EXERCÍCIOS

(1) Seja v uma atribuição associada a estrutura $\mathfrak{M}$ para uma linguagem $\mathscr{L}$. Suponha que para as variáveis x e y temos que $v(x) = v(y)$. Use indução para termos para demonstrar que se t é termo e s é obtido de t substituindo-se uma ou mais ocorrências de x por y então $\bar{v}(s) = \bar{v}(t)$.

(2) Considere a linguagem da aritmética $\mathscr{L}_N$ com a estrutura canônica $\mathfrak{N}$:

> $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, <^{\mathfrak{N}}, S^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}})$ onde $0^{\mathfrak{N}}$ é o número $0 \in \mathbb{N}$; a função $S^{\mathfrak{U}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ é dada por $S^{\mathfrak{U}}(n) = n+1$, a relação binária $<^{\mathfrak{N}}$ e as operações $+^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}$ são o “menor que”, a soma e o produto usuais de números naturais.

e a atribuição constante $v(x) = 2$ para toda variável.

(a) Verifique que $(\mathfrak{N}, s) \vDash x \doteq +(1,1)$.

(b) Diga para quais atribuições associadas a $\mathfrak{N}$ a seguinte fórmula é satisfeita:

(b.1) $\forall x\,((\exists z(x \cdot z \doteq y)) \to \exists z\,((1+1) \cdot z \doteq x)))$

(b.2) $(\exists x(x + x \doteq y)) \to (\exists y(y + x \doteq y))$

(3) Seja $\mathscr{L}$ uma linguagem de primeira ordem com constante a, função unária G, relação unária R e relações binárias $\{P, Q\}$. Seja $\mathfrak{A}$ a estrutura definida por

- $D := \mathbb{N}$
- $a^{\mathfrak{A}} := 2$;
- $G^{\mathfrak{A}}(n) := n+1$;
- $R^{\mathfrak{A}}(n) := \{n \in \mathbb{N} :\ n \text{ é par}\}$;
- $P^{\mathfrak{A}} := \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ n \leq m\}$;
- $Q^{\mathfrak{A}} := \varnothing$.

Para cada uma das sentenças abaixo, verifique se é satisfeita ou não na estrututra.

(a) $\exists x G(x) \wedge \forall x(G(x) \doteq x)$;

(b) $\exists x \exists y Q(x,y)$;

(c) $\neg R(a) \to \forall x \forall y Q(x,y)$;

(d) $\forall x(R(x) \to \forall x R(G(G(x)))$;

(e) $\forall x \exists y P(x,y)$;

(f) $\exists y \forall x P(x,y)$;

(g) $\exists y \forall x P(y,x)$;

(h) $\forall x\big(R(x) \vee \exists y\big(y \doteq G(x) \wedge R(y)\big)\big)$.

(4) Seja $\mathscr{L}_G$ a linguagem dos grupos com constante e e símbolo funcional $\circ$. Chamamos de **axiomas de grupo** o seguinte conjunto Γ de sentenças da linguagem $\mathscr{L}_G$:

(G1) $\forall x\,((x \circ e = x) \wedge (e \circ x = x))$;

(G2) $\forall x \exists y\,(x \circ y = e)$;

(G3) $\forall x \forall y \forall z\,(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$.

(a) Seja α a sentença $\forall x\,(x \circ x = e)$.

Mostre que a sentença α é **independente** dos axiomas de grupo mostrando uma interpretação para $\{G1, G2, G3, \alpha\}$ e outra interpretação para $\{G1, G2, G3, \neg\alpha\}$.

(b) Tome $\mathscr{G}$ a seguinte estrutura para $\mathscr{L}_G$

- $D := \{1,2\}$;
- $e^{\mathscr{G}} := 1$;
- $$\begin{array}{c|cc} \circ^{\mathscr{G}} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}$$

Verifique se os axiomas são verdadeiros nesse modelo.

(5) Demonstre usando indução para fórmula que se t é uma substituição admissível para x em α então

$$(\mathfrak{M}, v) \vDash [\alpha]_x^t \text{ sse } (\mathfrak{M}, [v]_{x \rightsquigarrow \bar{v}(t)}) \vDash \alpha.$$

(6) Considere a estrutura $\mathscr{E}$ dada por

- $E = \{1\}$;
- $r^{\mathscr{E}} = p^{\mathscr{E}} = \{1\}$;
- $q^{\mathscr{E}} = \{(1,1)\}$;
- $a^{\mathscr{E}} = b^{\mathscr{E}} = c^{\mathscr{E}} = 1$;
- $f^{\mathscr{E}} : E \to E,\ f^{\mathscr{E}}(x) = 1$;
- $g^{\mathscr{E}} : E \times E \to E,\ g^{\mathscr{E}}(x,y) = x$.

Verificar se as sentenças a seguir são satisfeitas.

(a) $\forall x_1(\exists x_2(\exists x_3(p(x_1) \to (r(x_2) \wedge r(x_3) \wedge (x_1 \doteq g(x_2,x_3)))))).$

(b) $\forall x_1(\exists x_2(\exists x_3(q(x_1,x_2) \to (r(x_2) \wedge r(x_3) \wedge (x_1 \doteq g(x_2,x_3)))))).$

(c) $\forall x(q(f(x),x) \to r(x))$;

(d) $\forall x(\neg q(f(x),x) \to r(x))$;

(e) $\neg\forall x(q(f(x),x) \to r(x))$;

(7) Demonstre que a generalização de uma fórmula é válida se e somente se a fórmula é válida, ou seja, para uma fórmula α de uma linguagem de primeira ordem qualquer

$$\vDash \alpha \text{ se, e somente se} \vDash \forall x\, \alpha$$

qualquer que seja a variável x.

(8) Demonstre que uma generalização para uma variável que não ocorre livre na fórmula é consequência lógica da própria fórmula, isto é, se x não ocorre livre em α então

$$\alpha \vDash \forall x\, \alpha.$$