Introdução aos Processos Estocásticos

P2 — 2025-3

Justifique as respostas

(Q1) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e não-negativas com $\mathbb{E}X_i = 1$ para todo i. Defina $M_n = M_0 X_1 \cdots X_n$ para todo $n > 0$ com M_0 uma constante positiva. Prove que $(M_n)_{n\geq 0}$ é um martingal em relação a $(X_n)_{n\geq 1}$.

Primeiro observamos que,

$$\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}\Big[M_0 \prod_{i=1}^{n} X_i\Big] = M_0\,\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{n} X_i\Big]$$

e pela independência das X_i segue-se que

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{n} X_i\Big] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = 1.$$

Por hipótese, cada X_i é não-negativa e tem esperança finita, logo $M_n \geq 0$ e assim

$$\mathbb{E}[\,|M_n|\,] = \mathbb{E}[M_n] = M_0 < \infty.$$

Por definição, M_n é função de $(X_0, \ldots, X_n)$ (i.e. $M_n \in \mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \ldots, X_n)$).

Finalmente, verificamos a propriedade de martingal. Para cada $n \geq 0$ podemos escrever

$$M_{n+1} = M_n \cdot X_{n+1}$$

e como X_{n+1} é independente de $(X_0, \ldots, X_n)$ temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[M_n X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= M_n\,\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \qquad \text{pois } M_n \in \mathcal{F}_n \\
&= M_n\,\mathbb{E}[X_{n+1}] \qquad\qquad \text{pois } X_{n+1} \text{ é independente de } X_0, \ldots, X_n \\
&= M_n \cdot 1 = M_n.
\end{aligned}$$

(Q2) Sejam $(X_n)_{n\geq 0}$ uma Cadeia de Markov com estados em S e matriz de transição $P = (p_{ij})$ e defina $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Prove que se $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ para todo n e vale a condição

$$\sum_{j\in S} j \cdot p_{ij} = i, \quad \text{para todo } i \in S$$

então $(X_n)_{n\geq 0}$ é um martingal em relação a $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Primeiro, observamos que

$$\sum_{j \in S} j \cdot p_{ij} = \sum_{j \in S} j \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_n = i]$$

Por hipótese $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ para todo n.

Além disso, $X_n \in \mathcal{F}_n$ por definição de $\mathcal{F}_n$.

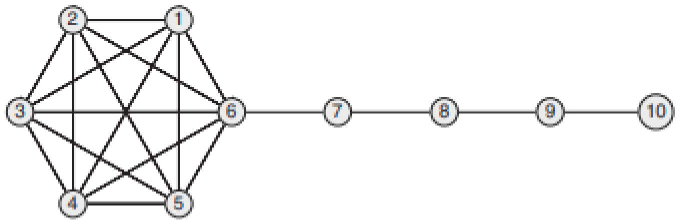
Como X é cadeia de Markov vale

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_0, \ldots, X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_n]$$

usando $\sum_{j \in S} j \cdot p_{ij} = i$

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_n] = \sum_{j \in S} j \, p_{X_n, j} = X_n$$

(Q4) O grafo "lollipop" é o grafo definido pelo diagrama abaixo. Determine a distribuição limite de um passeio aleatório simples nesse grafo ou argumente que tal distribuição não existe.



O grafo é conexo, portando o passei aleatório é irredutível.

Todo vértice v pertence a um ciclo par (v, u, v) e alcança um circuito ímpar (por exemplo, $1, 5, 6, 1$), portanto, há um ciclo de tamanho ímpar que sai de v e volta para v (o grafo não é bipartido). Portanto, o passeio é aperiódico pois $\mathrm{mdc}(\text{par}, \text{ímpar}) = 1$.

O passeio é ergódico logo tem distribuição limite igual a distribuição estacionária $\pi_j = \frac{d_j}{2|E|}$.

Vértice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
π_v	$\frac{5}{38}$	$\frac{5}{38}$	$\frac{5}{38}$	$\frac{5}{38}$	$\frac{5}{38}$	$\frac{6}{38}$	$\frac{2}{38}$	$\frac{2}{38}$	$\frac{2}{38}$	$\frac{1}{38}$

(Q3) No passeio aleatório do exercício anterior, qual o tempo médio de retorno ao 10? Mais formalmente, determine $m_{10} = \mathbb{E}[T_{10} \mid X_0 = 10]$ onde $T_{10} = \min\{n \geq 1 : X_n = 10\}$.

$m_{10} = \frac{1}{\pi_{10}} = 38$ passos, pelo teorema ergódico.
