EXERCÍCIOS

(1) Simbolize as seguintes sentenças (abertas ou não) na linguagem da Aritmética.

(a) Todo número par maior do que dois pode ser escrito como soma de dois números primos.

(b) x possui exatamente três divisores.

(c) Todo número positivo admite raiz quadrada.

(d) z é o máximo divisor comum de x e y.

(e) Existem infinitos números primos.

(2) Identifique as ocorrências livres e não-livres de variáveis nas fórmulas abaixo.

(a) $(\exists x((1+y) \doteq x)) \wedge \forall y(y < x)$.

(b) $(\exists x(x \cdot x \doteq 2)) \to (x+1 \doteq 0)$.

(c) $\forall x \exists y(z < 1)$.

(d) $(\exists x((1+y) \doteq x)) \wedge (\forall y(y < x))$.

(e) $(x < y+1) \to \forall x \exists y(x \neq y)$.

(f) $\forall x(x > (1+1) \to y < (x+x))$.

(g) $(\forall y \exists z(x+y \doteq z)) \to (x \doteq 0)$.

(h) $\forall x(((x < 6) \wedge (0 < x)) \to \exists y(x \cdot y \doteq z))$.

(i) $\forall x((x \doteq 0) \vee (0 < x)) \wedge \exists y(y \cdot (1+1) \doteq x)$.

(j) $\forall y \forall z((y \cdot z \doteq x) \to ((y \neg z) \wedge ((y \doteq 1) \vee (z \doteq 1))))$.

(3) (**Subfórmulas**) Defina indutivamente o conceito de subfórmula para as fórmulas da linguagem genérica de primeira ordem.

(4) Dê uma definição precisa de *escopo* de um quantificador.

(5) Use indução para definir o grau de complexidade de uma fórmula. Por exemplo grau$(s \doteq t) = 0$, grau$(R^2(x,y)) = 0$, grau$(\neg(s \doteq t)) = 1$, grau$(\forall x\, R^2(x,y)) = 1$, grau$(\forall y \forall x\, R^2(x,y)) = 2$.

(6) Restabeleça os parênteses de acordo com as regras de omissão de parênteses.

(a) $\forall x_2 \exists x_1 R_1^2 x_1, x_2$.

(b) $\forall x_2 \neg R_1^1 x_1 \to R_1^3 x_1, x_1, x_2 \vee \forall x_1 R_1^1 x_1$.

(c) $\neg \forall x_1 R_1^1 x_1 \to \exists x_2 R_1^1 x_2 \to R_1^2 x_1, x_2 \wedge R_1^1 x_2$.

(7) Sejam t é um termo e α uma sentença. O termo t é uma substituição admissível em α para qualquer variável x? Qual é o resultado da substituição?

(8) O algoritmo da divisão diz que para quaisquer naturais $a,\ b$, com $b \neq 0$, existem naturais q e r únicos tais que $a = bq + r$ e $\leqslant 0 < r < b$. Expresse o teorema da divisão na linguagem da aritmética.