i) \;\leq\; (1-\alpha)^n.$$

   A desigualdade sugere que, a cada bloco de k passos, há chance ≥α de visitar j, independentemente do passado devido à propriedade de Markov. Se não visita j nos primeiros nk passos, então falha em n tentativas independentes de visitar j.

   Prova por indução em n. Caso $n = 1$, pela hipótese,

$$\mathbb{P}(T_j > k \mid X_0 = i) = 1 - \mathbb{P}(T_j \leq k \mid X_0 = i) \leq 1 - \alpha,$$

   logo a desigualdade vale para $n = 1$. Suponha que para algum $n \geq 1$ valha
   $\mathbb{P}(T_j > nk \mid X_0 = i) \leq (1-\alpha)^n$ para todo i. Queremos mostrar
   $\mathbb{P}(T_j > (n+1)k \mid X_0 = i) \leq (1-\alpha)^{n+1}$.

   Para provar o caso $n+1$, usamos a lei da probabilidade total sobre os possíveis valores de X_{nk}:

$$\mathbb{P}(T_j > (n+1)k \mid X_0 = i) = \sum_{s\in S} \mathbb{P}(X_{nk} = s,\, T_j > (n+1)k \mid X_0 = i).$$

Se $X_{nk} = s$ e $T_j > nk$, então a probabilidade de não visitar j nos próximos k passos, começando desse estado s, é exatamente $\mathbb{P}(T_j > k \mid X_0 = s)$. Pela propriedade de Markov (o futuro a partir de tempo nk depende apenas de X_{nk}),

$$\mathbb{P}(T_j > (n+1)k \mid X_{nk} = s,\, T_j > nk,\, X_0 = i) = \mathbb{P}(T_j > k \mid X_0 = s) \leq 1 - \alpha.$$

Então, cada parcela da soma acima satisfaz

$$\mathbb{P}(X_{nk} = s,\, T_j > (n+1)k \mid X_0 = i) \leq (1-\alpha)\, \mathbb{P}(X_{nk} = s,\, T_j > nk \mid X_0 = i).$$

Somando sobre $s \in S$, obtemos

$$\mathbb{P}(T_j > (n+1)k \mid X_0 = i) \leq (1-\alpha)\, \mathbb{P}(T_j > nk \mid X_0 = i).$$

Aplicando a hipótese de indução

$$\mathbb{P}(T_j > (n+1)k \mid X_0 = i) \leq (1-\alpha)\,(1-\alpha)^n = (1-\alpha)^{n+1}.$$

---

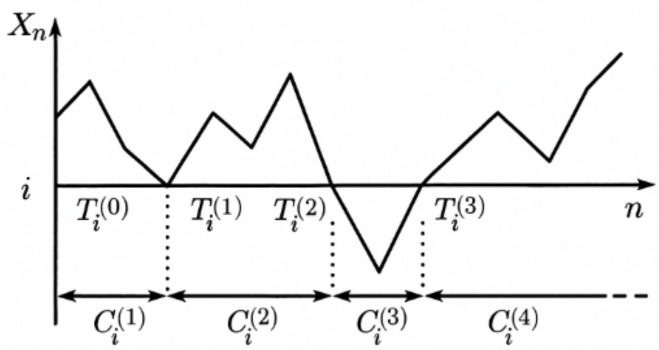
4. Considere a cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{1, 2, 3, 4\}$ e matriz de transição

$$P \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(4.1) Determine, para cada estado $i \in S$, se ele é transiente, recorrente não absorvente ou absorvente.
(4.2) Identifique as classes de comunicação da cadeia. Quais classes são fechadas?
(4.3) Calcule o período de cada estado (período é assunto da semana que vem).

---

5. O **tempo da k-ésima visita ao estado j** é:



$$T_j^{(k)} = \begin{cases} T_j, & \text{se } k = 1 \\ \min\{n > T_j^{(k-1)} \colon X_n = j\} & \text{se } k > 1. \end{cases}$$

Os *ciclos da cadeia* com relação ao estado j são definidos pelos tempos de visita ao estado j por

$$C_j^{(k)} := \begin{cases} T_j^{(k)} - T_j^{(k-1)} & \textbf{se } \; T_j^{(k-1)} < \infty \\ 0 & \text{caso sontrário} \end{cases}$$

(5.1) Para $k \geq 2$, condicionado a $T_j^{(k-1)} < \infty$ é a v.a. $C_j^{(k)}$ independente de $\{X_m : m \leq T_j^{(k-1)}\}$?
(5.2) Mostre que condicionado a $T_j^{(k-1)} < \infty$ o evento $[C_j^{(k)} = n]$ ocorre com probabilidade

$\mathbb{P}(T_j = n \mid X_0 = j)$.
(5.3) Use a Lei Forte dos Grandes Números para para mostrar que, com probabilidade 1 vale:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{T_j^{(k)}}{k} = m_j$$

onde m_j é o tempo médio de recorrência.

O tempo $T = T_j^{(k-1)}$ é um tempo de parada, pela propriedade forte de Markov forte

$$(X_{T+n})_{n\geq 0},\ \text{dado que } T < \infty,\ \text{e é C.M. independente de } X_0, \dots, X_T$$

e com mesma lei de $(X_n)_{n\geq 0}$ e $X_0 = j$. Ainda

$$C_j^{(k)} = \min\{n \leq 1 : X_{T+n} = j\}$$

assim, condicionado a $T < \infty$,

$$C_j^{(k)} \text{ tem a mesma distribuição que } T_j \text{ sob } \mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = j),$$

e é independente de todo o passado até T, ou seja, independente de $\{X_m : 0 \leq m \leq T_j^{(k-1)}\}$. Assim

$$\mathbb{P}(C_j^{(k)} = n \mid T_j^{(k-1)} < \infty) = \mathbb{P}(T_j = n \mid X_0 = j).$$

Agora suponha que a cadeia, iniciada em j seja tal que

$$m_j := \mathbb{E}[C_j^{(1)} \mid X_0 = j] = \mathbb{E}[T_j \mid X_0 = j] < \infty$$

Condicionada o $X_0 = j$ as variáveis $C_j^{(1)},\ C_j^{(2)},\ C_j^{(3)}, \dots$ são independentes e identicamente distribuídas cada uma com esperança m_j. Além disso,

$$T_j^{(k)} = \sum_{r=1}^{k} C_j^{(r)},$$

Pela Lei Forte dos Grandes Números para variáveis i.i.d. com esperança finita, temos

$$\frac{T_j^{(k)}}{k} = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k} C_j^{(r)} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{q.c.}} \mathbb{E}[C_j^{(1)} \mid X_0 = j] = m_j,$$

isto é,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{k\to\infty} \frac{T_j^{(k)}}{k} = m_j \,\middle|\, X_0 = j\right) = 1.$$

---

6. Prove que $\mathbb{E}[N_j \mid X_0 = i] = \frac{f_{ij}}{1-f_{jj}}$.

---

7. (opcional) Agora consideremos uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ observada apenas em certos instantes. Suponha que J seja um subconjunto do espaço de estados e que observamos a cadeia apenas quando ela assume valores em J. O processo resultante $(Y_m)_{m\geq 0}$ pode ser obtido formalmente definindo

$$Y_m := X_{\tau_m},$$

onde τ_m denota o instante da m-ésima visita da cadeia a J

$$\tau_0 := \min\{\, n > 0 : X_n \in J \,\} \qquad e \qquad \tau_{m+1} := \min\{\, n > \tau_m : X_n \in J \,\}.$$

para $m = 1, 2, \ldots$. Supomos que $\mathbb{P}(\tau_m < \infty \mid X_0) = 1$ para todo m. Prove que a propriedade forte de Markov aplica-se para mostrar que, para $i_0, \ldots, i_{m+1} \in J$,

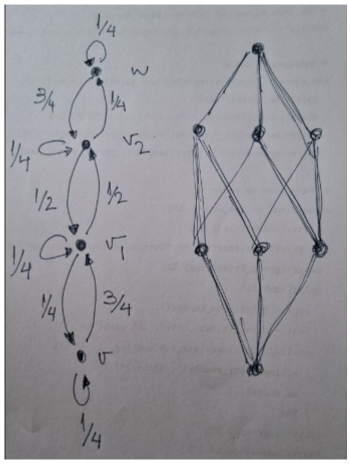
$$\mathbb{P}(Y_{m+1} = i_{m+1} \mid Y_0 = i_0, \ldots, Y_m = i_m) = \mathbb{P}(X_{\tau_1} = i_{m+1} \mid X_{\tau_0} = i_m) = a_{i_m i_{m+1}}$$

onde $a_{ij} = p_{ik} + \sum_{k \notin J} p_{ik} a_{kj}$. Conclua que o processo (Y_m) é também uma cadeia de Markov, com matriz de transição (a_{ij}) com índices restritos ao subconjunto J.

---

8. Uma partícula realiza passeio aleatório nos 8 vértices de um cubo. Em cada passo, ela permanece no mesmo vértice com probabilidade $1/4$, ou move-se para cada um dos três vértices vizinhos com probabilidade $1/4$ cada. Sejam v e w vértices diametralmente opostos; a cadeia parte de v.
Calcule:
(a) o número médio de passos até o **primeiro retorno** a v,
(b) o número médio de passos até a **primeira visita** a w,
(c) o número médio de **visitas a** w antes do primeiro retorno a v.

Descrição da Cadeia: a partir de um vértice v, os outros vértices podem ser reunidos num estafo pela distância até v (usando a simetria do cubo, note que no cubo não há passo possível "dentro" do estado): S = { 0, 1, 2, 3 }



- **0:** o próprio vértice v (a distância 0 dele mesmo)
- **1:** os 3 vértices adjacentes a v (distância 1)
- **2:** os 3 vértices a distância 2 de v
- **3:** o vértice w diametralmente oposto a v (distância 3)

Matriz de Transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Calcular o número médio de passos até o primeiro retorno a v:
O tempo médio para atingir o estado 0 partindo de $i \neq 0$ é $m_i = \mathbb{E}[T_0 \mid X_0 = i]$ e vale a equação de recorrência

$$m_i = 1 + \sum_k p_{ik}\, m_k,$$

com $m_0 = 0$. Escrevendo as equações para $i = 1, 2, 3$ e resolvendo esse sistema

$$m_1 = \frac{28}{3}, \qquad m_2 = 12, \qquad m_3 = \frac{40}{3}.$$

Condicionando no primeiro passo a partir de 0:

- se o processo vai para 0 em um passo (probabilidade $\frac{1}{4}$), o tempo de retorno é 1;
- se vai para $j \in \{1,2,3\}$ (probabilidade p_{0j}), o tempo de retorno é $1 + m_j$.

Logo

$$\begin{aligned} m_0 &= \tfrac{1}{4} \cdot 1 + \tfrac{3}{4} \cdot (1 + m_1) + 0 \cdot (1 + m_2) + 0 \cdot (1 + m_3) \\ &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\big(1 + \tfrac{28}{3}\big) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{31}{3} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{31}{4} = \tfrac{32}{4} = 8. \end{aligned}$$

ou seja, em média 8 passos.

Calcular o tempo médio até a primeira visita a w (estado 3)

$$g_i = \mathbb{E}[T_3 \mid X_0 = i],$$

onde $T_3 = \min\{n \geq 0 : X_n = 3\}$. Condicionando no primeiro passo, para $i \neq 3$:

$$g_i = 1 + \sum_{k=0}^{3} p_{ik}\, g_k.$$

escrevemos as equações para $i = 0,1,2$ ($g_3 = 0$), obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 3g_0 - 3g_1 = 4, \\ -g_0 + 3g_1 - 2g_2 = 4, \\ -2g_1 + 3g_2 = 4. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$g_0 = \frac{40}{3}, \qquad g_1 = 12, \qquad g_2 = \frac{28}{3}.$$

O número médio de passos até a primeira visita a w partindo de v é $\frac{40}{3} \approx 13{,}333 \text{ passos.}$

Finalmente, *o número médio de visitas ao estado w (estado 3) antes do primeiro retorno a v (estado 0), partindo de v.*

$$V_3^{(n)} = \big|\{\, n \in \{1, \dots n-1\} : X_n = 3 \,\}\big|$$

Queremos $\mathbb{E}[V_3^{(T_0)} \mid X_0 = 0]$. Se $u_i = \mathbb{E}\big[\#\text{ de visitas a 3 antes de atingir 0} \mid X_0 = 1\big]$ com $u_0 = 0$, então

$$u_i = \mathbb{1}_{\{i=3\}} + \sum_{k=0}^{3} p_{ik}\, u_k.$$

Começando em 0 e condicionando no primerio passo

$$\mathbb{E}[V_3^{(n)} \mid X_0 = 0] = \frac{1}{4} \cdot u_0 + \frac{3}{4} \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 = 1$$

---

9. O objetivo deste exercício é deduzir **equação de renovação**:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)}\, p_{jj}^{(n-k)}.$$

(9.1) Mostre que

$$[X_n = j] = \bigcup_{k=1}^{n} [T_j = k,\ X_n = j],$$

e que a união é disjunta. Use a decomposição anterior para escrever

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_j = k,\ X_n = j \mid X_0 = i).$$

(9.2) Condicione na informação de que a cadeia atinge j pela primeira vez no tempo k.
Mostre que

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid T_j = k, X_k = j, X_0 = j) = \mathbb{P}(X_{n-k} = j \mid X_0 = j) = p_{jj}^{(n-k)}.$$

(depois do instante k, o processo “recomeça” a partir do estado j).
(9.3) Separando os fatores. Conclua que

$$\mathbb{P}(T_j = k,\ X_n = j \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(T_j = k \mid X_0 = i)\,\mathbb{P}(X_{n-k} = j \mid X_0 = j) = f_{ij}^{(k)}\,p_{jj}^{(n-k)}.$$

(9.4) Substitua na soma do item (1) e obtenha

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)}\,p_{jj}^{(n-k)}.$$

(9.5) Caso particular. Mostre que, para $i = j$, a equação se reduz a

$$p_{ii}^{(n)} = f_{ii}^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} f_{ii}^{(k)}\,p_{ii}^{(n-k)},$$

que é a forma clássica da *equação de renovação* para retornos ao mesmo estado.

Exercícios Ergodicidade

Nos exercícios abaixo, sempre que necessário, considere $(X_n)_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov sobre o conjunto de estados S com transições P e distribuição inicial λ.

1. Suponha que uma cadeia de Markov tenha matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ p & 0 & 1-p \\ 1-p & p & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para } 0 < p < 1.$$

   Encontre a distribuição estacionária.

2. Para a cadeia de dois estados com

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$

   onde $0 < p, q < 1$ e $p + q \neq 1$ encontre a distribuição limite.

3. Encontre a distribuição estacionária da cadeia de Markov do tempo cuja matriz de transição é:

	Chuva	**Neve**	**Limpo**
Chuva	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$
Neve	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{10}$
Limpo	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

4. **Cadeia de Markov preguiçosa**: Seja X uma cadeia de Markov irredutível em um espaço de estados enumerável S, com matriz de transição P e distribuição estacionária π. Seja $a \in (0, 1)$ e defina

$$L = aP + (1-a)I,$$

   onde I é a matriz identidade. Mostre que L é a matriz de transição de uma cadeia de Markov Y irredutível e aperiódica, cuja distribuição estacionária é π.

5. Para um grafo $G = (V, E)$ conexo e finito, um **passeio aleatório simples** pelos vértices do grafo G é definido por um vetor estocástico λ para a distribuição inicial e matriz de transição

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1/d(i), & \text{se } \{i,j\} \in E(G) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $d(i) = \sum_{j \in V} a_{i,j}$ é o grau do vértice i em G, ou seja, é a quantidade de arestas a que i pertence. Determine a distribuição estacionária desse passeio aleatório.

$\pi_j = \frac{d_i}{2m}$ onde d_i é o vértice do grau i e m é o número de arestas ($2m$ é o resultado da soma dos graus.)

---

6. No exercício anterior, descreva a(s) distribuição(ões) estacionária(s) se o grafo for desconexo.

Supondo 2 componentes conexos C_1 e C_2

$$\left\{ \alpha\, \pi^{(1)} + (1-\alpha)\, \pi^{(2)} \mid \alpha \in [0,1] \right\},$$

onde $\pi^{(i)}$ é uma distribuição estacionária nos vértices na componente C_i.

---

7. Movimentos aleatórios no xadrez. Considere um tabuleiro de xadrez com um rei branco solitário realizando movimentos aleatórios, ou seja, a cada jogada ele escolhe, de forma uniforme ao acaso, uma das casas possíveis para se mover.
A cadeia de Markov correspondente é irredutível e/ou aperiódica?

Mesma pergunta, mas agora com o rei substituído por um bispo.

Mesma pergunta, mas agora com um cavalo.

Movimentos aleatórios do rei : O rei pode mover-se para qualquer casa adjacente (horizontal, vertical ou diagonal). Dependendo da posição:

- *Cantos (4 casas):* 3 movimentos possíveis
- *Bordas não-cantos (24 casas):* 5 movimentos possíveis
- *Interior (36 casas):* 8 movimentos possíveis

De qualquer casa do tabuleiro, o rei pode se mover para casas adjacentes. Por movimentos sucessivos, o rei pode alcançar qualquer outra casa do tabuleiro. A cadeia é **IRREDUTÍVEL**.

O rei pode ir de uma casa A para uma casa adjacente B e voltar para A (*ciclos de comprimento 2*). Usando coordenadas, um movimento possível é $(1,1) \to (1,2) \to (2,2) \to (1,1)$ (*ciclos de comprimento 3*), Como existem comprimentos de retorno de 2 e 3 passo *o período da cadeia é 1* , é **APERIÓDICA**.

A cadeia é **ergódica**, portanto admite uma única distribuição estacionária π e para qualquer distribuição inicial, a cadeia converge para π. Pela simetria Usando o exercício 5 obtemos que

$$\begin{aligned}\pi(\text{canto}) &= \frac{3}{420} \quad \text{para cada canto} \\ \pi(\text{borda}) &= \frac{5}{420} \quad \text{para cada casa de borda não-canto} \\ \pi(\text{interior}) &= \frac{8}{420} \quad \text{para cada casa interior}\end{aligned}$$

Onde $420 = 4 \times 3 + 24 \times 5 + 36 \times 8$ é o *grau total do grafo*, ou o dobro do número de arestas.

---

8. **Problema do Colecionador de Cupons** Você quer coletar cada um de n cupons diferentes e recebe todo dia um cupom aleatório pelo correio, quanto tempo precisa esperar? Dica:

   $T^{(i)}$ é o primeiro instante em que i cupons tenham sido recebidos, assim,
   $T^{(1)} = 0 < T^{(2)} = 1 < T^{(3)} < \cdots < T^{(n)}$. Determine $\mathbb{E}(T^{(n+1)} - T^{(n)})$.

$\mathbb{E}[T] = n \sum_{k=1} n \frac{1}{k} \approx n \ln(n)$.
