

Introdução aos Processos Estocásticos

P1 — 2025-3

(Q1) Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma Cadeia de Markov sobre os estados $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1.1 Escreva a decomposição canônica $T \cup R_1 \cup \dots \cup R_n$ de S .

- Os estados $\{1, 2\}$ comunicam-se entre si e formam subconjunto fechado.
- Os estados $\{5, 6\}$ comunicam-se entre si e formam subconjunto fechado.
- Dos estados $\{3, 4\}$ a cadeia pode ir para $\{1, 2, 5, 6\}$, mas o contrário não ocorre.

Logo, $T = \{3, 4\}$, $R_1 = \{1, 2\}$, $R_2 = \{5, 6\}$.

1.2 Determine o período dos estados.

Todo estado tem transição para ele mesmo $p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{44}, p_{55}, p_{66} > 0$, logo todos os estados são *aperiódicos*, com período igual a 1.

1.3 Mostre que $\mathbb{P}(T_4 = \infty \mid X_0 = 3) > 1/16$.

Resposta simples: $\mathbb{P}(T_4 = \infty \mid X_0 = 3) \geq p_{3,2} = \frac{1}{4} > \frac{1}{16}$. pois do estado 2 pertence a classe fechada que não contém o 4.

Resposta completa: defina A_4 o evento “atingir 4 antes de sair de $\{3, 4\}$ ”. Temos a equação:

$$\begin{aligned} \Pr(A_4 \mid X_0 = 3) &= \Pr(A_4 \mid X_0 = 3, X_1 = 4)p_{34} + \Pr(A_4 \mid X_0 = 3, X_1 = 3)p_{33} \\ &= p_{34} + \Pr(A_4 \mid X_0 = 3)p_{33}, \end{aligned}$$

portanto, resolvendo para $\Pr(A_4 \mid X_0 = 3)$, fica $\Pr(A_4 \mid X_0 = 3) = \frac{1}{3}$. Logo,

$$\Pr(T_4 = \infty \mid X_0 = 3) = 1 - \Pr(A_4 \mid X_0 = 3) = \frac{2}{3} > \frac{1}{16}.$$

1.4 Determine $f_{1,1}^{(n)}$, para todo n .

- Para $n = 1$: $f_{1,1}^{(1)} = p_{11} = \frac{1}{2}$.
- Para $n \geq 2$: o primeiro passo deve ser $1 \rightarrow 2$, e depois a cadeia deve permanecer em 2 por $n - 2$ passos e então retornar a 1. Assim, $f_{1,1}^{(n)} = p_{12} p_{22}^{n-2} p_{21}$.

Substituindo $p_{12} = \frac{1}{2}$, $p_{22} = \frac{3}{4}$, $p_{21} = \frac{1}{4}$:

$$f_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad f_{1,1}^{(n)} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}, \quad n \geq 2.$$

1.5 Determine m_1 , o tempo médio de retorno ao estado 1, $m_1 = \mathbb{E}[T_1 | X_0 = 1]$.

$$m_1 = \mathbb{E}[T_1 | X_0 = 1] = \sum_{n \geq 1} n f_{1,1}^{(n)} = 1 \cdot \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Mas

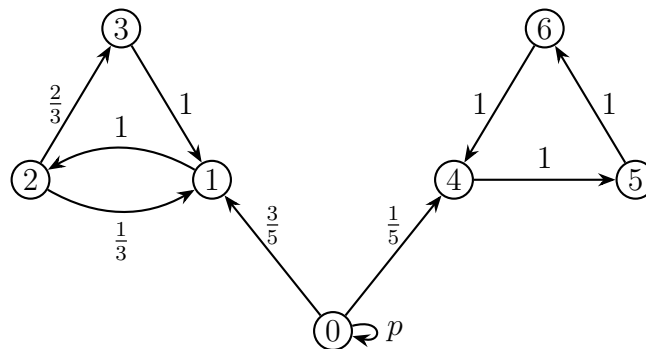
$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2) \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{3/4}{(1-3/4)^2} + \frac{2}{1-3/4} = 12 + 8 = 20.$$

Logo

$$m_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot 20 = 3.$$

Portanto, o tempo médio de retorno ao estado 1 é $m_1 = 3$.

(Q2) Considere uma Cadeia de Markov com estados $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e transições de acordo com o diagrama abaixo



2.1 Qual(is) o(s) possível(is) valor(es) para p ?

As probabilidades de saída do estado 0 devem somar 1. Portanto existe um único valor compatível com o diagrama: $p = \frac{1}{5}$.

2.2 Com que probabilidade a cadeia sai de 0 e alcança o 6?

Se ir de 0 para 1, ficará no triângulo esquerdo $\{1, 2, 3\}$ e nunca alcançará $\{4, 5, 6\}$. Assim, condicionando no primeiro passo e usando A_6 para o evento “alcançar 6”

$$\begin{aligned} & \Pr(A_6 \mid X_0 = 0) \\ = & \Pr(A_6 \mid X_0 = 0, X_1 = 0)p_{0,0} + \Pr(A_6 \mid X_0 = 0, X_1 = 4)p_{0,4} + \Pr(A_6 \mid X_0 = 0, X_1 = 1)p_{0,1} \\ & = \Pr(A_6 \mid X_0 = 0)p_{0,0} + \Pr(A_6 \mid X_0 = 4)p_{0,4} + 0 \\ & = \Pr(A_6 \mid X_0 = 0)p_{0,0} + 1p_{0,4} + 0 \end{aligned}$$

O “+0” vem de que se $0 \rightarrow 1$, então a cadeia ficará no triângulo esquerdo $\{1, 2, 3\}$ e nunca alcançará $\{4, 5, 6\}$. Portanto $(1 - p_{00}) \Pr(A_6 \mid X_0 = 0) = p_{04}$ ou seja

$$\Pr(A_6 \mid X_0 = 0) = \frac{p_{04}}{1 - p_{00}} = \frac{1/5}{4/5} = \frac{1}{4}.$$

2.3 Qual o tempo médio para a cadeia sair de 1 e alcançar o 3?

Condicionando no primeiro passo, a única possibilidade é $1 \rightarrow 2$

$$\mathbb{E}[T_3 \mid X_0 = 1] = \mathbb{E}[T_3 \mid X_0 = 1, X_1 = 2]p_{12} = (1 + \mathbb{E}[T_3 \mid X_0 = 2]) p_{12}$$

e, de novo, condicionando no primeiro passo, agora para $\mathbb{E}[T_3 \mid X_0 = 2]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_3 \mid X_0 = 2] &= \mathbb{E}[T_3 \mid X_0 = 2, X_1 = 1]p_{21} + \mathbb{E}[T_3 \mid X_0 = 2, x_1 = 3]p_{23} \\ &= (1 + \mathbb{E}[T_3 \mid X_0 = 1]) p_{21} + 1p_{23} \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na primeira equação

$$\mathbb{E}[T_3 \mid X_0 = 1] = (1 + (1 + \mathbb{E}[T_3 \mid X_0 = 1]) p_{21} + 1p_{23}) p_{12}$$

Substituindo as probabilidades de transição e resolvendo para a esperança

$$\mathbb{E}[T_3 \mid X_0 = 1] = 3.$$

(Q3) Considere a cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ com estados $\{0, 1, 2\}$ e matriz $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.1 Verifique se a cadeia é irredutível e aperiódica.

A cadeia tem as transições positivas

$$0 \rightarrow 1, \quad 1 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 1$$

de qualquer estado é possível alcançar qualquer outro, logo a cadeia é *irredutível*.

Sendo irredutível, todos os estados têm o mesmo período.

Período do estado 1: partindo de 1 o primeiro passo vai necessariamente para $\{0, 2\}$ (pois $p_{11} = 0$) e no passo seguinte volta a 1 com probabilidade 1. Portanto os tempos de retorno possíveis a 1 são $2, 4, 6, \dots$; o mdc desses inteiros é 2.

A cadeia é **irredutível** e **periódica** com de período 2.

3.2 Determine $\mathbb{E}[C_1^{(2)} \mid X_0 = 1]$ onde $C_j^{(k)} := T_j^{(k)} - T_j^{(k-1)}$ (com $T_j^{(0)} = 0$) são os ciclos da cadeia com relação ao estado j , para todo $k \geq 1$ e $T_j^{(k)} := \min\{n > T_j^{(k-1)} : X_n = j\}$ é o tempo da k -ésima visita ao estado j (com $T_j^{(1)} = T_j$ o tempo da primeira visita), para todo $k \geq 1$.

Do exercício 5 da lista da semana 4 Condicionada o $X_0 = 1$ as variáveis $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, C_1^{(3)}, \dots$ são independentes e identicamente distribuídas cada uma com esperança m_1 . Condicionando no primeiro passo duas vezes

$$\begin{aligned} m_1 &= \mathbb{E}[T_1 \mid X_0 = 1, X_1 = 0]p_{10} + \mathbb{E}[T_1 \mid X_0 = 1, X_1 = 2]p_{12} \\ &= (1 + \mathbb{E}[T_1 \mid X_0 = 0])p_{10} + (1 + \mathbb{E}[T_1 \mid X_0 = 2])p_{12} \\ &= (1 + \mathbb{E}[T_1 \mid X_0 = 0, X_1 = 1])p_{10} + (1 + \mathbb{E}[T_1 \mid X_0 = 2, X_1 = 1])p_{12} \\ &= (2 + \mathbb{E}[T_1 \mid X_0 = 1])p_{10} + (2 + \mathbb{E}[T_1 \mid X_0 = 1])p_{12} \\ &= 2p_{10} + 2p_{12} = 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 2. \end{aligned}$$

Resposta alternativa: Começando em 1, no passo 1 a cadeia vai para 0 ou para 2; em ambos os casos, no passo seguinte (passo 2) retorna certamente a 1 (pois $0 \rightarrow 1$ e $2 \rightarrow 1$ têm probabilidade 1). Logo o primeiro retorno a 1 ocorre em tempo **determinístico** $T_1 = 2$, isto é $C_1^{(1)} = 2$. Após esse retorno a cadeia está novamente em 1 e o comportamento repete-se, portanto cada ciclo tem comprimento determinístico igual a 2. Em particular,

$$\mathbb{E}[C_1^{(2)} \mid X_0 = 1] = 2.$$