7. AXIOMAS NÃO LÓGICOS E TEORIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Uma **teoria formal de primeira ordem**, ou simplesmente uma **teoria elementar**, é uma teoria que tem subjacente uma lógica de primeira ordem. Uma teoria consiste de um conjunto Γ de *sentenças* de uma linguagem de primeira ordem $\mathscr{L}$ **dedutivamente fechado**, isto é, tal que todo teorema de Γ pertence a Γ (inclui-se os teoremas lógicos).

Se os teoremas de Γ podem ser deduzidos a partir de um subconjunto Σ de sentenças, então chamamos Σ de um **sistema de axiomas** para a teoria. Obviamente, Γ é um sistema de axiomas mas, geralmente, estamos interessados num sistema om descrição mais simples que a teoria. Em particular, todo teorema lógico é teorema das teorias elementares, portanto, quando tratamos de uma linguagem de primeira ordem podemos considerar os axiomas que descrevem apenas as propriedades dos símbolos não lógicos. Tais sentenças de Σ são os **axiomas não lógicos** da teoria

$$\mathrm{T}(\Sigma) = \{\sigma \colon \sigma \in \mathscr{L} \text{ e } \Sigma \vdash \sigma\}.$$

Exemplo 90. A linguagem $\mathscr{L}_G$ para a Teoria dos Grupos tem os símbolos não lógicos: uma constante, denotada por e, e um símbolo funcional binário, denotada por $\circ$. A teoria elementar dos grupos é dada pela linguagem $\mathscr{L}_G$ e os axiomas não lógicos

(G1): $\forall x\,((x \circ e \doteq x) \wedge (e \circ x \doteq x))$;

(G2): $\forall x \exists y\,(x \circ y \doteq e)$;

(G3): $\forall x \forall y \forall z\,(x \circ (y \circ z) \doteq (x \circ y) \circ z)$.

Exemplo 91. A linguagem $\mathscr{L}_{\mathscr{G}}$ para a Teoria dos Grafos tem um único símbolo não lógicos, a saber um símbolo relacional binário $\sim$ chamado de *adjacência*. A teoria elementar dos grafos é definida a partir da linguagem $\mathscr{L}_{\mathscr{G}}$ e os axiomas não lógicos

(Gr1): $\forall x\,(x \not\sim x)$;

(Gr2): $\forall x, \forall y\,(x \sim y \to y \sim x)$.

Axiomas não lógicos da Teoria dos Conjuntos.

Axioma da existência. Existe um conjunto que não tem elementos

$$\exists y \forall x (x \notin y).$$

Esse conjunto é único e denotado por $\varnothing$.

Axioma da extensionalidade. Quaisquer dois conjuntos com os mesmos elementos são iguais

$$\forall y \forall z ((\forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z)) \to y = z).$$

Axioma do par. Dados conjuntos y e z, existe um conjunto w tal que se $x \in w$ então $x = y$ ou $x = z$

$$\forall y \forall z \exists w \forall x (x \in w \leftrightarrow x = y \vee x = z).$$

Axioma da união. Para qualquer conjunto z existe um conjunto $\bigcup z$ tal que $y \in \bigcup z$ se, e só se, $y \in w$ para algum $w \in z$

$$\forall z \exists w \forall x (x \in w \leftrightarrow \exists y (x \in y \land y \in z)).$$

Axioma das partes. Para qualquer conjunto y, existe o conjunto z tal que $x \in z$ se, e só se, $x \subseteq y$.

$$\forall y \exists z \forall x (x \in z \leftrightarrow \forall z (x \in x \rightarrow z \in y)).$$

Axioma da especificação. De um conjunto y e um predicado P, formamos o conjunto $\{x \in y \colon P(y)\}$

$$\forall y \exists z \forall x (x \in z \leftrightarrow x \in y \land P(z)).$$

Esse axioma também é chamado de compreensão, separação ou seleção. De fato, especificação não é um axioma, mas um esquema de axiomas, um para cada predicado que pode ser escrito na linguagem formal da teoria dos conjuntos.

Axioma do infinito. Existe um conjunto indutivo[4], que tem $\varnothing$ como elemento e, se x é elemento, também é $x \cup \{x\}$

$$\exists z (\varnothing \in z \land \forall x (x \in z \rightarrow x \cup \{x\} \in z))$$

Sem esse axioma, só obtemos conjuntos finitos.

Axioma da fundação. Cada conjunto não vazio x tem um elemento y com $x \cap y = \varnothing$.

$$\forall x (x \neq \varnothing \rightarrow \exists y (y \in x \land x \cap y = \varnothing)).$$

Também chamado de axioma da regularidade, esse axioma evita construções "estranhas" como $x = \{x\}$ e permite indução em conjuntos bem-ordenados.

Axioma da substituição. Para todo conjunto x e para todo predicado $R(s,t)$ com a propriedade $\forall s \exists ! t R(s,t)$, existe o conjunto z tal que $y \in z$ se, e só se, existe $w \in x$ para o qual $R(w,y)$. Esse também é um esquema de axiomas e é usado em partes mais sofisticadas da teoria dos conjuntos.

Axioma da escolha. Para todo conjunto x de conjuntos não vazios e dois-a-dois disjuntos existe um conjunto z que tem exatamente um elemento em comum com cada conjunto de x.

O conjunto z "escolhe" um elemento de cada y em x. Esse axioma tem um enunciado equivalente que usa uma *função escolha*: Para qualquer conjunto x formado de conjuntos não-vazios, existe uma função f que atribui para cada $y \in x$ uma imagem $f(y) \in y$.

O último axioma é controverso para alguns matemáticos e quando usado é explicitamente mencionado. Embora seu enunciado pareça coerente há alguns enunciados equivalentes, ou decorrentes dele, que não são intuitivos como, por exemplo, o paradoxo de Banach–Tarski. Também

[4] Isto dá uma codificação de $\mathbb{N}$, $\varnothing$ representa 0 e $x \cup \{x\}$ representa $x+1$. Efetivamente, define cada número natural como o conjunto de todos números menores, e.g., $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, $3 = \{0,1,2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

segue desse axioma a afirmação de que os números reais podem ser ordenado de modo que qualquer subconjunto não vazio contenha um menor elemento.

Por fim, como já dissemos, note-se a forma diferente com que se escreve um conjunto por especificação, com respeito a teoria intuitiva. Agora não temos mais o paradoxo de Russell pois se

$$S = \{x \in A\colon x \not\in x\}$$

então $S \in S$ se e só se $S \in A$ e $S \not\in S$ o que não é contraditório, a conclusão é que $S \not\in A$. Como subproduto temos o fato já mencionado de que em teoria dos conjuntos *não há conjunto universo.*

Teorema $\neg\exists y \forall x (x \in y)$.

De fato, se existisse então tomaríamos-o por A no argumento acima o que daria uma contradição pois $S \not\in A$.

7.1. **Axiomas não lógicos da Aritmética.** À linguagem $\mathscr{L}_N$ acrescentamos, além dos axiomas lógicos, os seguintes axiomas não lógicos da teoria elementar de números

(PA0): $\forall x\,(Sx \neq 0)$

(PA1): $\forall x \forall y (Sx \doteq Sy \to x \doteq y)$

(PA2): $\forall x\,(x + 0 \doteq x)$

(PA3): $\forall x \forall y\,(x + Sy \doteq S(x + y))$

(PA4): $\forall x\,(x \cdot 0 \doteq 0)$

(PA5): $\forall x \forall y\,(x \cdot Sy \doteq (x \cdot y) + x)$

(PA6): Se $\varphi \in \mathscr{L}_N$ com $x \in VL(\varphi)$, então

$$\left([\varphi]_x^0 \wedge \forall x \left(\varphi \to [\varphi]_x^{Sx}\right)\right) \to \forall x\, \varphi$$

Notemos que (PA0)–(PA5) são axiomas, i.e. fórmulas da linguagem, enquanto que (PA6) é um esquema de axioma, é o esquema de axioma da indução. Além desses, os axiomas de ordem

(OA0): $\forall x \neg (x < 0)$

(OA1): $\forall x \forall y\,(x < Sy \leftrightarrow x < y \vee x \doteq y)$

(OA2): $\forall x \forall y\,(x < y \vee x \doteq y \vee y < x)$.

Abaixo vamos usar o seguinte teorema lógico

Exercício 92.

$$\beta, \alpha \to \gamma \vdash \alpha \to (\beta \wedge \gamma)$$

Solução. (A4+MP) $\langle \alpha, \beta, \alpha \to \gamma, \gamma, \beta \wedge \gamma \rangle$. □

Agora, denotamos por Σ_{PA} o conjunto $\Sigma_{\mathsf{PA}} = \{\mathrm{PA0}, \mathrm{PA1}, \mathrm{PA2}, \mathrm{PA3}, \mathrm{PA4}, \mathrm{PA5}, \mathrm{PA6}, \mathrm{OA0}, \mathrm{OA1}, \mathrm{OA2}\}$ dos axiomas não lógicas da Aritmética e vamos provar usando o esquema de indução que

$$\Sigma_{\mathsf{PA}} \vdash \forall x\,(0 + x \doteq x). \tag{7}$$

cuja prova será feita com a seguinte instanciação do esquema de indução

$$\Big([0 + x \doteq x]^0_x \land \forall x\,\big(0 + x \doteq x \to [0 + x \doteq x]^{Sx}_x\big)\Big) \to \forall x\,(0 + x \doteq x)$$

Nos primeiros passos da dedução, provamos cada uma das duas fórmulas que formam o antecedente da implicação acima, a "base" $[0{+}x \doteq x]^0_x$ e o "passo" da indução $\forall x\,\big(0 + x \doteq x \to [0 + x \doteq x]^{Sx}_x\big)$.

1.	$\forall x(x + 0 = 0)$	(PA2)
2.	$\forall x(x + 0 = 0) \to [x + 0 \doteq x]^0_x$	(A1I)
3.	$[x + 0 \doteq x]^0_x$	(MP 1,2)

Pela definição de substituição temos $[x + 0 \doteq x]^0_x = 0 + 0 \doteq 0 = [0 + x \doteq x]^0_x$. Agora, vamos derivar a fórmula $\forall x\,(0 + x \doteq x \to 0 + Sx \doteq Sx)$.

4.	$\forall y \forall x(y + Sx \doteq S(y + x))$	(PA3)
5.	$\forall y \forall x(y + Sx \doteq S(y + x)) \to \forall x(0 + Sx \doteq S(0 + x))$	(A11)
6.	$\forall x(0 + Sx \doteq S(0 + x))$	(MP 4,5)
7.	$\forall x(0 + Sx \doteq S(0 + x)) \to 0 + Sx \doteq S(0 + x)$	(A11)
8.	$0 + Sx \doteq S(0 + x)$	(MP 6,7)
9.	$0 + x \doteq x \to S(0 + x) \doteq Sx$	(A18)
10.	$0 + x \doteq x \to (0 + Sx \doteq S(0 + x) \land S(0 + x) \doteq Sx)$	(exerc. 92 8,9)
11.	$(0 + Sx \doteq S(0 + x) \land S(0 + x) \doteq Sx) \to (0 + Sx \doteq Sx)$	(A16)
12.	$0 + x \doteq x \to 0 + Sx \doteq Sx$	(SH 10,11)
13.	$\forall x\,(0 + x \doteq x \to 0 + Sx \doteq Sx)$	(TG 12)

Feito isso, a conclusão de (7.1) se dá da seguinte forma.

14.	$0 + 0 \doteq 0 \land \forall x\,(0 + x \doteq x \to 0 + Sx \doteq Sx)$	(IC 3,13)
15.	$\big(0 + 0 \doteq 0 \land \forall x\,(0 + x \doteq x \to 0 + Sx \doteq Sx)\big) \to \forall x\,(0 + x \doteq x)$	(PA6)
18.	$\forall x\,(0 + x \doteq x)$	(MP 14,15)

Note que provamos $\forall x\,(0 + x \doteq 0)$ e que $\forall x\,(x + 0 \doteq 0)$ é axioma.

Exercício 93. Escreva uma prova formal para

$$\Sigma_{\mathsf{PA}} \vdash \forall x\,(0 + x \doteq x + 0).$$

Note que provamos $\forall x\,(0 + x \doteq 0)$ e que $\forall x\,(x + 0 \doteq 0)$ é axioma.

O exercício acima é a base da indução para provar que a soma é comutativa

$$\Sigma_{\mathsf{PA}} \vdash \forall x \forall y\,(x + y \doteq y + x).$$

Se provarmos que $\forall x\,\big((\forall y\,(x+y \doteq y+x)) \to [\forall y\,(x+y \doteq y+x)]^{Sx}_{x}\big)$ é consequência sintática de Σ_{PA} então

1.	$\forall y\,(0+y \doteq y+0)$	("base")
2.	$\forall x\,\big((\forall y\,(x+y \doteq y+x)) \to (\forall y\,(Sx+y \doteq y+Sx)\big)$	("passo")
3.	$\forall y\,(0+y \doteq y+0) \wedge$ $\forall x\big((\forall y\,(x+y \doteq y+x)) \to (\forall y\,(Sx+y \doteq y+Sx)\big)$	(IC 1,2)
4.	$\big(\forall y\,(0+y \doteq y+0) \wedge \forall x\big((\forall y\,(x+y \doteq y+x)) \to$ $(\forall y\,(Sx+y \doteq y+Sx)\big)\big) \to \forall x(\forall y\,(x+y \doteq y+x))$	(PA6)
5.	$\forall x(\forall y\,(x+y \doteq y+x))$	(MP 3,4)

Exercício 94. $\Sigma_{\mathsf{PA}} \vdash \forall x\,\big((\forall y\,(x+y \doteq y+x)) \to (\forall y\,(Sx+y \doteq y+Sx)\big)$

Exercícios

(1) Demonstre as propriedades de $\vdash$.

(2) Escreva uma prova para $\Sigma_{\mathsf{PA}} \vdash S0+SS0 \doteq SSS0$ e para $PA \vdash 0 < S0$.

(3) Escreva uma prova para $\Sigma_{\mathsf{PA}} \vdash \forall x(0 \cdot x \doteq 0)$.

(4) Escreva uma prova para $\Sigma_{\mathsf{PA}} \vdash \forall x(x \doteq 0 \vee \exists y(x \doteq Sy))$.