10. SATISFAZIBILIDADE

A ideia por trás da semântica da lógica de predicados é muito simples. Seguindo Tarski, nós assumimos que uma sentença é verdadeira em uma estrutura se esse é de fato o caso, ou seja, se o "significado dentro de uma estrutura" atribuído aos símbolos formais é verdadeiro naquela estrutura. Sejam $\mathscr{L}$ um linguagem de primeira ordem, $\mathfrak{M}$ e v uma estrutura e uma atribuição para a linguagem $\mathscr{L}$, respectivamente. O par $(\mathfrak{M}, v)$ é chamado de **interpretação** a qual **satisfaz** a fórmula $\alpha \in \mathscr{L}$, denotado

$$(\mathfrak{M}, v) \models \alpha$$

nas seguintes circunstâncias

(1) $(\mathfrak{M}, v) \models (t_1 \doteq t_2)$ se e só se $\bar{v}(t_1) = \bar{v}(t_2)$;
(2) $(\mathfrak{M}, v) \models R(t_1, \dots, t_n)$ se e só se $(\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_n)) \in R^{\mathfrak{M}}$;
(3) $(\mathfrak{M}, v) \models \neg\gamma$ se e só se $(\mathfrak{M}, v) \not\models \gamma$;
(4) $(\mathfrak{M}, v) \models \gamma \to \beta$ se e só se $(\mathfrak{M}, v) \models \neg\gamma$ ou $(\mathfrak{M}, v) \models \beta$;
(5) $(\mathfrak{M}, v) \models \forall x\, \beta$ se e só se para todo $a \in E$, $(\mathfrak{M}, [v]_{x \rightsquigarrow a}) \models \beta$

em que R é um símbolo relacional n-ário da linguagem, $t_1, \dots, t_n$ são termos, x é variável e γ e β fórmulas da linguagem. Das abreviaturas adotadas deduzimos que

6. $(\mathfrak{M}, v) \models \gamma \vee \beta$ se e só se $(\mathfrak{M}, v) \models \gamma$ ou $(\mathfrak{M}, v) \models \beta$
7. $(\mathfrak{M}, v) \models \gamma \wedge \beta$ se e só se $(\mathfrak{M}, v) \models \gamma$ e $(\mathfrak{M}, v) \models \beta$;
8. $(\mathfrak{M}, v) \models \exists x\, \gamma$ se e só se $(\mathfrak{M}, [v]_{x \rightsquigarrow a}) \models \gamma$ para algum $a \in E$.

Exemplo 102. Por exemplo, com $\mathfrak{U}$ do exemplo 97 de domínio $\{1,2,3\}$ e v tal que $v(y) = 2$.

$$\begin{aligned}(\mathfrak{U}, v) \models \forall x\,(x + y \doteq 0) &\text{ sse para todo } a \in \{1,2,3\},\ (\mathfrak{U}, [v]_{x \rightsquigarrow a}) \models (x + y \doteq 0)\\ &\text{ sse para todo } a \in \{1,2,3\},\ \overline{[v]_{x \rightsquigarrow a}}(x + y) = \overline{[v]_{x \rightsquigarrow a}}(0)\\ &\text{ sse para todo } a \in \{1,2,3\},\ [v]_{x \rightsquigarrow a}(x) +^{\mathfrak{U}} [v]_{x \rightsquigarrow a}(y) = 1\\ &\text{ sse para todo } a \in \{1,2,3\},\ a +^{\mathfrak{U}} 2 = 1\end{aligned}$$

o que não é verdadeiro na estrutura pois $2 +^{\mathfrak{U}} 2 = 3$, logo a fórmula $\forall x\,(x + y \doteq 0)$ não é satisfeita por essa interpretação, ou seja

$$(\mathfrak{U}, v) \not\models \forall x\,(x + y = 1).$$

Exemplo 103. A linguagem $\mathscr{L}_F$ para a teoria dos corpos tem símbolos extralógicos $0, 1, +, \cdot$. Uma $\mathscr{L}_F$-estrutura é $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, 0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}}, +^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}})$ com os significados usuais e tomamos a atribuição $v(x_n) = n + 1$. Então

$$(\mathfrak{R}, v) \models \forall x_1 \big((0 \cdot x_1 \doteq x_3) \to (x_3 \doteq 0)\big)$$

pois $(\mathfrak{R}, v) \vDash \forall x_1 \big((0 \cdot x_1 \doteq x_3) \rightarrow (x_3 \doteq 0)\big)$

$$
\begin{aligned}
&\text{sse para todo } a \in \mathbb{R},\ (\mathfrak{R}, [v]_{x_1 \rightsquigarrow a}) \vDash \big((0 \cdot x_1 \doteq x_3) \rightarrow (x_3 \doteq 0)\big)\\
&\text{sse para todo } a \in \mathbb{R},\ (\mathfrak{R}, [v]_{x_1 \rightsquigarrow a}) \vDash \neg(0 \cdot x_1 \doteq x_3) \text{ ou } (\mathfrak{R}, [v]_{x_1 \rightsquigarrow a}) \vDash (x_3 \doteq 0)\\
&\text{sse para todo } a \in \mathbb{R},\ (\mathfrak{R}, [v]_{x_1 \rightsquigarrow a}) \vDash (0 \cdot x_1 \neq x_3) \text{ ou } (\mathfrak{R}, [v]_{x_1 \rightsquigarrow a}) \vDash (x_3 \doteq 0)\\
&\text{sse para todo } a \in \mathbb{R},\ \overline{[v]_{x_1 \rightsquigarrow a}}(0 \cdot x_1) \neq \overline{[v]_{x_1 \rightsquigarrow a}}(x_3) \text{ ou } \overline{[v]_{x_1 \rightsquigarrow a}}(x_3) = \overline{[v]_{x_1 \rightsquigarrow a}}(0)\\
&\text{sse para todo } a \in \mathbb{R},\\
&\qquad \overline{[v]_{x_1 \rightsquigarrow a}}(0) \cdot^{\mathfrak{R}} \overline{[v]_{x_1 \rightsquigarrow a}(x_1)} \neq \overline{[v]_{x_1 \rightsquigarrow a}}(x_3) \text{ ou } \overline{[v]_{x_1 \rightsquigarrow a}}(x_3) = \overline{[v]_{x_1 \rightsquigarrow a}}(0)\\
&\text{sse para todo } a \in \mathbb{R},\ 0^{\mathfrak{R}} \cdot^{\mathfrak{R}} a \neq 4 \text{ ou } 4 = 0^{\mathfrak{R}}
\end{aligned}
$$

isto é, a interpretação satisfaz a fórmula se, e somente se, em $\mathbb{R}$ temos $0 \neq 4$ ou $4 = 0$, portanto, a interpretação fornecida pela estrutura e pela atribuição satisfaz a fórmula.

Exemplo 104. Em $\mathscr{L}_O$ (exemplo 96), considere a estrutura $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <^{\mathcal{Q}})$ com $<^{\mathcal{Q}}$ o menor usual sobre o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e seja v uma atribuição qualquer. Então

(1) $(\mathcal{Q}, v) \vDash \forall x_1 (\exists x_2 (x_1 < x_2))$ e
(2) $(\mathcal{Q}, v) \vDash \exists x_3 (\exists x_4 (x_3 < x_4 \rightarrow x_3 = x_4))$

Para o primeiro exemplo temos que $(\mathcal{Q}, v) \vDash \forall x_1 (\exists x_2 (x_1 < x_2))$

$$
\begin{aligned}
&\text{sse para todo } a \in \mathbb{Q},\ (\mathcal{Q}, [v]_{x_1 \rightsquigarrow a}) \vDash \exists x_2 (x_1 < x_2)\\
&\text{sse para todo } a \in \mathbb{Q}, \text{ para algum } b \in \mathbb{Q},\ (\mathcal{Q}, [v]_{\substack{x_1 \rightsquigarrow a\\ x_2 \rightsquigarrow b}}) \vDash x_1 < x_2\\
&\text{sse para todo } a \in \mathbb{Q}, \text{ para algum } b \in \mathbb{Q}, \overline{[v]_{\substack{x_1 \rightsquigarrow a\\ x_2 \rightsquigarrow b}}}(x_1) <^{\mathfrak{Q}} \overline{[v]_{\substack{x_1 \rightsquigarrow a\\ x_2 \rightsquigarrow b}}}(x_2)\\
&\text{sse para todo } a \in \mathbb{Q}, \text{ para algum } b \in \mathbb{Q},\ a <^{\mathfrak{Q}} b
\end{aligned}
$$

o que é verdadeiro na estrutura.

Agora, no segundo exemplo $(\mathscr{Q}, v) \vDash \exists x_3\,(\exists x_4\,(x_3 < x_4 \to x_3 \doteq x_4))$

$$
\begin{aligned}
&\text{sse para algum } a \in \mathbb{Q},\ (\mathscr{Q}, [v]_{x_3 \rightsquigarrow a}) \vDash \exists x_4\,(x_3 < x_4 \to x_3 \doteq x_4)\\
&\text{sse para algum } a \in \mathbb{Q},\ \text{para algum } b \in \mathbb{Q},\ (\mathscr{Q}, [v]_{\substack{x_3 \rightsquigarrow a\\ x_4 \rightsquigarrow b}}) \vDash (x_3 < x_4 \to x_3 \doteq x_4)\\
&\text{sse para algum } a \in \mathbb{Q},\ \text{para algum } b \in \mathbb{Q},\\
&\quad (\mathscr{Q}, [v]_{\substack{x_3 \rightsquigarrow a\\ x_4 \rightsquigarrow b}}) \vDash \neg(x_3 < x_4) \text{ ou } \vDash (\mathscr{Q}, [v]_{\substack{x_3 \rightsquigarrow a\\ x_4 \rightsquigarrow b}})(x_3 \doteq x_4)\\
&\text{sse para algum } a \in \mathbb{Q},\ \text{para algum } b \in \mathbb{Q},\\
&\quad [v]_{\substack{x_3 \rightsquigarrow a\\ x_4 \rightsquigarrow b}}(x_3) \geq^{\mathfrak{Q}} [v]_{\substack{x_3 \rightsquigarrow a\\ x_4 \rightsquigarrow b}}(4) \text{ ou } [v]_{\substack{x_3 \rightsquigarrow a\\ x_4 \rightsquigarrow b}}(x_3) = [v]_{\substack{x_3 \rightsquigarrow a\\ x_4 \rightsquigarrow b}}(x_4)\\
&\text{sse para algum } a \in \mathbb{Q},\ \text{para algum } b \in \mathbb{Q},\ a \geq^{\mathfrak{Q}} b \text{ ou } a = b
\end{aligned}
$$

que é verdadeiro na estrutura.

Exemplo 105. Para qualquer $(\mathfrak{M}, v)$, se a variável x não ocorre no termo t então

$$(\mathfrak{M}, v) \vDash \exists x\,(x \doteq t).$$

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{M}, v) \vDash \exists x\,(x = t) \text{ sse } &\text{ para algum } a \in M,\ (\mathfrak{M}, [v]_{x \rightsquigarrow a}) \vDash (x \doteq t)\\
\text{sse } &\text{ para algum } a \in M,\ [v]_{x \rightsquigarrow a}(x) = \overline{[v]_{x \rightsquigarrow a}}(t)\\
\text{sse } &\text{ para algum } a \in M,\ a = \overline{[v]_{x \rightsquigarrow a}}(t)
\end{aligned}
$$

que é verdade pois, da definição, $\overline{[v]_{x \rightsquigarrow a}}(t) \in M$ e $\overline{[v]_{x \rightsquigarrow a}}(t) = \bar{v}(t)$ pois x não ocorre em t. Portanto, $(\mathfrak{M}, v) \vDash \exists x\,(x = t)$.

METATEOREMA 21 *Sejam $\mathfrak{M}$ uma estrutura para uma linguagem de primeira ordem $\mathscr{L}$. Para toda fórmula $\alpha \in \mathscr{L}$, se v e w são atribuições tais que $v(y) = w(y)$, para toda variável y que ocorre livre em α, então*

$$(\mathfrak{M}, v) \vDash \alpha \textit{ se, e somente se, } (\mathfrak{M}, w) \vDash \alpha.$$

Em particular, se α não tem variáveis livres, então $(\mathfrak{M}, v) \vDash \alpha$ se, e somente se, $(\mathfrak{M}, w) \vDash \alpha$ para quaisquer v e w.

Escrevemos

$$\mathfrak{M} \vDash \alpha$$

se $(\mathfrak{M}, v) \vDash \alpha$ para toda atribuição v é dizemos que α é **válida** em $\mathfrak{M}$.

COROLÁRIO 106 *Se α é uma sentença de $\mathscr{L}$ e $\mathfrak{M}$ é uma estrutura para $\mathscr{L}$, então $\mathfrak{M} \vDash \alpha$ ou $\mathfrak{M} \vDash \neg\alpha$.*

Demonstração do Teorema. A demonstração é por indução em fórmula. O teorema vale para fórmulas atômicas: se α é da forma $t_1 \doteq t_2$, então toda variável da fórmula é livre portanto $\bar{v}(t_1) = \bar{w}(t_1)$ e $\bar{v}(t_2) = \bar{w}(t_2)$. Se α é da forma $R(t_1, \ldots, t_n)$, então toda variável da fórmula é livre portanto $\bar{v}(t_i) = \bar{w}(t_i)$ para todo i de modo que $(\bar{v}(t_1), \ldots, \bar{v}(t_n)) = (\bar{w}(t_1), \ldots, \bar{w}(t_n))$ portanto $(\bar{v}(t_1), \ldots, \bar{v}(t_n)) \in R^{\mathfrak{M}}$ se, e só se, $(\bar{w}(t_1), \ldots, \bar{w}(t_n)) \in R^{\mathfrak{M}}$ logo, em ambos os casos,

$$(\mathfrak{M}, v) \vDash \alpha \text{ se, e somente se, } (\mathfrak{M}, w) \vDash \alpha.$$

Se o teorema vale para α então vale para $\neg\alpha$: se $(\mathfrak{M}, v) \vDash \alpha$ se, e somente se, $(\mathfrak{M}, w) \vDash \alpha$, então $(\mathfrak{M}, v) \nvDash \alpha$ se, e somente se, $(\mathfrak{M}, w) \nvDash \alpha$ portanto $(\mathfrak{M}, v) \vDash \neg\alpha$ se, e somente se, $(\mathfrak{M}, w) \vDash \neg\alpha$.

Se o teorema vale para α e β então vale para $\alpha \to \beta$:

$$\begin{array}{cl} (\mathfrak{M}, v) \vDash \alpha \to \beta & \text{sse} \\ (\mathfrak{M}, v) \vDash \neg\alpha \text{ ou } (\mathfrak{M}, v) \vDash \beta & \text{sse} \\ (\mathfrak{M}, w) \vDash \neg\alpha \text{ ou } (\mathfrak{M}, w) \vDash \beta & \text{sse} \\ (\mathfrak{M}, w) \vDash \alpha \to \beta & \end{array}$$

portanto $(\mathfrak{M}, v) \vDash \alpha \to \beta$ se, e somente se, $(\mathfrak{M}, w) \vDash \alpha \to \beta$.

Finalmente, se o teorema vale para α então vale para $\forall x\alpha$: suponha $(\mathfrak{M}, v) \vDash \forall x\alpha$. Fixado um $b \in E$, temos que $(\mathfrak{M}, [v]_{x \rightsquigarrow b}) \vDash \alpha$. Agora, se y é uma variável livre em α e $y \neq x$ então

$$[v]_{x \rightsquigarrow b}(y) = [w]_{x \rightsquigarrow b}(y)$$

pois $v(y) = w(y)$; se $y = x$

$$[v]_{x \rightsquigarrow b}(y) = [w]_{x \rightsquigarrow b}(y) = b.$$

Portanto, $(\mathfrak{M}, [w]_{x \rightsquigarrow b}) \vDash \alpha$ pois o teorema vale para α. Como b é arbitrário, o argumento vale para todo b, ou seja, $(\mathfrak{M}, w) \vDash \forall x\,\alpha$. A recíproca, se $(\mathfrak{M}, w) \vDash \forall x\,\alpha$ então $(\mathfrak{M}, v) \vDash \forall x\,\alpha$, é demonstrada com argumentação análoga.

Pelo Princípio da Indução para fórmulas, o teorema vale para toda fórmula de uma linguagem $\mathscr{L}$. □

Demonstração do corolário. Seja α uma sentença e $\mathfrak{M}$ uma estrutura. Se $\mathfrak{M} \nvDash \alpha$, então para alguma atribuição v, $(\mathfrak{M}, v) \vDash \neg\alpha$. Como α não tem variáveis livres $(\mathfrak{M}, w) \vDash \neg\alpha$, para qualquer atribuição w. Portanto $\mathfrak{M} \vDash \neg\alpha$. A recíproca é análoga. □

Exemplo 107. Seja $\mathfrak{D}$ uma estrutura cujo domínio D tenha pelo menos dois elementos. Então

$$\mathfrak{D} \vDash \forall x \exists y\,(x \neq y).$$

De fato, seja $a \in D$ um elemento arbitrário. Como D tem pelo menos 2 elementos dado $a \in D$, podemos escolher $b \in D$ com $b \neq a$ de modo que $(\mathfrak{D}, [v]_{x \rightsquigarrow a, y \rightsquigarrow b}) \models x \neq y$. Como a foi arbitrário $(\mathfrak{D}, v) \models \forall x \exists y (x \neq y)$.

Se Γ é um conjunto de fórmulas da linguagem $\mathscr{L}$, escrevemos

$$\mathfrak{M} \models \Gamma$$

se $\mathfrak{M}) \models \alpha$ para toda fórmula $\alpha \in \Gamma$.

Exercício 108. Prove que se $\mathfrak{M} \models \{\alpha, \alpha \to \beta\}$ então $\mathfrak{M} \models \beta$.

Esboço da solução: Seja v uma atribuição qualquer. Então $(\mathfrak{M}, v) \models \alpha$ e $(\mathfrak{M}, v) \models \neg\alpha$ (logo $(\mathfrak{M}, v) \not\models \alpha$) ou $(\mathfrak{M}, v) \models \beta$. Então $(\mathfrak{M}, v) \models \beta$ para todo v. □

Exercício 109. Se $\mathfrak{M} \models \alpha$ então $\mathfrak{M} \models \forall x\, \alpha$.

Solução. Se $\mathfrak{M} \models \alpha$ então $(\mathfrak{M}, v) \models \alpha$ para toda atribuição v, em particular, $(\mathfrak{M}, [v]_{x \rightsquigarrow a}) \models \alpha$ para todo a no domínio de $\mathfrak{M}$. □

Exercício 110. Verifique que para o contexto do exemplo 104 valem

(1) $\mathcal{Q} \models \forall x_1 (\exists x_2 (x_1 < x_2))$.
(2) $\mathcal{Q} \models \exists x_3 (\exists x_4 (x_3 < x_4 \to x_3 \doteq x_4))$.

Esboço da solução: $(\mathcal{Q}, v) \models \forall x_1 (\exists x_2 (x_1 < x_2))$ sse
$(\mathcal{Q}, [v]_{x_1 \rightsquigarrow a}) \models \exists x_2 (x_1 < x_2)$ para todo $a \in \mathbb{Q}$, sse
$(\mathcal{Q}, [v]_{\substack{x_1 \rightsquigarrow a \\ x_2 \rightsquigarrow b}}) \models x_1 < x_2$ para todo $a \in \mathbb{Q}$, para algum $b \in \mathbb{Q}$, sse
$\overline{[v]_{\substack{x_1 \rightsquigarrow a \\ x_2 \rightsquigarrow b}}}(x_1) <^{\mathcal{Q}} \overline{[v]_{\substack{x_1 \rightsquigarrow a \\ x_2 \rightsquigarrow b}}}(x_2)$ para todo $a \in \mathbb{Q}$, para algum $b \in \mathbb{Q}$, sse
$a < b$ para todo $a \in \mathbb{Q}$, para algum $b \in \mathbb{Q}$.
$(\mathcal{Q}, v) \models \exists x_3 (\exists x_4 (x_3 < x_4 \to x_3 = x_4))$ sse
$(\mathcal{Q}, [v]_{x_3 \rightsquigarrow a}) \models \exists x_4 (x_3 < x_4 \to x_3 = x_4)$ para algum $a \in \mathbb{Q}$, sse
$(\mathcal{Q}, [v]_{\substack{x_3 \rightsquigarrow a \\ x_4 \rightsquigarrow b}}) \models (x_3 < x_4 \to x_3 = x_4)$ para algum $a \in \mathbb{Q}$, algum $b \in \mathbb{Q}$, sse
$\overline{[v]_{\substack{x_3 \rightsquigarrow a \\ x_4 \rightsquigarrow b}}}(x_3) <^{\mathcal{Q}} \overline{[v]_{\substack{x_3 \rightsquigarrow a \\ x_4 \rightsquigarrow b}}}(x_4) \to \overline{[v]_{\substack{x_3 \rightsquigarrow a \\ x_4 \rightsquigarrow b}}}(x_3) = \overline{[v]_{\substack{x_3 \rightsquigarrow a \\ x_4 \rightsquigarrow b}}}(x_4)$ para algum $a \in \mathbb{Q}$, para algum $b \in \mathbb{Q}$, sse
$a < b \to a = b$ para algum $a \in \mathbb{Q}$, para algum $b \in \mathbb{Q}$ □

Agora, se vale

$$(\mathfrak{M}, v) \models \alpha \text{ para toda interpretação } (\mathfrak{M}, v)$$

então α é **universalmente válida** e escrevemos

$$\models \alpha$$

como, por exemplo, em $x \doteq x$. Para qualquer $\mathfrak{M}$ e qualquer v temos, por definição, que $(\mathfrak{M}, v) \vDash x \doteq x$ se, e só se, $\bar{v}(x) = \bar{v}(x)$, o que é sempre verdade. Notemos que $x \doteq y$ não é universalmente válida, pois basta tomar a estrutura canônica para a aritmética $\mathfrak{N}$ com $v(x) = 1$ e $v(y) = 2$. Tampouco $x \not\doteq y$ é válida, pois como antes basta tomar $v(x) = v(y) = 2$.

Exemplo 111. Para quaisquer $\mathfrak{M}$ e v vale $(\mathfrak{M}, v) \vDash \forall x\,(x \doteq x)$ sse para todo a no domínio da interpretação $(\mathfrak{M}, [v]_{x \rightsquigarrow a}) \vDash (x \doteq x)$. Mas $[v]_{x \rightsquigarrow a}(x) = [v]_{x \rightsquigarrow a}(x)$ para qualquer atribuição v e qualquer a no domínio M, portanto $(\mathfrak{M}, [v]_{x \rightsquigarrow a}) \vDash (x = x)$. Assim, $\vDash \forall x\,(x \doteq x)$.

Exemplo 112. Seja $\mathscr{L}$ uma linguagem de primeira ordem com símbolo relacional unário P e constante c. Então

$$\vDash P(c) \to \exists x P(x) \tag{12}$$

pois, por definição, para quaisquer $\mathfrak{M}$ e v temos $(\mathfrak{M}, v) \vDash P(c) \to \exists x P(x)$ se, e só se, para quaisquer $\mathfrak{M}$ e v temos $(\mathfrak{M}, v) \nvDash P(c)$ ou $(\mathfrak{M}, v) \vDash \exists x P(x)$. Se $(\mathfrak{M}, v) \nvDash P(c)$ temos $(\mathfrak{M}, v) \vDash P(c) \to \exists x P(x)$. Assuma que $(\mathfrak{M}, v) \vDash P(c)$. Porém $(\mathfrak{M}, v) \vDash \exists x P(x)$ se, e só se, para algum $a \in M$, $(\mathfrak{M}, [v]_{x \rightsquigarrow a}) \vDash P(x)$ e basta tomar $a = c$ e temos $(\mathfrak{M}, v) \vDash \exists x P(x)$. Como a interpretação foi arbitrária a equação (12) é universalmente válida.

Exemplo 113. A sentença $\forall x \forall y\,(x \doteq y)$ é falsa em qualquer interpretação com domínio formado por menos dois elementos pois, fixado $(\mathfrak{M}, v)$, se não for falsa nessa interpretação, então será verdadeira e se esse é o caso $(\mathfrak{M}, v) \vDash \forall x \forall y\,(x \doteq y)$ sse $(\mathfrak{M}, [v]_{\substack{x \rightsquigarrow a \\ y \rightsquigarrow b}}) \vDash x = y$ para todo a e todo b. Se o universo do discurso tem pelo menos dois elementos então podemos tomar a e b distintos, o que torna a sentença falsa.

Exercício 114. Verifique a validade universal $\vDash \forall x \exists y\,(x \doteq y)$.

Na página 50 comentamos que argumentos como

Premissa	*O quadrado de qualquer inteiro é positivo*
Premissa	*9 é um quadrado*
Conclusão	*9 é positivo*

não são validados pela lógica proposicional. Agora temos, na linguagem da Aritmética,

Premissa	$\forall x(x \cdot x > 0)$
Premissa	$\exists x(x \cdot x \doteq SSSSSSSSS0)$
Conclusão	$SSSSSSSSS0 > 0$

pois, de fato, $\forall x(x \cdot x > 0), \exists x(x \cdot x \doteq SSSSSSSSS0) \vDash SSSSSSSSS0 > 0$. Para toda $\mathscr{L}_N$-estrutura $\mathfrak{M}$ tal que

$$\mathfrak{M} \vDash \exists x(x \cdot x \doteq SSSSSSSSS0), \forall x(x \cdot x > 0)$$

temos

$$\text{para algum } b \in M,\ b \cdot b = 9$$

e também

$$\text{para todo } a \in M,\ a \cdot a > 0$$

logo $b \cdot b > 0$ e se $b \cdot b = 9$, então $9 > 0$, ou seja, 9 é positivo.

10.1. **Consequência lógica.** Sejam $\mathscr{L}$ uma linguagem de primeira ordem e $\Gamma \subset \mathscr{L}$ um conjunto de fórmulas. A fórmula α é **consequência lógica** (ou consequência semântica) de Γ, e escrevemos

$$\Gamma \vDash \alpha$$

quando para qualquer $\mathscr{L}$-estrutura $\mathfrak{M}$,

$$\text{se } \mathfrak{M} \vDash \Gamma \text{ então } \mathfrak{M} \vDash \alpha$$

ou seja, se $(\mathfrak{M}, v) \vDash \Gamma$ para toda atribuição v, então $(\mathfrak{M}, w) \vDash \Gamma$ para toda atribuição w. Caso Γ seja finito, escrevemos

$$\gamma_1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \vDash \alpha$$

e nesse caso temos um **argumento válido**.

Por exemplo, na linguagem da aritmética

$$x < y \vDash z < w. \tag{13}$$

De fato, seja $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \vDash x < y$, isto é, para qualquer atribuição v na interpretação resulta que para todos a e b no domínio de $\mathfrak{A}$ temos $a <^{\mathfrak{A}} b$. Na estrutura $\mathfrak{A}$ vale $(\mathfrak{A}, u) \vDash z < w$ qualquer que seja a atribuição u pois $u(z), u(w) \in A$ logo $u(z) < u(w)$.

Exemplo 115. Do exercício 108 temos $\alpha, \alpha \to \beta \vDash \beta$.

Exercício 116. Verifique que

(1) $\forall x\, \alpha, \forall x\, \alpha \to \beta \vDash \forall x\, \beta$
(2) $\forall x\, \alpha \vDash [\alpha]_x^t$ sempre que a substituição é admissível.

Exemplo 117. A negação da sentença que formaliza o paradoxo de Russel na linguagem da Teoria dos Conjuntos, equação (6) na página 58, é universalmente válida

$$\vDash \neg \exists x \forall y\, (y \in x \leftrightarrow y \notin y). \tag{14}$$

Do exercício acima, item 2, temos

$$\forall y\, (y \in x \leftrightarrow y \notin y) \vDash y \in y \leftrightarrow y \notin y.$$

e como $y \in y \leftrightarrow y \notin y$ não é válida, temos $\not\models \forall y\,(y \in x \leftrightarrow y \notin y)$ portanto

$$\not\models \exists x \forall y\,(y \in x \leftrightarrow y \notin y)$$

ou seja $\models \neg\exists x \forall y\,(y \in x \leftrightarrow y \notin y)$.

METATEOREMA 22 *Sejam* Γ *um conjunto de fórmulas e* α *uma sentença e* β *uma fórmula, todos de uma linguagem de primeira ordem* $\mathscr{L}$. *Então*

$$\Gamma, \alpha \models \beta \text{ se, e só se, } \Gamma \models \alpha \to \beta.$$

DEMONSTRAÇÃO. Primeiro, assumimos a hipótese que $\Gamma, \alpha \models \beta$ e provaremos $\Gamma \models \alpha \to \beta$. Seja $\mathfrak{M}$ uma $\mathscr{L}$-estrutura tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma$ e temos dois casos pelo corolário 106

(1) $\mathfrak{M} \models \alpha$: nesse caso, por hipótese vale $(\mathfrak{M}, v) \models \beta$ para qualquer atribuição v, então $(\mathfrak{M}, v) \models \neg\alpha$ ou $(\mathfrak{M}, v) \models \beta$, portanto, $(\mathfrak{M}, v) \models \alpha \to \beta$.

(2) $\mathfrak{M} \not\models \alpha$: nesse caso, para qualquer atribuição v, $(\mathfrak{M}, v) \models \neg\alpha$ ou $(\mathfrak{M}, v) \models \beta$, logo, $(\mathfrak{M}, v) \models \alpha \to \beta$.

Agora, assumimos que $\Gamma \models \alpha \to \beta$ e provaremos $\Gamma, \alpha \models \beta$. Suponha que $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\alpha\}$, então $\mathfrak{M} \models \Gamma$, portanto, $\mathfrak{M} \models \alpha \to \beta$, ou seja, $\mathfrak{M} \models \neg\alpha$ ou $\mathfrak{M} \models \beta$. Como, por hipótese, $\mathfrak{M} \models \alpha$, temos $\mathfrak{M} \models \beta$. $\square$

A exigência de que α seja uma sentença é de fato necessária como mostra o seguinte exemplo. da equação (13) acima não podemos deduzir $\models (x < y) \to (z < w)$ pois essa não é universalmente válida. Considere o a estrutura canônica para a aritmética onde $<$ é interpretado como o "menor que" usual nos naturais. Com a atribuição $v(x) = v(w) = 1$ e $v(y) = v(z) = 0$ temos $(\mathfrak{N}, v) \not\models (x < y) \to (z < w)$.

Equivalência lógica. Numa linguagem $\mathscr{L}$ de primeira ordem a fórmula α é **semanticamente equivalente** à fórmula β, o que denotamos por

$$\alpha \equiv \beta$$

se

$$\models \alpha \leftrightarrow \beta.$$

Por exemplo, são equivalências lógicas

$$\forall x \forall y \alpha \equiv \forall y \forall x \alpha$$

$$\forall x(\alpha \wedge \beta) \equiv \forall x \alpha \wedge \forall x \beta$$

$$\exists x \exists y \alpha \equiv \exists y \exists x \alpha$$

$$\exists x(\alpha \vee \beta) \equiv \exists x \alpha \vee \exists x \beta$$

$$\neg(\forall x\, \alpha) \equiv \exists x \neg\alpha$$

$$\neg(\exists x\, \alpha) \equiv \forall x \neg \alpha$$

10.2. **Teoria e Modelo.** Se Σ é um conjunto de sentenças tal que se $\alpha \in \Sigma$ então $\Sigma \vDash \alpha$, então Σ é dita um **teoria**. Se $\mathfrak{M}$ é uma estrutura para a linguagem $\mathscr{L}$, então a **teoria de** $\mathfrak{M}$ é o conjunto de todas as *sentenças* de $\mathscr{L}$ verdadeiras em $\mathfrak{M}$, ou seja

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = \{\tau : \tau \text{ é uma sentença de } \mathscr{L} \text{ e } \mathfrak{M} \vDash \tau\}.$$

Uma teoria Σ é **axiomatizável** se existe um conjunto de fórmulas $\Gamma \subset \Sigma$ tal que para toda sentença α da teoria

$$\Gamma \vDash \alpha.$$

Por exemplo, a Aritmética é axiomatizável pois há um conjunto de axiomas desenvolvido por Giuseppe Peano cujas consequências lógicas são os teoremas da Aritmética.

Dizemos que a estrutura $\mathfrak{M}$ é uma **modelo** para uma teoria se para toda sentença α na teoria

$$\mathfrak{M} \vDash \alpha$$

e dizemos que α é **verdadeira** em $\mathfrak{M}$, caso contrário dizemos que α é **falsa** no modelo $\mathfrak{M}$.

Exemplo 118. Uma **ordem parcial** sobre um conjunto M é uma relação binária $\preceq$ com as seguintes propriedades, chamadas de **axiomas das ordens parciais**, formulados na linguagem $\mathscr{L}_O$

(1) $\forall x(x \preceq x)$;
(2) $\forall x \forall y(x \preceq y \wedge y \preceq x \to x \doteq y)$;
(3) $\forall x \forall y \forall z(x \preceq y \wedge y \preceq z \to x \preceq z)$.

Um **conjunto parcialmente ordenado** é um modelo $\mathscr{O} = (M, \preceq)$ desses axiomas e a **teoria elementar das ordens parcias** é o conjunto das sentenças que são consequências lógicas desses axiomas.

Exemplo 119. Um **grafo** é um modelo $\mathscr{G} = (V, E)$ sobre um conjunto de vértices V e uma relação binária E para os seguintes **axiomas da teoria elementar dos grafos**, formulados na linguagem $\mathscr{L}_G$,

(1) $\forall x, \neg E(x, x)$;
(2) $\forall x \forall y\,(E(x, y) \to E(y, x))$.

Exercício 120. Um vértice isolado de um grafo é um elemento v do universo que não é adjacente a nenhum outro elemento do universo. Expresse na linguagem da Teoria dos Grafos as sentença 'o grafo não tem vértice isolado'.

Exercício 121. Um triângulo em um grafo é qualquer conjunto de três vértices que são adjacentes dois a dois. Expresse na linguagem da Teoria dos Grafos as sentença 'o grafo tem triângulo'.

EXERCÍCIOS

(1) Seja v uma atribuição associada a estrutura $\mathfrak{M}$ para uma linguagem $\mathscr{L}$. Suponha que para as variáveis x e y temos que $v(x) = v(y)$. Use indução para termos para demonstrar que se t é termo e s é obtido de t substituindo-se uma ou mais ocorrências de x por y então $\bar{v}(s) = \bar{v}(t)$.

(2) Considere a linguagem da aritmética $\mathscr{L}_N$ com a estrutura canônica $\mathfrak{N}$:

$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, <^{\mathfrak{N}}, S^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}})$ onde $0^{\mathfrak{N}}$ é o número $0 \in \mathbb{N}$; a função $S^{\mathfrak{U}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ é dada por $S^{\mathfrak{U}}(n) = n + 1$, a relação binária $<^{\mathfrak{N}}$ e as operações $+^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}$ são o “menor que”, a soma e o produto usuais de números naturais.

e a atribuição constante $v(x) = 2$ para toda variável.

(a) Verifique que $(\mathfrak{N}, s) \models x \doteq +(1, 1)$.

(b) Diga para quais atribuições associadas a $\mathfrak{N}$ a seguinte fórmula é satisfeita:

(b.1) $\forall x\, ((\exists z (x \cdot z \doteq y)) \to \exists z\, ((1+1) \cdot z \doteq x)))$

(b.2) $(\exists x (x + x \doteq y)) \to (\exists y (y + x \doteq y))$

(3) Seja $\mathscr{L}$ uma linguagem de primeira ordem com constante a, função unária G, relação unária R e relações binárias $\{P, Q\}$. Seja $\mathfrak{A}$ a estrutura definida por

- $D := \mathbb{N}$
- $a^{\mathfrak{A}} := 2$;
- $G^{\mathfrak{A}}(n) := n + 1$;
- $R^{\mathfrak{A}}(n) := \{n \in \mathbb{N} \colon n \text{ é par}\}$;
- $P^{\mathfrak{A}} := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon n \leq m\}$;
- $Q^{\mathfrak{A}} := \varnothing$.

Para cada uma das sentenças abaixo, verifique se é satisfeita ou não na estrututra.

(a) $\exists x G(x) \land \forall x (G(x) \doteq x)$;

(b) $\exists x \exists y Q(x, y)$;

(c) $\neg R(a) \to \forall x \forall y Q(x, y)$;

(d) $\forall x (R(x) \to \forall x R(G(G(x)))$;

(e) $\forall x \exists y P(x, y)$;

(f) $\exists y \forall x P(x, y)$;

(g) $\exists y \forall x P(y, x)$;

(h) $\forall x \big(R(x) \lor \exists y \big(y \doteq G(x) \land R(y)\big)\big)$.

(4) Seja $\mathscr{L}_G$ a linguagem dos grupos com constante e e símbolo funcional $\circ$. Chamamos de **axiomas de grupo** o seguinte conjunto Γ de sentenças da linguagem $\mathscr{L}_G$:

(G1) $\forall x\, ((x \circ e = x) \land (e \circ x = x))$;

(G2) $\forall x \exists y\, (x \circ y = e)$;

(G3) $\forall x \forall y \forall z\, (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$.

(a) Seja α a sentença $\forall x\, (x \circ x = e)$.

Mostre que a sentença α é **independente** dos axiomas de grupo mostrando uma interpretação para $\{G1, G2, G3, \alpha\}$ e outra interpretação para $\{G1, G2, G3, \neg\alpha\}$.

(b) Tome $\mathscr{G}$ a seguinte estrutura para $\mathscr{L}_G$

- $D := \{1, 2\}$;
- $e^{\mathscr{G}} := 1$;
-

$\circ^{\mathscr{G}}$	1	2
1	1	2
2	2	1

Verifique se os axiomas são verdadeiros nesse modelo.

(5) Demonstre usando indução para fórmula que se t é uma substituição admissível para x em α então

$$(\mathfrak{M}, v) \vDash [\alpha]_x^t \text{ sse } (\mathfrak{M}, [v]_{x \rightsquigarrow \bar{v}(t)}) \vDash \alpha.$$

(6) Considere a estrutura $\mathscr{E}$ dada por

- $E = \{1\}$;
- $r^{\mathscr{E}} = p^{\mathscr{E}} = \{1\}$;
- $q^{\mathscr{E}} = \{(1, 1)\}$;
- $a^{\mathscr{E}} = b^{\mathscr{E}} = c^{\mathscr{E}} = 1$;
- $f^{\mathscr{E}} : E \to E,\ f^{\mathscr{E}}(x) = 1$;
- $g^{\mathscr{E}} : E \times E \to E,\ g^{\mathscr{E}}(x, y) = x$.

Verificar se as sentenças a seguir são satisfeitas.

(a) $\forall x_1(\exists x_2(\exists x_3(p(x_1) \to (r(x_2) \wedge r(x_3) \wedge (x_1 \doteq g(x_2, x_3)))))).$

(b) $\forall x_1(\exists x_2(\exists x_3(q(x_1, x_2) \to (r(x_2) \wedge r(x_3) \wedge (x_1 \doteq g(x_2, x_3)))))).$

(c) $\forall x(q(f(x), x) \to r(x))$;

(d) $\forall x(\neg q(f(x), x) \to r(x))$;

(e) $\neg\forall x(q(f(x), x) \to r(x))$;

(7) Demonstre que a generalização de uma fórmula é válida se e somente se a fórmula é válida, ou seja, para uma fórmula α de uma linguagem de primeira ordem qualquer

$$\vDash \alpha \text{ se, e somente se} \vDash \forall x\, \alpha$$

qualquer que seja a variável x.

(8) Demonstre que uma generalização para uma variável que não ocorre livre na fórmula é consequência lógica da própria fórmula, isto é, se x não ocorre livre em α então

$$\alpha \vDash \forall x\, \alpha.$$