

1.1 Definições iniciais

Seja V um conjunto. Definimos

$$\binom{V}{2} = \{ \{u, v\} \subseteq V : u \neq v \}$$

por exemplo

$$\binom{\{1, 2, 3\}}{2} = \{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \}.$$

Definição 1.1: grafo

Um **grafo** é uma estrutura matemática definida por um par ordenado de conjuntos finitos (V, E) tal que $E \subseteq \binom{V}{2}$.

Os elementos de V são chamados **vértices**.

Os elementos de E são chamados **arestas**.

Se G denota o grafo que é definido pelo par (V, E) então escrevemos $G := (V, E)$.

Além disso, se G é um grafo e não especificamos o conjunto dos vértices e o conjunto das arestas que definem G , esses passam a ser referidos como $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente.

Exemplo 1.1

Os conjuntos

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$E = \{ \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{6, 7\} \}$$

definem um grafo.

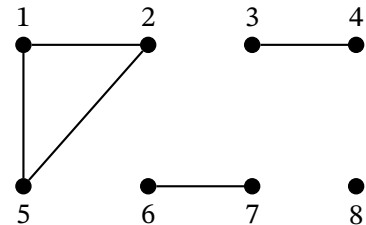


Figura 1.1: diagrama do grafo do Exemplo 1.1.

Todo grafo pode ser representado geometricamente por um **diagrama**: no plano, desenhamos um ponto para cada vértice e um segmento de curva ligando cada par de vértices que forma uma aresta. Um diagrama de um grafo não é único, mas cada diagrama descreve um único grafo. Um diagrama do grafo do Exemplo 1.1 é apresentado na figura ao lado.

- Os vértices u e v de um grafo G são **adjacentes** se $\{u, v\}$ é uma aresta de G . Também dizemos que u e v são os **extremos** da aresta.
- Duas arestas e e f de um grafo G são **arestas adjacentes** se elas têm um vértice em comum, ou seja, $|e \cap f| = 1$.

- A aresta e **incide** no vértice v , em um grafo G , se $v \in e$. A quantidade de arestas de G que incidem em v é o **grau de v** em G , $d_G(v)$:

$$d_G(v) := |\{w \in V(G) : \{v, w\} \in E(G)\}|.$$

- A **vizinhança** do vértice v no grafo G , denotada $N_G(v)$, é formada pelos outros extremos das arestas que incidem em v , isto é,

$$N_G(v) := \{u \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}.$$

Alternativamente, temos $d_G(v) = |N_G(v)|$.

Teorema 1.1

Para todo grafo G vale que

$$\sum_{u \in V(G)} d_G(u) = 2|E(G)|. \quad (1.1)$$

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo e defina o conjunto

$$X := \{(u, e) \in V \times E : u \in e\}.$$

Vamos contar seu número de elementos de duas maneiras distintas.

Primeiro, cada vértice $u \in V$ participa de $d_G(u)$ elementos de X , portanto

$$|X| = \sum_{u \in V} d(u). \quad (1.2)$$

Depois, cada aresta e está presente em dois elementos de X , logo

$$|X| = 2|E|. \quad (1.3)$$

De (1.2) e (1.3) temos (1.1). $\square$

1.2 Subgrafo

Definição 1.2: subgrafo

Dizemos que o grafo H é um **subgrafo** do grafo G se, e somente se,

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ e } E(H) \subseteq E(G)$$

e, nesse caso, escrevemos $H \subseteq G$ para indicar que H é subgrafo de G .

Exemplo 1.2

Considerando o grafo G do Exemplo 1.1 temos que

$$G' := (\{1, 2, 5\}, \{\{1, 5\}, \{5, 2\}, \{1, 2\}\}) \quad e$$

$$G'' := (\{3, 5, 6\}, \emptyset)$$

são subgrafos de G , enquanto que

$$H := (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}),$$

$$I := (\{1, 2, 3, 4, 9\}, \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}) \quad e$$

$$J := (\{1, 2, 3, 4, 8\}, \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 8\}\})$$

não são subgrafos de G pois: H não é grafo, em I não vale $V(I) \subseteq V(G)$ e em J não vale $E(J) \subseteq E(G)$.

Dados um grafo G e um subconjunto de vértices $U \subseteq V(G)$, o **subgrafo induzido por U** é o subgrafo $G[U]$ dado por

$$\left(U, E(G) \cap \binom{U}{2} \right).$$

Analogamente, definimos subgrafo induzido por um subconjunto de arestas. Se

$$M = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \subseteq E(G),$$

então o **subgrafo induzido por M** é o subgrafo $G[M]$ dado por

$$\left(\bigcup_{i=1}^m e_i, M \right).$$

Exemplo 1.3

Dos grafos G , H e I cujos diagramas são dados na Figura 1.2 podemos dizer que H é um subgrafo induzido de G enquanto que I é um subgrafo mas não é induzido.

Um subgrafo $H \subseteq G$ onde $V(H) = V(G)$ é chamado de **subgrafo gerador**. No exemplo acima o grafo I é subgrafo gerador de G , enquanto que H não é subgrafo gerador de G .

1.3 Passeios, caminhos e circuitos

Uma sequência W de vértices de um grafo G

$$W = v_1, v_2, \dots, v_k \quad (k \geq 1) \quad (1.4)$$

é chamada de **passeio** em G se v_i e v_{i+1} são adjacentes, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$.

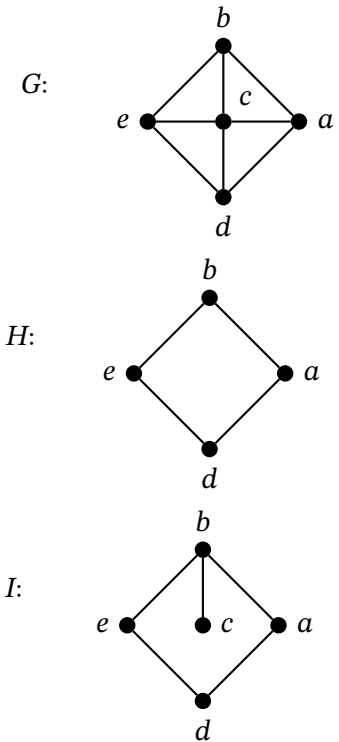


Figura 1.2: diagrama dos grafos G , H e I .

Por exemplo, no grafo do Exemplo 1.1 a sequência 1, 2, 5, 2, 1, 5 define um passeio. Também a sequência 1, 2, 5, 2, 1 define um passeio que, nesse caso, chamamos de **passeio fechado**, ou seja, um passeio como W na equação (1.4) acima com $v_1 = v_k$.

No grafo G do Exemplo 1.2 temos o passeio fechado a, c, b, a, c, d, a no qual os vértices c e a ocorrem mais de uma vez. Também o par $\{a, c\}$ é uma aresta *percorrida duas vezes*. Restringido a possibilidade de repetição de vértices e arestas temos tipos especiais de subgrafos, que merecem destaque e, portanto, um nome especial.

Definição 1.3: caminho em G

Um **caminho** $P \subseteq G$ é um passeio

$$P = v_1, v_2, \dots, v_k \quad (k \geq 1)$$

em G tal que $v_i \neq v_j$, sempre que $i \neq j$, ou seja, vértices não são repetidos.

Denotamos por P^k um caminho com k vértices.

Exemplo 1.4

Para o grafo G representado no diagrama da Figura 1.4, o passeio $P^4 = a, b, f, i$ é um caminho no grafo G . Ainda, esse mesmo caminho é definido pelo subgrafo induzido $G[\{a, b, f, i\}]$.

Também o subgrafo definido pelo par de subconjuntos $(\{a, d, c, h, i\}, \{\{a, d\}, \{d, c\}, \{c, h\}, \{h, i\}\})$ é um caminho em G .

O subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $\{m\}$ é um caminho P^1 e o subgrafo induzido pela aresta $\{j, l\}$ é um caminho P^2 .

Num caminho $v_1, \dots, v_k$, dizemos que os vértices v_1 e v_k são os seus **extremos** e dizemos que os vértices v_i , $1 < i < k$, são os seus **vértices internos**.

Definição 1.4: circuito em G

Um **circuito** $C \subseteq G$ é um passeio

$$C = v_1, v_2, \dots, v_k, v_1 \quad (k \geq 3)$$

em G tal que $v_i \neq v_j$, sempre que $i \neq j$, ou seja, vértices não são repetidos exceto nos extremos do passeio.

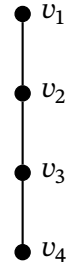


Figura 1.3: caminho.

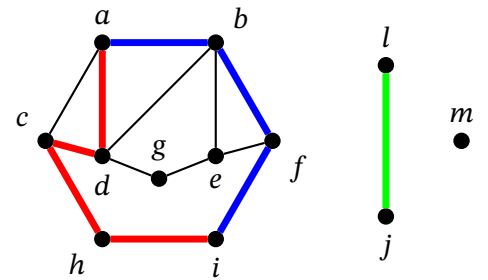


Figura 1.4: exemplos de caminhos em um grafo.

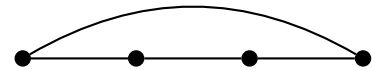


Figura 1.5: um circuito.

Exemplo 1.5: o grafo caminho e o grafo circuito

O grafo (V, E) dado por

$$V = \{1, \dots, k\}$$

$$E = \{\{i, i+1\} : 1 \leq i \leq k-1\}$$

para algum $k \geq 1$, é um caminho com k vértices (e $k-1$ arestas).

Analogamente, o grafo (V, E) dado por

$$V = \{1, \dots, k\}$$

$$E = \{\{i, i+1\} : 1 \leq i \leq k-1\} \cup \{\{k, 1\}\},$$

para algum $k \geq 3$, é um circuito com k vértices (e k arestas).

Um circuito com quatro vértices é representado pelo diagrama da Figura 1.5.

O número de arestas (e, portanto, o número de vértices) em um circuito é o **comprimento** desse circuito e denotamos um circuito de comprimento k por C^k . Por exemplo, o grafo G definido a partir da Figura 1.4; nele temos que $C^4 = G[\{b, d, e, g\}]$ é um circuito, bem como o subgrafo $C^5 = (V, E)$ dado por $V = \{a, b, d, e, g\}$ e $E = \{\{a, b\}, \{b, e\}, \{e, g\}, \{g, d\}, \{d, a\}\}$. Também é um circuito o subgrafo induzido pelas arestas cuja cor seja ou azul ou vermelha.

Denotamos por $\delta(G)$ o menor grau de um vértice de G , isto é,

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d_G(v)$$

chamado **grau mínimo** de G .

Proposição 1.1

Todo grafo G contém um caminho de comprimento pelo menos $\delta(G)$ e, se $\delta(G) \geq 2$, contém um circuito de comprimento pelo menos $\delta(G) + 1$.

Demonstração. Dado um grafo G , vamos exibir um caminho com pelo menos $\delta(G)$ arestas e um circuito com pelo menos $\delta(G) + 1$ arestas nos casos em que $\delta(G) \geq 2$.

Seja $P = x_0, x_1, \dots, x_k$ um caminho de comprimento máximo em G . De P ter comprimento máximo em G temos que $N_G(x_0) \subseteq V(P)$, caso

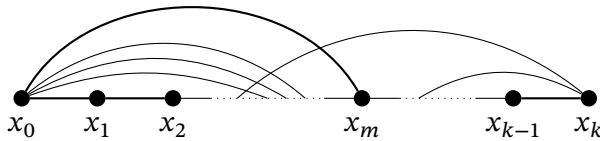


Figura 1.6: se $P = x_0, \dots, x_k$ é de comprimento máximo em G então seus extremos devem ter a vizinhança em $V(P)$.

contrário, haveria caminho mais longo que P em G . Logo, $|N_G(x_0)| \leq |V(P)| - 1$ e, como $|N_G(x_0)| \geq \delta(G)$ e $|E(P)| = |V(P)| - 1$, segue que $|E(P)| \geq \delta(G)$, isto é, P é um caminho de comprimento pelo menos $\delta(G)$.

Agora, tratando o caso de circuito, vamos supor que $\delta(G) \geq 2$. Se o grau mínimo é pelo menos dois, então o vértice x_0 tem um vizinho em P diferente de x_1 e assim está bem definido o número

$$m := \max\{j \in \{2, \dots, k\} : x_j \in N_G(x_0)\},$$

que é o maior índice em $\{2, \dots, k\}$ de um vértice vizinho de x_0 em P .

Basta notarmos que o circuito $x_0, x_1, \dots, x_m, x_0$ tem comprimento $m+1$ e que $N_G(x_0) \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, logo $m \geq |N_G(x_0)|$, portanto,

$$m \geq |N_G(x_0)| \geq \delta(G).$$

Portanto, $m+1 \geq \delta+1$, ou seja, o circuito C tem comprimento pelo menos $\delta(G)+1$. $\square$

Distância

Uma consequência importante da definição de caminho num grafo é que, com ela, temos uma definição de distância entre vértices do grafo, definida pelo caminho mais curto. Vamos formalizar essa definição.

O **comprimento** de um caminho P é número de arestas no caminho. Um caminho com n vértices tem $n-1$ arestas, portanto, comprimento $n-1$.

Definição 1.5: distância em G

Em um grafo $G = (V, E)$, a **distância** entre dois vértices quaisquer $u, v \in V$, denotada por $\text{dist}_G(u, v)$, é definida como o comprimento do menor caminho P com extremos u e v , quando existe algum caminho

$$\text{dist}_G(u, v) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \{G \supseteq P^k \text{ caminho com extremos } u, v\}.$$

Se u e v não são extremos de algum caminho em G , então convencionamos

$$\text{dist}_G(u, v) = \infty.$$

Convencionamos, como é usual, que ∞ satisfaz

$$n + \infty = \infty \quad \text{e} \quad n < \infty,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

No Exemplo 1.4, temos $\text{dist}_G(a, j) = \infty$, $\text{dist}_G(a, b) = 1$, $\text{dist}_G(a, i) = 3$, $\text{dist}_G(m, j) = \infty$.

Definição 1.6: grafo conexo

Um grafo G é **conexo** se para todos $u, v \in V(G)$ vale que

$$\text{dist}_G(u, v) < \infty.$$

Dados vértices $u, v \in V(G)$, dizemos que v **alcança** u em G se, e somente se, existe um caminho com extremos u e v em G . Assim, “alcança” é uma relação de equivalência em $V(G)$.

As classes de equivalência dessa relação são os subconjuntos dos vértices alcançáveis entre si, chamadas de **componentes conexas** do grafo. Equivalentemente, um grafo é conexo se e somente se tem uma única classe de equivalência pela relação “alcança”.

Proposição 1.2: $(V(G), \text{dist}_G)$ é espaço métrico

A função $\text{dist}_G : V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ é uma **métrica** em $V(G)$ pois satisfaz

- 1 $\text{dist}_G(u, v) = \text{dist}_G(v, u) \geq 0$ para todos $u, v \in V(G)$;
- 2 $\text{dist}_G(v, u) = 0$ se e somente se $u = v$;
- 3 a **desigualdade triangular**

$$\text{dist}_G(u, w) \leq \text{dist}_G(u, v) + \text{dist}_G(v, w) \quad (1.6)$$

para quaisquer $u, v, w \in V(G)$.

1.4 Outras noções de grafos

Em algumas situações precisamos de um modelo para um problema a ser resolvido e esse modelo seria um grafo se desconsiderássemos algumas peculiaridades da situação. Por exemplo, um mapa rodoviário pode ser modelado definindo-se um vértice para cada cidade e duas cidades formam uma aresta no grafo (modelo) se existe rodovia ligando as cidades correspondentes aos vértices. Normalmente, distância é um parâmetro importante nesses mapas e assim as arestas devem ter um comprimento associado a elas, entretanto, “comprimento de aresta” não faz parte da definição de um grafo. Num outro exemplo, se estamos interessados em rotas de tráfego dentro de uma cidade podemos definir um vértice por esquina e duas esquinas consecutivas numa mesma rua formam uma aresta. Nesse caso, as ruas têm sentido (mão e contramão) e as arestas também deveriam ter mas, novamente, essa característica não faz parte da definição de grafos. Esses problemas e muitos outros podem ser modelados com “outros tipos” de grafos. Alguns desses outros tipos são

- **grafo com pesos nas arestas** é definido por um tripla (V, E, ρ) de modo que (V, E) é um grafo e $\rho : E \rightarrow R$ é uma função que assume valores em R ; usualmente $R \subseteq \mathbb{R}$;

- **grafo orientado** têm orientação nas arestas, de modo que as arestas, ou **arcos**, agora são pares ordenados. Um grafo orientado fica definido por um par (V, E) com $E \subseteq V \times V$ sendo uma relação irreflexiva e assimétrica;
- **grafo dirigido ou digrafo** é dado por um par (V, E) onde $E \subseteq V \times V \setminus \{(v, v) \mid v \in V\}$;
- **multigrafo** é dado por um conjunto V de multigrafo vértices, um conjunto E de arestas e uma função de E em $\binom{V}{2}$ que diz quem são os extremos de cada aresta; nesse caso podemos ter mais de uma aresta com os mesmos extremos.

Em cada um dos casos acima, podemos tomar o grafo naturalmente definido por essas estruturas, chamado **grafo subjacente**. Outros tipos podem ser derivados combinando esses tipos de grafos, por exemplo, grafo dirigido com pesos nas arestas. Um exemplo de diagrama de grafo orientado com pesos nas arestas é dado na figura abaixo. Usamos

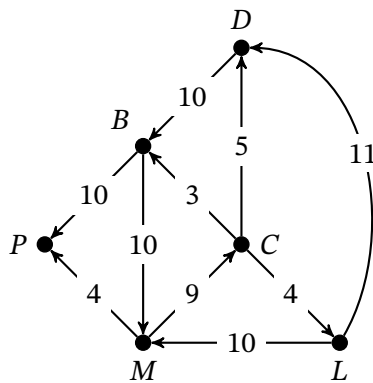


Figura 1.7: exemplo de grafo orientado.

$\overset{a}{\bullet} \rightarrow \overset{c}{\bullet}$ para representar a aresta orientada (a, c) .

Exercícios

Exercício 1. *Demonstre que em todo grafo o número de vértices com grau ímpar é par.*

Exercício 2. *Um químico deseja embarcar os produtos P, Q, R, S, T, O, X usando o menor número de caixas. Alguns produtos não podem ser colocados numa mesma caixa porque reagem. Os produtos P, Q, R, X reagem entre si; P reage com O e com S e vice-versa; T também reage com O e com S e vice-versa. Descreva o grafo que modela essa situação, mostre um diagrama desse grafo e use-o para descobrir o menor número de caixas necessárias para embarcar os produtos com segurança.*

Exercício 3. *Adaltina esperava as amigas Brandelina, Clodina, Dejaina e Edina para um lanche em sua casa. Enquanto esperava preparou os lanches: Bauru, Misto quente, Misto frio e X-salada. Brandelina gosta de Misto frio e de X-salada; Clodina de Bauru e X-salada; Dejaina gosta*

de Misto quente e Misto frio; Edina gosta de de Bauru e Misto quente. Descreva o grafo que modela essa situação, mostre um diagrama desse grafo e use-o para descobrir se é possível que cada amiga de Adaltina tenha o lanche que gosta. Se possível, determine o número de soluções.

Exercício 4. Defina todos os grafos sobre o conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 4\}$ e tamanho 6.

Exercício 5. Para todo $n \in \mathbb{N}$, qual é o número máximo de arestas que pode ter um grafo com n vértices?

Exercício 6. O **complemento** de um grafo G , denotado por G^c , é o grafo que tem o mesmo conjunto de vértices de G e dois vértices formam uma aresta em G^c se e somente se **não** formam uma aresta de G :

$$\begin{aligned} V(G^c) &= V(G), \\ E(G^c) &= \binom{V(G)}{2} \setminus E(G) = \{\{u, v\} \subset V(G) : \{u, v\} \notin E(G)\}. \end{aligned}$$

Dê o complemento dos seguintes grafos

(i) G dado por

$$\begin{aligned} V(G) &= \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ E(G) &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}. \end{aligned}$$

(ii) H dado por

$$\begin{aligned} V(H) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \\ E(H) &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}\}. \end{aligned}$$

(iii) B dado por

$$\begin{aligned} V(B) &= \{a, b, c, 1, 2, 3\}, \\ E(B) &= \{\{a, 1\}, \{a, 2\}, \{a, 3\}, \{b, 1\}, \{b, 2\}, \{b, 3\}, \{c, 1\}, \{c, 2\}, \{c, 3\}\}. \end{aligned}$$

Exercício 7. Se definirmos a **união** dos grafos G e H por $G \cup H := (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$, a união $G \cup H$ é um grafo?

Exercício 8. Se definirmos **intersecção** dos grafos G e H por $G \cap H := (V(G) \cap V(H), E(G) \cap E(H))$, a intersecção $G \cap H$ é um grafo?

Exercício 9. Um grafo é chamado de **completo** sobre V se todo par de vértices de V é uma aresta do grafo, ou seja $E = \binom{V}{2}$. Um grafo completo com n vértices é denotado por K^n . Prove que para qualquer grafo G vale que $G \cup G^c = K^n$.

Exercício 10. Considere o caso geral do exercício 2: Um químico deseja embarcar os produtos $p_1, p_2, \dots, p_n$ usando o menor número de caixas. Alguns produtos não podem ser colocados numa mesma caixa porque reagem e o químico conhece uma listagem com m pares de produtos que

reagem. Seja G o grafo que modela esse problema, onde vértices são produtos e arestas os pares que reagem. Denotemos por $\chi(G)$ o número de mínimo de caixas de modo que seja possível encaixotar os produtos com segurança. Prove que

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

(Dica: em uma distribuição mínima de caixas, a cada duas caixas, precisa existir pelo menos um produto em uma caixa reagindo com um produto da outra caixa. Assim podemos garantir um número mínimo m de arestas para o grafo.)

Exercício 11. Vimos que $\delta(G)$ denota o grau mínimo de G . Analogamente, definimos $\Delta(G)$, o **grau máximo** de G , por

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(v)$$

e definimos $d(G)$, o **grau médio** de G , por

$$d(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d_G(v)$$

para todo G com pelo menos 1 vértice, caso contrário $d(G) := 0$.

Demonstre que $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$ para todo grafo G .

Exercício 12. Decida se pode existir um grafo G com vértices que têm graus 2, 3, 3, 4, 4, 5, respectivamente. E graus 2, 3, 4, 4, 5? Se sim, descreva-os.

Exercício 13. Seja G um grafo com 14 vértices e 25 arestas. Se todo vértice de G tem grau 3 ou 5, quantos vértices de grau 3 o grafo G possui?

Exercício 14. Chico e sua esposa foram a uma festa com três outros casais. No encontro deles houveram vários apertos de mão. Ninguém apertou a própria mão ou a mão da(o) esposa(o), e ninguém apertou a mão da mesma pessoa mais que uma vez. Após os cumprimentos Chico perguntou para todos, inclusive para a esposa, quantas mãos cada um apertou e recebeu de cada pessoa uma resposta diferente. Quantas mãos Chico apertou?

Exercício 15. Prove que existem pelo menos dois vértices com o mesmo grau em todo grafo de ordem maior ou igual a dois.

Exercício 16. Para um número natural r , um grafo é **r -regular** se todos os vértices têm grau r . Para um grafo r -regular com n vértices e m arestas, expresse m em função de n e r . Dê exemplo de um grafo 3-regular que não é completo.

Exercício 17. Demonstre que em todo grafo G com $\delta(G) > 0$ e $|E(G)| < |V(G)|$ existem pelo menos dois vértices de grau 1.

Exercício 18. Quantos subgrafos tem o grafo $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{\{1, 2\}\})$?

Exercício 19. Quantos subgrafos completos tem o grafo completo de ordem n ?

Exercício 20. Sejam G um grafo e $M \subseteq E(G)$. Tome o subconjunto

$$U = \bigcup_{e \in M} e$$

de vértices de G . Prove ou dê um contraexemplo para $G[U] = G[M]$.

Exercício 21. Descubra um subgrafo induzido de

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ e}$$

$$E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}, \{8, 5\}, \{8, 6\}, \{5, 6\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$$

que seja 1-regular e tenha o maior número possível de arestas. (Qual a relação com a resolução do exercício 3?)

Exercício 22. Mostre que em qualquer coloração das arestas do grafo K^6 com as cores preta e branca vale: ou K^6 contém um k^3 com todas as arestas pretas ou K^6 contém um k^3 com todas as arestas brancas.

Exercício 23. Dados um grafo G e $U \subseteq V(G)$, dizemos que U é um **conjunto independente**, ou **conjunto estável**, em G se $E(G[U]) = \emptyset$, ou seja, não há par de vértices adjacentes ambos pertencentes a U .

Denotamos por $\alpha(G)$ a cardinalidade do maior conjunto independente em G ,

$$\alpha(G) = \max\{|A| : A \subset V(G) \text{ é um conjunto independente}\}.$$

Demonstre que se $d(G) > \alpha(G)$ então G contém triângulo.

Exercício 24. Dados um grafo G e $U \subseteq V(G)$, dizemos que U é um **clique** em G se $G[U]$ é completo.

Denotamos por $\omega(G)$ a cardinalidade do maior clique em G

$$\omega(G) = \max\{|A| : A \subset V(G) \text{ é um clique}\}.$$

Demonstre que $\omega(G) = \alpha(G^c)$.

Exercício 25. Demonstre que as desigualdades abaixo valem para todo grafo G

- (i) $\alpha(G) \geq |V(G)|/(\Delta(G) + 1)$;
- (ii) $\alpha(G) \leq |E(G)|/\delta(G)$, se $\delta(G) \neq 0$;
- (iii) $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Exercício 26. Suponha $H \subseteq G$. Prove ou refute as desigualdades:

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| (i) $\alpha(H) \leq \alpha(G)$; | (iii) $\omega(G) \leq \omega(H)$; |
| (ii) $\alpha(G) \leq \alpha(H)$; | (iv) $\omega(H) \leq \omega(G)$. |

Exercício 27. É verdade que todo grafo com pelo menos três vértices, exatamente dois vértices de grau 1 e os demais vértices com grau 2 é um caminho?

Exercício 28. Escreva um algoritmo que recebe uma grafo G e decide se G é um caminho. Determine a complexidade do algoritmo.

Exercício 29. Sejam $P = u_1, u_2, \dots, u_k$ e $Q = v_1, v_2, \dots, v_\ell$ duas sequências de vértices de um grafo. Definimos a **concatenação** dessas sequências como a sequência dos vértices de P seguidos dos vértices de Q , denotada $P, Q = u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_\ell$. Supondo que P e Q sejam caminhos no grafo, sob que condições a sequência P, Q é caminho?

Exercício 30. Prove que se $u_1, u_2, \dots, u_k$ é um passeio em G então existem índices $i_1, i_2, \dots, i_t$ tais que a subsequência $u_1, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_t}, u_k$ é um caminho em G . Também, prove que se $u_1, v_2, \dots, v_{k-1}, u_k$ é um passeio distinto do anterior, então G contém circuito.

Exercício 31. Prove a desigualdade triangular (equação (1.6)).

Exercício 32. Mostre que a relação $e \sim f$ em $E(G)$ dada por $e = f$ ou existe um circuito $C \subset G$ tal que e e f pertencem a $E(C)$ é uma relação de equivalência.

Exercício 33. Seja k um número natural. O **k -cubo** é o grafo cujo conjunto de vértices são as sequências binárias de k bits e dois vértices são adjacentes se e somente se as k -tuplas correspondentes diferem exatamente em uma posição. Determine o número de vértices e de arestas do k -cubo. Determine os parâmetros α (conjunto independente máximo) e ω (clique máximo) do k -cubo.

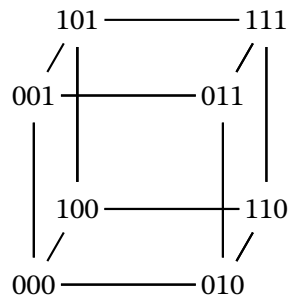


Figura 1.8: um diagrama do 3-cubo.

Exercício 34. Definimos o **diâmetro** do grafo G como a maior distância entre dois vértices quaisquer de G , ou seja

$$\text{diam}(G) = \max_{u,v \in V(G)} \text{dist}_G(u, v).$$

Naturalmente, $\text{diam}(G) = \infty$ se existirem dois vértices no grafo G que não são extremos de um caminho.

Determine o diâmetro do k -cubo.

Exercício 35. Definimos a **cintura** do grafo G como o comprimento do menor circuito contido em G , ou seja

$$\text{cin}(G) = \min \{|E(C)| : \text{existe um circuito } C \subseteq G\},$$

quando existe um circuito, caso contrário convencionamos que $\text{cin}(G) = \infty$.

Determine a cintura do k -cubo.

Exercício 36. Seja k um número natural. O **grafo de Fibonacci** F_k é o grafo cujo conjunto de vértices são as sequências binárias de tamanho k sem ocorrências de 1 consecutivos; dois vértices são adjacentes se e somente se as k -tuplas correspondentes diferem exatamente em uma posição.

Desenhe um diagrama do F_3 .

Determine o número de vértices, arestas, o diâmetro e a cintura do F_k . Determine os parâmetros α (conjunto independente máximo) e ω (clique máximo) do grafo F_k .

Exercício 37. Seja G um grafo conexo. Mostre que se existem $w \in V(G)$ e $\{u, v\} \in E(G)$ tais que $\text{dist}(w, u) = \text{dist}(w, v)$ então $\text{cin}(G) \leq \text{dist}(w, u) + \text{dist}(w, v) + 1$.

Exercício 38. Seja p um número primo e tome $V = \{0, 1, \dots, p-1\}$. Defina o grafo 3-regular $G = (A \cup B, E)$ com $A = V \times \{a\}$ e $B = V \times \{b\}$, ou seja, o que queremos é que A e B sejam duas cópias disjuntas de V .

Cada vértice $(x, a) \in A$ é adjacente aos vértices (x, b) , $(x+1, b)$ e $(x+y, b)$ de B onde $y \neq 0, 1$ é fixo e a soma é feita módulo p .

Demonstre que qualquer subgrafo induzido de G de ordem $p+1$ contém um caminho de comprimento 2 quando $y = 2, (p+1)/2, p-1$. O mesmo vale para qualquer $y \neq 0, 1$ de V ?