

## 6. SISTEMA DEDUTIVO AXIOMÁTICO

Como na lógica proposicional, são conhecidos alguns sistemas dedutivos para o cálculo de predicados que são equivalentes no sentido de deduzirem os mesmos teoremas. Apresentaremos um do tipo **Sistema de Hilbert** para a linguagem  $\mathcal{L}_1$  da lógica de primeira ordem. Tal sistema é axiomático, consiste numa lista finita de **axiomas** e outra de **regras de inferência** que podem ser usados para derivar os teoremas do sistema.

Também como na lógica proposicional chamaremos de axioma e teorema, por exemplo,  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$  e  $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x \beta)$  o que, de fato, são **esquemas de axiomas e de teoremas** pois usam variáveis da metalinguagem. Os axiomas são obtidos quando substituimos tais variáveis por fórmulas nas quais figuram apenas símbolos do alfabeto de modo que toda ocorrência da mesma (meta)variável é substituída pela mesma fórmula.

**6.1. Axiomas lógicos.** Um sistema dedutivo para uma linguagem de primeira ordem tem duas classes de axiomas, os *lógicos* comuns a todas as linguagens e os *não-lógicos*. Intuitivamente, em termos semânticos, um axioma lógico é uma fórmula universalmente válida. Normalmente, toma-se como axiomas lógicos algum conjunto mínimo de fórmulas suficiente para derivar todas as fórmulas universalmente válidas. Os esquemas de **axiomas lógicos** são

- (A1):  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- (A2):  $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \xi)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \xi))$
- (A3):  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha)$
- (A4):  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$
- (A5):  $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$
- (A6):  $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$
- (A7):  $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
- (A8):  $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
- (A9):  $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma))$
- (A10):  $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$
- (A11):  $(\forall x(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$ .
- (A12):  $(\forall x \alpha) \rightarrow [\alpha]_x^t$  sempre que  $t$  é admissível para  $x$  em  $\alpha$ .
- (A13):  $\alpha \rightarrow \forall x \alpha$  sempre que  $x \notin VL(\alpha)$ .
- (A14):  $t \doteq t$
- (A15):  $t_1 \doteq t_2 \rightarrow t_2 \doteq t_1$
- (A16):  $(t_1 \doteq t_2 \wedge t_2 \doteq t_3) \rightarrow t_1 \doteq t_3$
- (A17):  $(t_1 \doteq t'_1 \wedge \dots \wedge t_n \doteq t'_n) \rightarrow (R(t_1, \dots, t_n) \rightarrow R(t'_1, \dots, t'_n))$

**(A18):**  $(t_1 \doteq t'_1 \wedge \dots \wedge t_n \doteq t'_n) \rightarrow (F(t_1, \dots, t_n) \doteq F(t'_1, \dots, t'_n))$

**(A19):** as generalizações dos esquemas de fórmulas acima.

em que  $\alpha, \beta, \gamma, \xi$  são fórmulas,  $x$  é variável,  $t$  e  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  são termos,  $R$  é símbolo relacional (podendo ser o  $\doteq$ ) e  $F$  símbolo funcional.

*Exemplo 65.* Caso não houvesse restrição sobre a substituição de variável nos axiomas do  $\forall$  seria possível o axioma  $\forall x \exists y (x \neq y) \rightarrow \exists y (y \neq y)$ , por exemplo, que intuitivamente deveria ser falso. Numa interpretação onde o universo tem mais de um elemento, a fórmula  $\forall x \exists y (x \neq y)$  é válida e usando o esquema (A12) incondicionalmente teríamos o axioma  $\forall x \exists y (x \neq y) \rightarrow [\exists y (x \neq y)]_y^x$ , ou seja, teríamos o axioma  $\forall x \exists y (x \neq y) \rightarrow \exists y (y \neq y)$  que, intuitivamente, deveria ser falso.

*Exemplo 66.* A fórmula

$$\neg \forall y \neg P(y) \rightarrow (P(x) \rightarrow \neg \forall y \neg P(y))$$

é uma instância do esquema (A1), portanto é um axioma. A fórmula

$$(R(x, y) \rightarrow (\exists y (y \doteq 0) \vee R(x, y)))$$

é uma instância de  $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$ , portanto é um axioma do esquema (A8). A fórmula

$$\forall x (\neg \forall y (x \doteq y)) \rightarrow (\neg \forall y (z \doteq y))$$

é um axioma do esquema (A12). Também é a fórmula

$$\forall x (A(x) \rightarrow \forall y A(y)) \rightarrow (A(y) \rightarrow \forall y A(y))$$

porém a fórmula

$$\forall x (\forall y B(x, y)) \rightarrow \forall y B(y, y)$$

não é um axioma desse esquema porque viola a condição de admissibilidade.

*Exemplo 67.* Na linguagem aritmética, por exemplo, temos o axioma lógico

$$(x < y) \rightarrow (\exists y (y \doteq 0) \vee (x < y))$$

do esquema  $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$ .

*Exercício 68.* A fórmula  $(x \doteq y) \rightarrow ((x + x \doteq 0) \rightarrow (x + y \doteq 0))$  é um axioma?

**6.2. Regras de inferência.** Há uma única regra de inferência (de fato esquema) do sistema

$$\text{(MP): } \frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

6.3. **Dedução.** Sejam  $\alpha$  uma fórmula da linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}_1$  e  $\Gamma \subset \mathcal{L}_1$  um conjunto de hipóteses ou premissas. Uma **prova** de  $\alpha$  a partir de  $\Gamma$  é uma sequência finita de fórmulas

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \rangle$$

tal que  $\varphi_n = \alpha$  e, para  $i < n$ ,  $\varphi_i$  é

- (1) ou um axioma lógico
- (2) ou uma fórmula de  $\Gamma$
- (3) ou uma fórmula obtida de  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{i-1}$  por regra de inferência.

$\Gamma \vdash \alpha$  e lê-se “ $\alpha$  é um **teorema de  $\Gamma$** ”. No caso  $\Gamma$  vazio escrevemos  $\vdash \alpha$  e, nesse caso,  $\alpha$  é um **teorema lógico**.

Simplificações de notação: usamos as mesmas simplificações adotadas na lógica proposicional, ao invés de  $\{\alpha\} \vdash \beta$  escrevemos  $\alpha \vdash \beta$ ; ao invés de  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \vdash \beta$  escrevemos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$ ; ao invés de  $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$  escrevemos  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ .

6.4. **Propriedades de  $\vdash$ .** As seguintes propriedades valem exatamente como na lógica de proposições. Como os esquemas de axiomas (A1)–(A10) e a única regra de inferência são os mesmos da lógica proposicional (agora para fórmulas da lógica de predicados) e definição de dedução é a mesma, temos que o  $\vdash$  na lógica de predicados tem as mesmas propriedades de  $\vdash$  do sistema dedutivo para a lógica de proposições.

**METATEOREMA 17** *Se  $\Gamma$  é um conjunto de fórmulas de  $\mathcal{L}_1$*

**Autodedução:**  $\Gamma \vdash \alpha$  para todo  $\alpha \in \Gamma$ .

**Monotonicidade:** Se  $\Gamma \vdash \alpha$  então  $\Gamma \cup \Sigma \vdash \alpha$ .

**Regra do corte:** Se  $\Gamma \vdash \alpha_i$  para  $i = 1, 2, \dots, k$  e  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \vdash \beta$  então  $\Gamma \vdash \beta$ .

**Compacidade:**  $\Gamma \vdash \alpha$  se, e só se, existe  $\Delta \subseteq \Gamma$  finito tal que  $\Delta \vdash \alpha$ .

**Teorema da Dedução:**  $\alpha \vdash \beta$  se, e somente se,  $\vdash \alpha \rightarrow \beta$  ou, genericamente,

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \text{ se, e somente se, } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta.$$

O teoremas lógicos proposicionais valem com a mesma dedução na lógica de predicados.

**TEOREMA 69**  $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

*Prova.* Deduz-se como no teorema 13.

- |    |  |          |
|----|--|----------|
| 1. | $\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$  | (por A1) |
| 2. | $(\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ | (por A2) |
| 3. | $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$   | (por A1) |
| 4. | $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$   | (MP 2,1) |
| 5. | $\alpha \rightarrow \alpha$  | (MP 3,4) |

□

**TEOREMA 70 (REDUÇÃO AO ABSURDO (RA))**  $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \neg\beta \vdash \neg\alpha$

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema da Dedução em (A3).

□

**TEOREMA 71 (INTRODUÇÃO DA CONJUNÇÃO (IC))**  $\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema da Dedução em (A4).

□

**TEOREMA 72 (ELIMINAÇÃO DA CONJUNÇÃO (EC1))**  $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema da Dedução em (A5).

□

**TEOREMA 73 (ELIMINAÇÃO DA CONJUNÇÃO (EC2))**  $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema da Dedução em (A6).

□

**TEOREMA 74 (INTRODUÇÃO DA DISJUNÇÃO (ID1))**  $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema da Dedução em (A7).

□

**TEOREMA 75 (INTRODUÇÃO DA DISJUNÇÃO (ID2))**  $\beta \vdash \alpha \vee \beta$

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema da Dedução em (A8).

□

**TEOREMA 76 (DUNS SCOTUS (DS))**  $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

*Prova.* Dá-se como na dedução do teorema 18.

**TEOREMA 77 (CONTRA-POSITIVA (CP1))**  $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$

DEMONSTRAÇÃO. Segue de Modus Tollens por aplicação do Teorema da Dedução.

□

**TEOREMA 78 (SILOGISMO HIPOTÉTICO (SH))**  $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$

*Prova.* Dá-se como a dedução do teorema 14.

□

**TEOREMA 79 (TROCA CONDICIONAL (TC))**  $\theta \rightarrow (\phi \rightarrow \xi) \vdash \phi \rightarrow (\theta \rightarrow \xi)$

*Prova.* Segue a dedução do teorema 15.

□

**TEOREMA 80 (DUPLA NEGAÇÃO (DN1))**  $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$ .

*Prova.* Segue de (A10) e o teorema da Dedução. □

**TEOREMA 81 (DUPLA NEGAÇÃO (DN2))**  $\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$

*Prova.* Deduz-se como no teorema 17. □

**TEOREMA 82 (SILOGISMO DISJUNTIVO (SD))**  $\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vdash \beta$

*Prova.*

1.  $\alpha \vee \beta$  (hip.)
2.  $\neg\alpha \rightarrow \beta$  (def. de  $\vee$ )
3.  $\neg\alpha$  (hip.)
4.  $\beta$  (por MP 2,3)

□

**TEOREMA 83 (MODUS TOLLENS (MT))**  $\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta \vdash \neg\alpha$

*Prova.*

1.  $\alpha \rightarrow \beta$  (hip.)
2.  $\neg\beta$  (hip.)
3.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$  (A3)
4.  $\neg\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)$  (A1)
5.  $\alpha \rightarrow \neg\beta$  (MP 2,4)
6.  $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$  (MP 1,3)
7.  $\neg\alpha$  (MP 5,6)

□

**TEOREMA 84 (CONTRA-POSITIVA (CP2))**  $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta$

*Prova.*

1.  $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$  (hip.)
2.  $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta)$  (CP1)
3.  $\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta$  (MP 1,2)
4.  $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$  (DN2)
5.  $\neg\neg\beta \rightarrow \beta$  (DN1)
6.  $\alpha \rightarrow \neg\neg\beta$  (SH 4,3)
7.  $\alpha \rightarrow \beta$  (SH 6,5)

□

**6.5. Regras de inferências derivadas.** Os sistemas dedutivos do estilo de Hilbert têm poucas regras de dedução. Aas regras de inferência adicionais advindas dos teoremas lógicos não acrescentam nenhum poder dedutivo ao sistema, no sentido de que uma dedução usando as novas regras de dedução pode ser convertida em uma dedução usando apenas a dedução com a regra original.

Uma regra de inferência derivada é uma regra de inferência que não é dada a nós como parte do sistema dedutivo, mas que constitui uma abreviatura usando um teorema previamente provado. Em particular, suponha que tenhamos  $\Gamma \vdash \alpha$  com  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  um conjunto finito de teoremas. Então sempre que deduzimos, digamos numa prova de  $\Sigma \vdash \beta$ , os teoremas de  $\Gamma$ , podemos usar  $\Gamma \vdash \alpha$  para deduzir  $\alpha$ . Assim, acrescentamos a regra

$$\frac{\gamma_1, \dots, \gamma_k}{\alpha}$$

à nossa lista de regras de inferência. O teoremas acima nos dão várias regras derivadas, todas já conhecidas do cálculo proposicional e que agora valem para fórmulas da lógica de predicados. Vejamos algumas regras de inferência derivadas dos “novos” axiomas.

**TEOREMA 85 (INSTANCIACÃO UNIVERSAL (IU))**  $\forall x \alpha \vdash [\alpha]_x^t$ , para todo termo  $t$  admissível para  $x$ .

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema da Dedução em (A12). □

**TEOREMA 86 (GENERALIZAÇÃO UNIVERSAL (G))**  $\alpha \vdash \forall x \alpha$ , se  $x \notin VL(\alpha)$ .

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema da Dedução em (A13). □

**TEOREMA 87 (GENERALIZAÇÃO EXISTENCIAL (GE))**  $[\alpha]_x^t \vdash \exists x \alpha$ , se  $t$  é admissível para  $x$ .

*Prova.* Provaremos  $\vdash [\alpha]_x^t \rightarrow \exists x \alpha$ , se  $t$  é admissível para  $x$ ; o teorema segue do teorema da Dedução. Seja  $t$  uma substituição admissível para  $x$  em  $\alpha$ .

1.  $\forall x \neg \alpha \rightarrow \neg [\alpha]_x^t$  (A12)
2.  $(\forall x \neg \alpha \rightarrow \neg [\alpha]_x^t) \rightarrow (\neg \neg [\alpha]_x^t \rightarrow \neg \forall x \neg \alpha)$  (CP1)
3.  $\neg \neg [\alpha]_x^t \rightarrow \neg \forall x \neg \alpha$  (MP 1,2)
4.  $[\alpha]_x^t \rightarrow \neg \neg [\alpha]_x^t$  (DN2)
5.  $[\alpha]_x^t \rightarrow \neg \forall x \neg \alpha$  (SH 3,4)
6.  $[\alpha]_x^t \rightarrow \exists x \alpha$  (def. de  $\exists$ )

□

**TEOREMA 88**  $\vdash \forall x \alpha \rightarrow \exists x \alpha$

*Prova.* Fixado  $t$  admissível para  $x$  em  $\alpha$

1.  $\forall x \alpha \rightarrow [\alpha]_x^t$  (A12)
2.  $[\alpha]_x^t \rightarrow \exists x \alpha$  (GE)
3.  $\forall x \alpha \rightarrow \exists x \alpha$  (SH 1,2)

□

Com a notação usual temos as seguintes regras derivadas dos teoremas acima.

$$(RA): \frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \neg \beta}{\neg \alpha}$$

$$(TC): \frac{\theta \rightarrow (\phi \rightarrow \xi)}{\phi \rightarrow (\theta \rightarrow \xi)}$$

$$(IC): \frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

$$(CP1): \frac{\alpha \rightarrow \beta}{\neg \beta \rightarrow \neg \alpha}$$

$$(EC1): \frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$

$$(CP2): \frac{\neg \beta \rightarrow \neg \alpha}{\alpha \rightarrow \beta}$$

$$(EC2): \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

$$(DN1): \frac{\neg \neg \alpha}{\alpha}$$

$$(ID1): \frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$$

$$(DN2): \frac{\alpha}{\neg \neg \alpha}$$

$$(ID2): \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}$$

$$(G): \frac{\alpha}{\forall x \alpha}, \text{ se } x \notin VL(\alpha).$$

$$(DS): \frac{\alpha, \neg \alpha}{\beta}$$

$$(IU): \frac{\forall x \alpha}{[\alpha]_x^t}, \text{ se } t \text{ admissível para } x.$$

$$(MT): \frac{\alpha \rightarrow \beta, \neg \beta}{\neg \alpha}$$

$$(GE): \frac{[\alpha]_x^t}{\exists \alpha}, \text{ se } t \text{ admissível para } x.$$

$$(SH): \frac{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

$$(\forall/\exists): \frac{\forall x \alpha}{\exists x \alpha}$$

**METATEOREMA 18 (TEOREMA DA GENERALIZAÇÃO)** *Seja  $\Gamma$  tal que a variável  $x$  não ocorre livre em nenhuma fórmula de  $\Gamma$ . Se  $\Gamma \vdash \alpha$  então  $\Gamma \vdash \forall x \alpha$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Suponha que  $\Gamma \vdash \alpha$  e seja  $\langle \theta_1, \dots, \theta_n \rangle$  uma prova. Demonstraremos por indução em  $i$  que  $\Gamma \vdash \forall x \theta_i$ .

Se  $\theta_1$  é axioma lógico então  $\forall x \theta_1$  é axioma lógico, portanto  $\Gamma \vdash \forall x \theta_1$ .

Se  $\theta_1 \in \Gamma$  então  $x \notin VL(\theta_1)$  e podemos usar o esquema (A13) como em

1.  $\theta_1$  (hip.)
2.  $\theta_1 \rightarrow \forall x \theta_1$  (A13)
3.  $\forall x \theta_1$  (MP 1,2)

Portanto,  $\theta_1 \vdash \forall x\theta_1$  e por monotonicidade  $\Gamma \vdash \forall x\theta_1$ .

Assuma, como hipótese da indução, que  $\Gamma \vdash \forall x\theta_i$  para  $i = 1, 2, \dots, m-1$ . Vamos provar  $\Gamma \vdash \forall x\theta_m$ . Se  $\theta_m$  é axioma lógico ou está em  $\Gamma$  então  $\Gamma \vdash \forall x\theta_m$  (a demonstração é análoga ao caso  $i = 1$ ). Senão, existem  $j, k < m$  tais que  $\theta_m$  é *modus ponens* de  $\theta_j$  (na linha  $j$ ) e  $\theta_j \rightarrow \theta_m$  (na linha  $k$ ). Por hipótese de indução temos

$$(5) \quad \Gamma \vdash \forall x\theta_j \quad \text{e} \quad \Gamma \vdash \forall x(\theta_j \rightarrow \theta_m)$$

agora

- |   |           |
|---|-----------|
| 1. $\forall x\theta_j$  | (teorema) |
| 2. $\forall x(\theta_j \rightarrow \theta_m)$   | (teorema) |
| 3. $\forall x(\theta_j \rightarrow \theta_m) \rightarrow (\forall x\theta_j \rightarrow \forall x\theta_m)$ | (A11)     |
| 4. $\forall x\theta_j \rightarrow \forall x\theta_m$  | (MP 2,3)  |
| 5. $\forall x\theta_m$  | (MP 1,4)  |

portanto  $\forall x\theta_j, \forall x(\theta_j \rightarrow \theta_m) \vdash \forall x\theta_m$  e da regra do corte com (5) concluímos  $\Gamma \vdash \forall x\theta_m$ .

Portanto  $\Gamma \vdash \forall x\theta_i$  para todo  $i, 1 \leq i \leq n$ , em particular,  $\Gamma \vdash \forall x\alpha$ . □

*Nos próximos exemplos  $x$  não ocorre livre na fórmula  $\alpha$ .*

$$\alpha \rightarrow \forall x\beta \vdash \forall x(\alpha \rightarrow \beta).$$

*Prova.*

- |  |          |
|--|----------|
| 1. $\alpha \rightarrow \forall x\beta$   | (hip.)   |
| 2. $\forall x\beta \rightarrow \beta$    | (A13)    |
| 3. $\alpha \rightarrow \beta$            | (SH 1,2) |
| 4. $\forall x(\alpha \rightarrow \beta)$ | (TG)     |

$$\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \vdash (\alpha \rightarrow \forall x\beta).$$

*Prova.*

- |   |          |
|---|----------|
| 1. $\forall x(\alpha \rightarrow \beta)$  | (hip.)   |
| 2. $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$ | (A11)    |
| 3. $\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta$   | (MP 1,2) |
| 4. $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$ pois $x \notin VL(\alpha)$                                | (A13)    |
| 5. $\alpha \rightarrow \forall x\beta$  | (SH 3,4) |

□

Portanto, se  $x$  não ocorre livre em  $\alpha$

$$\vdash (\alpha \rightarrow \forall x\beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha \rightarrow \beta).$$



*Prova.*

1.  $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x \beta)$  (teo.)
2.  $(\alpha \rightarrow \forall x \beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$  (teo.)
3.  $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \forall x \beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$  (IC 1,2)
4.  $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \forall x \beta)$  (def.  $\leftrightarrow$ )

□

**METATEOREMA 19 (TEOREMA DA GENERALIZAÇÃO EM CONSTANTES)** *Sejam  $c$  uma constante e  $\Gamma$  um conjunto de fórmulas em uma linguagem de primeira ordem tais que  $c$  não ocorre numa fórmula  $\varphi$  e  $\Gamma \vdash \varphi$ . Então há uma variável  $x$  que não ocorre em  $\varphi$  tal que  $\Gamma \vdash \forall x[\varphi]_x^c$ . Além disso, há uma dedução  $\Gamma \vdash \forall x[\varphi]_x^c$  em que  $c$  não ocorre.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. Dica: seja  $\langle \theta_1, \dots, \theta_n \rangle$  uma prova de  $\Gamma \vdash \varphi$ . Demonstre que  $\langle [\theta_1]_x^c, \dots, [\theta_n]_x^c \rangle$  é uma prova de  $\Gamma \vdash [\varphi]_x^c$  e considere  $\Sigma \subset \Gamma$  o conjunto (finito) de fórmulas que ocorrem nessa prova. Se  $x$  não ocorre em  $\Sigma$ , pode-se usar o teorema de generalização. □

**COROLÁRIO 89 (REGRA (IE))** *Assuma que a constante  $c$  não ocorre em  $\varphi, \psi$  e que  $[\varphi]_x^c \vdash \psi$ . Então  $\exists x \varphi \vdash \psi$  e existe uma prova dessa dedução na qual  $c$  não ocorre.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. Dica: prove que se  $\vdash [\varphi]_x^c$  e  $c$  não ocorre em  $\varphi$ , então  $\vdash \forall x \varphi$  e  $c$  não ocorre nessa dedução. Use a contrapositiva em  $[\varphi]_x^c \vdash \psi$ . □

Note que (IE) não afirma  $\exists x \varphi \vdash [\varphi]_x^c$  que pode não ser válido.

**Apêndice: Há axiomas redundantes.** Observamos aqui que os axiomas que estabelecemos para o sistema dedutivo não é o menor conjunto possível, dentre eles há várias redundâncias. Por exemplo, com respeito a igualdade, podemos provar a propriedade simétrica (A14) usando os outros axiomas

$$\vdash (x \doteq y) \rightarrow (y \doteq x)$$

*Prova.*

- |     |   |            |   |
|-----|---|------------|---|
| 1.  | $x \doteq y$  | (hipótese) |   |
| 2.  | $(x \doteq y \wedge x \doteq x) \rightarrow (x \doteq x \rightarrow y \doteq x)$  | (A17)      |   |
| 3.  | $(x \doteq y \wedge x \doteq x) \rightarrow (x \doteq x)$   | (A6)       |   |
| 4.  | $((x \doteq y \wedge x \doteq x) \rightarrow (x \doteq x \rightarrow y \doteq x)) \rightarrow (((x \doteq y \wedge x \doteq x) \rightarrow$ |            |   |
| 4.  | $(x \doteq x)) \rightarrow ((x \doteq y \wedge x \doteq x) \rightarrow y \doteq x)$   | (A2)       |   |
| 5.  | $((x \doteq y \wedge x \doteq x) \rightarrow (x \doteq x)) \rightarrow ((x \doteq y \wedge x \doteq x) \rightarrow y \doteq x)$             | (MP 3,4)   |   |
| 6.  | $(x \doteq y \wedge x \doteq x) \rightarrow y \doteq x$   | (MP 4,5)   | □ |
| 7.  | $x \doteq x$  | (A13)      |   |
| 8.  | $x \doteq x \rightarrow (x \doteq y \rightarrow (x \doteq y \wedge x \doteq x))$  | (A4)       |   |
| 9.  | $x \doteq y \rightarrow (x \doteq y \wedge x \doteq x)$   | (MP 7,8)   |   |
| 10. | $x \doteq y \wedge x \doteq x$  | (MP 1,9)   |   |
| 11. | $y \doteq x$  | (MP 1,10)  |   |

Existem várias axiomatizações da lógica de predicados, uma vez que, para qualquer lógica, há liberdade na escolha de axiomas e regras de inferência que caracterizam essa lógica. Descrevemos aqui um sistema axiomático à Hilbert. Poderíamos ter restringido os 10 primeiros axiomas aos 3 seguintes

- (1)  $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
- (2)  $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \xi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \xi))$
- (3)  $(\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

Esses axiomas descrevem a lógica proposicional clássica. Para manipular quantificadores universais basta

- (4)  $\forall x\phi \rightarrow [\phi]_x^t$  onde  $t$  é admissível para  $x$  em  $\phi$

dos três esquemas de axioma lógico que usamos (aqui em outra ordem)

- $\forall x\phi \rightarrow [\phi]_x^t$  onde  $t$  é admissível para  $x$  em  $\phi$
- $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\phi \rightarrow \forall x\psi)$
- $\phi \rightarrow \forall x\phi$  onde  $x$  não é uma variável livre de  $\phi$ .

os dois últimos são redundante se adotarmos a regra de generalização (G) como regra de inferência primitiva.

Dos esquemas de axioma para a igualdade, basta

(5)  $x \doteq x$  para cada variável  $x$

(6)  $(x \doteq y) \rightarrow ([\phi]_z^x \rightarrow [\phi]_z^y)$