8. Semântica para a lógica de predicados

Para interpretar as fórmulas de uma linguagem de primeira ordem, precisamos estabelecer um universo de discurso, também chamado de domínio; os símbolos funcionais n-ários correspondem à operações n-árias nesse domínio; os símbolos relacionais n-ários serão interpretados como relações n-árias sobre o domínio e as constantes são elementos do domínio.

Exemplo 95. Intuitivamente, para

$$\forall x_1\, R_1^2(x_1, x_1)$$

se o domínio é $\mathbb{N}$ e R_1^2 representa a relação de divisibilidade então a fórmula é verdadeira, nos diz que "todo número natural é divisível por ele mesmo". Se o domínio é $\mathbb{Z}$ e R_1^2 representa a relação *menor que* então a fórmula é falsa, não é verdade que "todo número inteiro é menor que ele mesmo".

Para

$$\exists x_1\, (R_1^2(x_2, x_1) \wedge R_1^2(x_1, x_3))$$

no domínio $\mathbb{Z}$ e R_1^2 a relação *menor que*, também devemos interpretar as variáveis livres x_2, x_3. Se interpretamos x_2 como 5 e x_3 como 8 obtemos a sentença verdadeira "existe um inteiro n tal que $5 < n$ e $n < 8$". Se interpretamos x_2 como 5 e x_3 como 6 obtemos a sentença falsa "existe um inteiro n tal que $5 < n$ e $n < 6$".

Intuitivamente, para a linguagem da teoria dos grupos, exemplo 90, com domínio $\mathbb{Z}$ e interpretando a constante e como o $0 \in \mathbb{Z}$ e interpretando a operação $\circ$ como a soma de inteiros temos, intuitivamente, que os axiomas G1, G2 e G3 são verdadeiros. Por outro lado, com domínio $\mathbb{N}$ e interpretando a constante e como o $1 \in \mathbb{Z}$ e interpretando a operação $\circ$ como a soma de números naturais o axioma G3 é falso.

Uma interpretação é dada por uma estrutura matemática e uma atribuição nos elementos do universo para cada varíáveis.

9. Estrutura e atribuição

Uma **estrutura** $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} = (M, c_1, c_2, \dots, c_\ell, R_1, \dots, R_m, F_1, \dots, F_n)$$

é tal que M é um conjunto não vazio, $c_1, c_2, \dots, c_\ell$ são alguns (possivelmente nenhum) elementos tomados de M, $R_1, \dots, R_m$ são relações (possivelmente nenhuma) sobre M e $F_1, \dots, F_m$ operações sobre M (possivelmente nenhuma). O conjunto M é denominado **domínio** ou **universo** de $\mathfrak{M}$. São estruturas

- $\mathscr{B} = (\{0,1\}, 0, 1, \max, \min, \overline{})$. Aqui $\max, \min$ têm seus significados habituais no domínio $\{0,1\}$, $\overline{(x)} = 1 - x$ e não há relações ou constantes.
- $\mathscr{P} = (\wp(X), \varnothing, X, \cup, \cap, ^{\complement})$. Aqui X é um conjunto não vazio, $\cup$ e $\cap$ têm seus significados habituais para conjuntos e $^{\complement}(A) = A^{\complement}$ é o complemento do A com respeito a X.
- $(\mathbb{N}, 0, 1, <, +, \cdot)$ é uma estrutura cujo universo é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e $0, 1, <, +, \cdot$ têm os seus significados usuais.
- $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$ é uma estrutura cujo universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e as operações são a soma e produto usuais.
- $(\mathbb{N}, <)$ é uma estrutura cujo universo é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e $<$ é a relação binária “menor que “ usual.
- (V, E) com V não vazio e $E \subset V \times V$ uma relação binária é uma estrutura para grafos.

Se $\mathfrak{M}$ não contém funções ou constantes, então $\mathfrak{M}$ também é chamada de *estrutura relacional*, como em $(\mathbb{N}, <)$ e (V, E). Se $\mathfrak{M}$ não tem relações é chamado de *estrutura algébrica*, como é o caso dos outros exemplos.

9.1. **Estrutura para uma linguagem.** Uma estrutura para uma linguagem de primeira ordem $\mathscr{L}$ é uma estrutura que dá significado aos símbolos não lógicos da linguagem, é formada por um conjunto não-vazio (chamado de domínio ou universo), uma operação n-ária para cada símbolo funcional n-ário da linguagem, uma relação n-ária para cada símbolo relacional n-ário e um elemento do domínio para cada constante da linguagem. Uma **$\mathscr{L}$-estrutura**

$$\mathfrak{M} = \left(M, c_1^{\mathfrak{M}}, \dots, c_\ell^{\mathfrak{M}}, R_1^{\mathfrak{M}}, \dots, R_m^{\mathfrak{M}}, F_1^{\mathfrak{M}}, \dots, F_n^{\mathfrak{M}}\right)$$

consiste, portanto, de

(1) um conjunto não vazio M chamado de domínio ou universo da linguagem;
(2) cada constante c da linguagem corresponde a um elemento $c^{\mathfrak{M}}$ de E;
(3) cada símbolo relacional n-ário R da linguagem corresponde a uma relação n-ária $R^{\mathfrak{M}}$ em M (isto é, $R^{\mathfrak{M}} \subseteq M^n$);
(4) cada símbolo funcional n-ário F corresponde a uma função $F^{\mathfrak{M}}$ de M^n em M (isto é, $F^{\mathfrak{M}} : M^n \to M$).

Exemplo 96. A *linguagem da Teoria das Ordens* $\mathscr{L}_O$ com símbolo relacional binário $<$ como o único símbolo não lógico admite as $\mathscr{L}_O$-estruturas

(1) $(\mathbb{N}, <^{\mathfrak{M}})$ com $<^{\mathfrak{M}} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + n = b$ para algum natural $n \neq 0\}$, a relação “menor que” usual sobre $\mathbb{N}$.
(2) $(\mathbb{Z}, \leq^{\mathfrak{M}})$ com $\leq^{\mathfrak{M}} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + n = b$ para algum natural $n\}$.

(3) $(\mathbb{N}, \mathbb{N}\times\mathbb{N})$.

(4) $(\wp(\mathbb{R}), \subset^{\mathfrak{M}})$ com $\subset^{\mathfrak{M}}$ a inclusão usual de conjuntos.

Exemplo 97. A linguagem $\mathscr{L}_N$ da aritmética, a qual tem os símbolos extralógicos 0, S, $<$, $+$, $\cdot$, admite as seguintes estruturas

(1) [5] Definimos $\mathfrak{U} = (U, 0^{\mathfrak{U}}, S^{\mathfrak{U}}, <^{\mathfrak{U}}, +^{\mathfrak{U}}, \cdot^{\mathfrak{U}})$ onde
- $U = \{1,2,3\}$, $0^{\mathfrak{U}} = 1$ e $S^{\mathfrak{U}} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$;
- A relação binária é dada por $<^{\mathfrak{U}} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$;
- as operações são dadas pelas seguintes tabelas (na linha i coluna j lê-se $i +^{\mathfrak{U}} j$

$+^{\mathfrak{U}}$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

$\cdot^{\mathfrak{U}}$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	3
3	1	3	2

(2) A interpretação usual $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, <^{\mathfrak{N}}, S^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}})$ onde $0^{\mathfrak{N}}$ é o número $0 \in \mathbb{N}$; a função $S^{\mathfrak{U}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$ é dada por $S^{\mathfrak{U}}(n) = n+1$, a relação binária $<^{\mathfrak{N}}$ e as operações $+^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}$ são o "menor que", a soma e o produto usuais de números naturais.

(3) Tomamos para algum conjunto X não vazio a estrutura $\mathfrak{C} = (\wp(X), 0^{\mathfrak{C}}, <^{\mathfrak{C}}, S^{\mathfrak{C}}, +^{\mathfrak{C}}, \cdot^{\mathfrak{C}})$ onde $0^{\mathfrak{C}}$ é o conjunto vazio; a função $S^{\mathfrak{C}}$ é dada por $S^{\mathfrak{C}}(A) = A^{\complement}$, os operadores $+^{\mathfrak{C}}$ e $\cdot^{\mathfrak{C}}$ são, respectivamente, a união e a interseção de conjuntos e a relação binária $<^{\mathfrak{C}}$ é definida pela inclusão $\subset$.

9.2. **Atribuição.** Uma **atribuição** associada a uma estrutura $\mathfrak{M} = \big(M, (c_i^{\mathfrak{M}})_{i=1}^{\ell}, (R_j^{\mathfrak{M}})_{j=1}^{m}, (F_k^{\mathfrak{M}})_{k=1}^{n}\big)$ é uma função

$$v : \{x_1, x_2, \dots\} \to M.$$

Dados uma estrutura $\mathfrak{M}$ e uma atribuição v, a **interpretação de termos** sob a atribuição é a única função $\bar{v}$ que estende a função v a todos os termos da linguagem, conforme as seguintes condições:

(1) se x é variável, $\bar{v}(x) = v(x)$;

(2) se c é uma constante, $\bar{v}(c) = c^{\mathfrak{M}}$;

(3) se F é um símbolo funcional n-ário e $t_1, \dots, t_n$ são termos, então a interpretação do termo F $(t_1, \dots, t_n)$ é dada por $\bar{v}(F(t_1, \dots, t_n)) = F^{\mathfrak{M}}(\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_n))$.

Exemplo 98. Com a $\mathscr{L}_N$-estrutura $\mathfrak{U}$ do exemplo 97 e com v tal que $v(x) = 1$ e $v(y) = 2$ o valor do termo $+(\cdot(0,x),y)$ é

$$\begin{aligned}\bar{v}(+(\cdot(0,x),y)) &= +^{\mathfrak{U}}(\cdot^{\mathfrak{U}}(\bar{v}(0),\bar{v}(x)),\bar{v}(y)) \\ &= +^{\mathfrak{U}}(\cdot^{\mathfrak{U}}(0^{\mathfrak{U}},1),2) \\ &= +^{\mathfrak{U}}(\cdot^{\mathfrak{U}}(1,1),2) \\ &= +^{\mathfrak{U}}(1,2) \\ &= 2\end{aligned}$$

Para o termo $+(x,y)$ temos o valor

$$\bar{v}(+(x,y)) = +^{\mathfrak{U}}(\bar{v}(x),\bar{v}(y)) = +^{\mathfrak{U}}(1,2) = 2$$

O valor do termo 0 é $\bar{v}(0) = 0^{\mathfrak{U}} = 1$.

Exemplo 99. Com a $\mathscr{L}_N$-estrutura $\mathfrak{C}$ do exemplo 97 e com v tal que $v(x) = X$ e $v(y) = \varnothing$ o valor do termo $+(\cdot(0,x),y)$ é

$$\begin{aligned}\bar{v}(+(\cdot(0,x),y)) &= +^{\mathfrak{C}}(\cdot^{\mathfrak{C}}(\bar{v}(0),\bar{v}(x)),\bar{v}(y)) \\ &= \cup(\cap(\varnothing,X),\varnothing) \\ &= \cup(\varnothing,\varnothing) \\ &= \varnothing.\end{aligned}$$

Para o termo $+(x,y)$ temos o valor

$$\bar{v}(+(x,y)) = +^{\mathfrak{C}}(\bar{v}(x),\bar{v}(y)) = \cup(X,\varnothing) = X.$$

Notemos que os termos usados como argumentos de $\bar{v}$ são símbolos da linguagem e a imagem de $\bar{v}$ são objetos do domínio da estrutura e, portanto, pertencem à metalinguagem.

Exercício 100. Demonstre que que a extensão $\bar{v}$ de uma atribuição v a todos os termos de uma linguagem é única.

METATEOREMA 20 *Seja $\mathfrak{M}$ uma estrutura para a linguagem de primeira ordem $\mathscr{L}$. Para todo termo t de $\mathscr{L}$, se v e w são duas atribuições que coincidem nas variáveis que ocorrem em t, então $\bar{v}(t) = \bar{w}(t)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Por indução para termos. Se t é uma variável ou uma constante, o resultado $\bar{v}(t) = \bar{w}(t)$ é imediato. Se t é $Ft_1t_2\dots t_n$ e, por hipótese da indução, $\bar{v}(t_i) = \bar{w}(t_1)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ então $\bar{v}(t) = F^{\mathfrak{M}}(\bar{v}(t_1),\dots,\bar{v}(t_ni)) = F^{\mathfrak{M}}(\bar{w}(t_1),\dots,\bar{w}(t_ni)) = \bar{w}(t)$ por definição. □

Assim, o valor de um termo numa interpretação depende somente dos valores atribuídos às variáveis que ocorrem no termo.

Exercício 101. Intuitivamente, a fórmula $\forall x\,(+(x,y) \doteq 0)$ da linguagem da aritmética é verdadeira no contexto do exemplo 98?

Atribuição x-variante. Se v é uma atribuição na estrutura $\mathfrak{E}$, então definimos a atribuição $[v]_{x\rightsquigarrow a}$, para qualquer a no domínio E de $\mathfrak{E}$ pondo

$$[v]_{x_i\rightsquigarrow a}(x_j) = \begin{cases} a & \text{se } j = i \\ v(x_j) & \text{se } j \neq i. \end{cases}$$

Por exemplo, se $E = \mathbb{N}$ e $v(x_j) = j$ então $[v]_{x_3\rightsquigarrow 0}$ é

$$[v]_{x_3\rightsquigarrow 0}(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 3 \\ j & \text{se } j \neq 3. \end{cases}$$