

Lista 1
Algoritmos em grafos
Prof. J.D.

1. Um químico deseja embarcar os produtos P, Q, R, S, T, O, X usando o menor número de caixas. Alguns produtos não podem ser colocados numa mesma caixa porque reagem. Os produtos P, Q, R, X reagem entre si; P reage com O e com S e vice-versa; T também reage com O e com S e vice-versa. Descreva o grafo que modela essa situação, mostre um diagrama desse grafo e use-o para descobrir o menor número de caixas necessárias para embarcar os produtos com segurança.

2. O **complemento** de um grafo G , denotado por G^c , é o grafo que tem o mesmo conjunto de vértices de G e dois vértices formam uma aresta em G^c se e somente se **não** formam uma aresta de G :

Um grafo é chamado de **completo** sobre V se todo par de vértices de V é uma aresta do grafo, ou seja $E = \binom{V}{2}$. Um grafo completo com n vértices é denotado por K^n . Prove que para qualquer grafo G vale que $G \cup G^c = K^n$.

3. Vimos que $\delta(G)$ denota o grau mínimo de G . Analogamente, definimos $\Delta(G)$, o **grau máximo** de G , por

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(v)$$

e definimos $d(G)$, o **grau médio** de G , por

$$d(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d_G(v)$$

para todo G com pelo menos 1 vértice, caso contrário $d(G) := 0$.

Demonstre que $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$ para todo grafo G .

4. Considere o caso geral do exercício 1: Um químico deseja embarcar os produtos $p_1, p_2, \dots, p_n$ usando o menor número de caixas. Alguns produtos não podem ser colocados numa mesma caixa porque reagem e o químico conhece uma listagem com m pares de produtos que reagem. Seja G o grafo que modela esse problema, onde vértices são produtos e arestas os pares que reagem. Denotemos por $\chi(G)$ o número de mínimo de caixas de modo que seja possível encaixotar os produtos com segurança. Prove que

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

(Dica: em uma distribuição mínima de caixas, a cada duas caixas, precisa existir pelo menos um produto em uma caixa reagindo com um produto da outra caixa. Assim podemos garantir um número mínimo m de arestas para o grafo.)

5. Para um número natural r , um grafo é **r -regular** se todos os vértices têm grau r . Para um grafo r -regular com n vértices e m arestas, expresse m em função de n e r . Dê exemplo de um grafo 3-regular que não é completo.

6. Sejam G um grafo e $M \subseteq E(G)$. Tome o subconjunto

$$U = \bigcup_{e \in M} e$$

de vértices de G . Prove ou dê um contraexemplo para $G[U] = G[M]$.

7. Mostre que a relação $e \sim f$ em $E(G)$ dada por $e = f$ ou existe um circuito $C \subset G$ tal que e e f pertencem a $E(C)$ é uma relação de equivalência.

8. Seja $G = (V, E)$ um grafo qualquer. Definimos os seguintes parâmetros de G :

- Dado $U \subseteq V$, dizemos que U é um **conjunto independente**, ou **conjunto estável**, em G se $E(G[U]) = \emptyset$, ou seja, não há par de vértices adjacentes ambos pertencentes a U .

Denotamos por $\alpha(G)$ a cardinalidade do maior conjunto independente em G ,

$$\alpha(G) = \max\{|A| : A \subset V(G) \text{ é um conjunto independente}\}.$$

- Dado $U \subseteq V$, dizemos que U é um **clique** em G se $G[U]$ é completo.

Denotamos por $\omega(G)$ a cardinalidade do maior clique em G

$$\omega(G) = \max\{|A| : A \subset V(G) \text{ é um clique}\}.$$

- O **diâmetro** do grafo G é a maior distância entre dois vértices quaisquer de G ,

$$\text{diam}(G) = \max_{u,v \in V(G)} \text{dist}_G(u, v).$$

Naturalmente, $\text{diam}(G) = \infty$ se existirem dois vértices no grafo G que não são extremos de um caminho.

- A **cintura** do grafo G é o comprimento do menor circuito contido em G , ou seja

$$\text{cin}(G) = \min\{|E(C)| : \text{existe um circuito } C \subseteq G\},$$

quando existe um circuito, caso contrário convencionamos que $\text{cin}(G) = \infty$.

Agora, seja k um número natural. O **k -cubo** é o grafo cujo conjunto de vértices são as sequências binárias de k bits e dois vértices são adjacentes se e somente se as k -tuplas correspondentes diferem exatamente em uma posição.

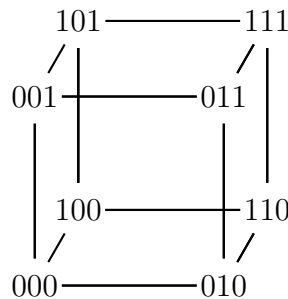


Figura 1: um diagrama do 3-cubo.

Para todo $k \geq 1$, determine o número de vértices e de arestas do k -cubo. Determine os parâmetros α e ω do k -cubo. Determine o diâmetro do k -cubo. Determine a cintura do k -cubo.

9. Mostre que existem 11 grafos não-isomorfos com 4 vértices.

10. Sejam G e H grafos isomorfos e $f: G \rightarrow H$ um isomorfismo. É verdade que $G[U]$ é isomorfo a $H[f(U)]$ para todo $U \subseteq V(G)$? Justifique.

11. Um **automorfismo** de um grafo é um isomorfismo do grafo sobre ele mesmo. Quantos automorfismos tem um grafo completo?

Um grafo G é **vértice-transitivo** se para quaisquer $u, v \in V(G)$ existe um automorfismo f de G com $f(v) = u$.

Analogamente, G é **aresta-transitivo** se para quaisquer arestas $\{x, y\}, \{z, w\} \in E(G)$ existe um automorfismo f de G tal que $\{f(x), f(y)\} = \{z, w\}$.

Dê um exemplo de grafo vértice-transitivo. Dê um exemplo de grafo aresta-transitivo. Dê um exemplo de grafo aresta-transitivo mas não vértice-transitivo.

12. Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| = n$ e $|E| = m$.

- (a) Mostre que uma representação de G por matriz de adjacências utiliza $\Theta(n^2)$ posições, enquanto uma representação por listas de adjacências utiliza $\Theta(n + m)$ posições.
- (b) Para cada uma das situações abaixo, indique qual representação é mais adequada, matriz ou listas de adjacências, e justifique sua escolha comparando o custo das operações relevantes.
 - $m = \Theta(n)$ e o algoritmo precisa percorrer todos os vizinhos de cada vértice.
 - $m = \Theta(n^2)$ e o algoritmo realiza muitas consultas do tipo “ $i, j \in E$?”.
 - $m = \Theta(n)$ e o algoritmo precisa apenas escrever todas as arestas.
 - $m = \Theta(n^2)$ e o algoritmo precisa escrever todas as arestas.
- (c) Explique por que, apesar das diferenças de eficiência, as duas representações não alteram a classificação de um algoritmo como sendo de tempo polinomial.

13. Sejam G um grafo sobre o conjunto de vértices $\{1, 2, \dots, n\}$, A a sua matriz de adjacências e $b(i, j)$ as entradas da matriz A^2 . O quê o número $b(i, i)$ conta? Qual a relação entre $b(i, j)$ e $N_G(i)$ e $N_G(j)$ quando $i \neq j$?

Como é possível determinar o número de triângulos (K^3) em um grafo G qualquer a partir de A^3 ?