3. Exercícios da semana 2

(1) Dê provas para
   (a) $\vdash (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$.
   (b) $\vdash (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$.

(2) Seja $\langle \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \rangle$ uma prova. A sequência $\langle \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\ell \rangle$ para todo ℓ com $1 \leq \ell \leq n$ é uma prova?

(3) Prove os seguintes teoremas lógicos para quaisquer fórmulas α e β.

   (a) $\vdash (\beta \vee \alpha) \to (\alpha \vee \beta)$.
   (b) $\vdash (\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg\beta)$.
   (c) $\vdash (\neg\beta \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \beta)$.
   (d) $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$
   (e) $\vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$
   (f) $\vdash \alpha \wedge \beta \to \beta$
   (g) $\vdash \beta \to \alpha \vee \beta$
   (h) $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

(4) Escreva uma demonstração para autodedução, a monotonicidade e regra do corte de $\vdash$.

(5) Verifique as seguintes regras derivadas de inferência.

(IC): $\dfrac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$ **(ID2):** $\dfrac{\beta}{\alpha \vee \beta}$ **(SD):** $\dfrac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta}$ **(DM$\wedge$):** $\dfrac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}$

(EC1): $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$ **(MT):** $\dfrac{\alpha \to \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}$ **(DM$\vee$):** $\dfrac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$ **(C):** $\dfrac{\neg\alpha \to \alpha}{\alpha}$.

(6) Justifique o seguinte método de prova:

$$\text{Se } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta \text{ e } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta \text{ então } \Gamma \vdash \alpha.$$

Use esse fato para provar

$$\{\neg\alpha \to (\beta \wedge \gamma), (\gamma \vee \delta) \to \varepsilon, \varepsilon \to \neg\beta\} \vdash \alpha.$$