MAT 739 - Teoria dos Conjuntos e Aplicações

Prof. Stavros Christodoulo - sala 118A - r.6273

Dia 12/3/97

Bibliografia

- K. Kunen – *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs.*
- T. Jech – *Set Theory.*
- H. Enderton – *Elements of Set Theory.*
- F. Miraglia – *Teoria dos Conjuntos: um mínimo.*
- T. Jech & K. Hrbacek – *Introduction to Set Theory.*

Um paradoxo: Seja $\{n \in \mathbb{N}\colon n$ é definido com menos de 40 palavras$\}$. Seja n_0 o menor número natural que não é definido com menos que 40 palavras. MAS, n_0 foi definido com menos de 40 palavras.

Para evitar os paradoxos provenientes do uso indevido da linguagem usual, vamos introduzir uma linguagem formal, chamada **linguagem de ZF**, para enunciar os fatos da Teoria dos Conjuntos nela.

Símbolos da linguagem ZF:

- $\neg$ (lê-se NÃO)
- $\wedge$ (lê-se E)
- $\exists$
- $\in$
- $=$
- $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$
- (
-)

Os símbolos $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ são chamados **variáveis** (e se supõe intuitivamente que representam conjuntos).

Toda seqüência finita destes símbolos se chama uma **expressão** (de ZF). Entre as expressões vamos definir as **fórmulas** de ZF.

1. Definição. *A definição de fórmula será indutiva:*

1. *se x e y são variáveis, então as expressões*

$$x = y \quad e \quad x \in y$$

   são fórmulas de ZF, chamadas de atômicas;

2. *se φ é uma fórmula de ZF, então a expressão $\neg(\varphi)$ é um fórmula de ZF;*

3. *se φ e ψ são fórmulas de ZF, então a expressão $(\varphi) \land (\psi)$ é uma fórmula de ZF;*

4. *se φ é uma fórmula de ZF e x é uma variável, então $\exists x(\varphi)$ é uma fórmula;*

5. *uma expressão de ZF é uma fórmula se, e só se, pode ser obtida por uma aplicação finita de 1 a 4.*

Observação

1. Os parênteses têm a função de evitar ambigüidade. Na prática podemos eliminar alguns deles se isto não causar ambigüidade.

2. Vamos introduzir mais alguns símbolos, como abreviação destes:

   - $x \neq y$ abrevia $\neg(x = y)$,
   - $x \notin y$ abrevia $\neg(x \in y)$,
   - $(\varphi) \lor (\psi)$ abrevia $\neg((\neg\varphi) \land (\neg\psi))$,
   - $(\varphi) \to (\psi)$ abrevia $(\neg\varphi) \lor \psi$,
   - $(\varphi) \leftrightarrow (\psi)$ abrevia $(\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)$,
   - $\forall x(\varphi)$ abrevia $\neg(\exists x(\neg\varphi))$,
   - $(\exists x \in y)\varphi$ abrevia $\exists x(x \in y \land \varphi)$,
   - $(\forall x \in y)\varphi$ abrevia $\forall x(x \in y \to \varphi)$.

Exemplo

- $\forall x \forall y(\forall t(t \in x \leftrightarrow t \in y) \to x = y)$,
- $x \subseteq y$ abrevia $\forall t(t \in x \to t \in y)$,
- $x \subsetneqq y$ abrevia $x \subseteq y \land x \neq y$,
- $x \nsubseteq y$ abrevia $\neg(x \subseteq y)$.

Subfórmula de uma fórmula φ: toda expressão "dentro" de φ, que por sua vez é uma fórmula.

Exemplo Seja φ a fórmula $\exists x \exists y(x \neq y \wedge ((x \in z) \wedge (y \in z)))$. Suas subfórmulas são:

1. $x = y$,
2. $x \neq y$,
3. $x \in z$,
4. $y \in z$,
5. $x \in z \wedge y \in z$,
6. $x \neq y \wedge (x \in z \wedge y \in z)$,
7. $\exists y(x \neq y \wedge (x \in z \wedge y \in z))$,
8. $\exists x(\exists y(x \neq y \wedge (x \in z \wedge y \in z)))$.

O **alcance** (em inglês **scope**) de uma quantificador ($\exists$ ou $\forall$) numa fórmula é a subfórmula que começa com este quantificador. Por exemplo,

$$\underbrace{\overbrace{\forall x}(x \in y)}\underbrace{\overbrace{\exists z}(z \notin y)},$$

ou

$$(\underbrace{\overbrace{\forall x}(x \in y)} \wedge \underbrace{\overbrace{\exists z}(z \notin y)}) \to \underbrace{\overbrace{\exists y}(y \neq z)}.$$

Uma ocorrência de uma variável x numa fórmula φ se diz **ligada** se está no alcance de algum quantificador $\forall x$ ou $\exists x$; caso contrário, diz-se **livre**.

Uma fórmula sem ocorrências de variáveis livres se chama uma **sentença** (de ZF).

Exemplo Tomemos a fórmula $\exists x \exists y(x \neq y \wedge x \in z \wedge y \in z)$. Trocando-se x por u e y por v, a fórmula obtida ($\exists u \exists v(u \neq v \wedge u \in z \wedge v \in z)$) é "logicamente" equivalente à original. Porém, trocando-se x por z, temos $\exists z \exists y(z \neq y \wedge z \in z \wedge y \in z)$ que é completamente diferente da original.

Intuitivamente, se uma variável x ocorre livre numa fórmula φ, então interpretamos isto como se φ fosse uma afirmação sobre x (i.e. uma propriedade de x); e a escrevemos $\varphi(x)$ para destacar o fato que x ocorre livre em φ. Com esta notação, a fórmula obtida substituindo-se todas as ocorrências livres de x por outra variável y será indicada por $\varphi(y)$.

Em geral $\varphi(y)$ "diz" de y o mesmo que $\varphi(x)$ diz de x, desde que y não ocorra na fórmula original. Normalmente procuramos fazer mudanças deste tipo (chamadas **mudanças legítimas**). Com estas observações, define-se a fórmula

$$\exists! x \varphi(x)$$

como abreviação de

$$\exists x \forall y (\varphi(y) \leftrightarrow x = y),$$

ou equivalentemente $\exists x(\varphi(x) \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg\varphi(y)))$. Lê-se $\exists! x\varphi(x)$ como existe um único x tal que $\varphi(x)$.

Se $x_1, \ldots, x_n$ são todas as variáveis que ocorrem livres em φ, então chamamos a sentença $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ o **fecho universal** de φ.

A Teoria ZF

Os axiomas de ZF:

1.Axioma da Extensionalidade: Intuitivamente diz que dois conjuntos (quaisquer) que têm os mesmos elementos são iguais.

Em símbolos:

$$\forall x \forall y (\forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y) \rightarrow x = y).$$

Dia 14/3/97

Os Axiomas

Uma lista dos axiomas (só os nomes):

0.Existência de algum conjunto $\exists x(x = x)$
1.Extensionalidade $\forall x \forall y(t \in x \leftrightarrow t \in y) \rightarrow x = y)$
2.Regularidade $\forall x(\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y)))$
3.Esquema de Separação $\forall z \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi)$
4.do Par $\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z)$
5.da União $\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A)$
6.Esquema de Sustituição $\forall x \in A \exists! y \varphi(x, y) \rightarrow \exists Y(\forall x \in A)(\exists y \in Y)\varphi(x, y)$
7.Existência de conjunto infinito $\exists x(0 \in x \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x))$
8.das Partes $\forall x \exists y \forall z(z \subseteq x \rightarrow z \in y)$
9.da Escolha $\forall A \exists R(R$ bem ordena $A)$

ZFC - A teoria com os axiomas de 0 a 9.
ZF - A teoria com os axiomas de 0 a 8.
ZFC$^-$, **ZF**$^-$ - ZFC, ou ZF, exceto o axioma 2.

ZFC − P, ZF − P - ZFC, ou ZF, exceto o axioma 8.

Vejamos agora os axiomas um por um.

0.Existência de algum conjunto: $\exists x(x = x)$.

1.Axioma da Extensionalidade: $\forall x \forall y(\forall t(t \in x \leftrightarrow t \in y) \rightarrow x = y)$.
Observação A recíproca, i.e., $x = y \rightarrow \forall t(t \in x \leftrightarrow t \in y)$ é um fato verdadeiro, devido às propriedades lógicas da igualdade. São elas:

1. $x = x$
2. $x = y \rightarrow y = x$
3. $x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$
4. $(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \rightarrow f x_1 \ldots x_n = f y_1 \ldots y_n$
5. $(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \rightarrow (p x_1 \ldots x_n \leftrightarrow p y_1 \ldots y_n)$

onde f é um símbolo de função n-ária e p é um símbolo de predicado n-ário.

3.Esquema de Separação (1908): Queremos garantir que dada uma propriedade $P(x)$ existiria o conjunto de todos os x's tais que $P(x)$, i.e., dada uma fórmula φ com x livre, gostaríamos que existisse um conjunto y tal que

$$\forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi).$$

Mas isto não é possível, conforme a fórmula $x \notin x$ mostra (Paradoxo de Russel): pois, se existisse y tal que $\forall x(x \in y \leftrightarrow x \notin x)$, então, para $x = y$, teríamos $y \in y \leftrightarrow y \notin y$.

Em 1908, Zermelo propõe a seguinte variante para este princípio: dados um conjunto A e uma fórmula φ (com x livre) existiria um conjunto B de todos os $x \in A$ que satisfazem φ, i.e.,

$$\forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \varphi).$$

Como não podemos quantificar sobre fórmulas, i.e., escrever $\forall \varphi \forall A \ldots$, na verdade temos um "esquema" de axiomas, que seria: para cada fórmula φ com x livre, a seguinte sentença é um axioma:

$$\text{O fecho universal de } \forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \varphi),$$

onde B é uma variável que não ocorre em φ (para evitar "choques de notação").

Vamos rever o Paradoxo de Russel: pelo axioma, dado A, existe B tal que

$$\forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin x).$$

Disto concluímos que $B \in B \leftrightarrow B \in A \wedge B \notin B$. $B \in B$ levaria a uma contradição. Portanto, $B \notin B$. Por sua vez, $B \in A$ levaria levaria à contradição $B \in B$. Logo $B \notin A$. Estas duas conclusões, $B \notin B$ e $B \notin A$, não levam à contradição.

2. Teorema.

$$\neg \exists x \forall y (y \in x),$$

i.e., não existe um conjunto que tenha todos os conjuntos por elementos, i.e., não existe "o conjunto universo".

Demonstração Pelo argumento anterior, vimos que dado um conjunto A, existe um conjunto B tal que $B \notin A$. Logo, A não pode ter todos os conjuntos por elementos. ■

Dados φ e A, existe B tal que $\forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \varphi)$. Pergunta: será que existe um único B?

Se C também satisfizesse $\forall x(x \in C \leftrightarrow x \in A \wedge \varphi)$, então $\forall x(x \in B \leftrightarrow x \in C)$ e pelo axioma de extensionalidade $B = C$.

Logo, dados φ e A, existe um único conjunto B tal que $\forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \varphi)$; por isso podemos introduzir uma notação para este único conjunto B, sem "modificar substancialmente" a expressividade da linguagem de ZF - i.e., toda fórmula escrita com os novos símbolos é equivalente dentro da teoria a uma fórmula na linguagem original. Denotamos por $\{x \in A \colon \varphi\}$ ou $\{x \colon x \in A \wedge \varphi\}$ o único conjunto B que satisfaz $\forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \varphi)$, i.e.,

$$\forall t(t \in \{x \in A \colon \varphi\} \leftrightarrow (t \in A \wedge \varphi(t))).$$

Exemplo Dado A, usando a fórmula $x \neq x$, obtemos o conjunto $B = \{x \in A \colon x \neq x\}$, i.e., $\forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge x \neq x)$ e portanto $\forall x(x \in B \leftrightarrow x \neq x)$. Novamente, por extensionalidade, este B é único, e será denotado por $\emptyset$ ou 0 e será chamado o **conjunto vazio**.

Observe que a fórmula $u = \emptyset$ (da linguagem expandida) é equivalente a $\forall t(t \notin u)$. Por exemplo, $\emptyset \in A$ seria equivalente a

$$\exists u(u = \emptyset \wedge u \in A),$$

e a

$$\exists u(\forall t(t \notin u) \wedge u \in A).$$

4.<u>Axioma do Par</u>: Queremos um axioma que garanta que dados dois conjuntos exista o conjunto formado pelos dois.

Como dispomos do esquema de separação, é suficiente garantir a existência de algum que tem (pelo menos) estes dois elementos. Por isso o axioma será:

$$\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z).$$

Pelo axioma de separação, dados x e y, usando o z dado pelo axioma do par e a fórmula $\varphi(t) : t = x \lor t = y$, teremos que existe B tal que

$$\forall t(t \in B \leftrightarrow t \in z \land \varphi(t)),$$

i.e.,

$$\forall t(t \in B \leftrightarrow (t \in z \land (t = x \lor t = y))).$$

Logo, $\forall t(t \in B \leftrightarrow (t = x \lor t = y))$.

Pela notação $\{\dots\}$, teríamos: $B = \{t \in z \colon t = x \lor t = y\}$. Ainda $B = \{t \colon t = x \lor t = y\}$ e se denota este conjunto por $\{x, y\}$.

No caso em que $x = y$, definimos $\{x\}$ como sendo o conjunto $\{x, x\}$.

Portanto, $\emptyset \notin \emptyset$, mas $\emptyset \in \{\emptyset\}$. Logo $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Assim $\{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$. Portanto, metalinguisticamente, conseguimos "infinitos" conjuntos, mas ainda não temos um conjunto "infinito".

Observe que $\{x, y\} = \{y, x\}$ pois $\forall t(t \in \{x, y\} \leftrightarrow t = x \lor t = y)$ e $\forall t(t \in \{y, x\} \leftrightarrow t = y \lor t = x)$.

5.<u>Axioma da União</u>: Queremos garantir que dado um conjunto $\mathcal{F}$ exista o conjunto formado pela união de todos os elementos de $\mathcal{F}$, i.e., existe o conjunto de todos os elementos dos elementos de $\mathcal{F}$.

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall x \forall t((x \in \mathcal{F} \land t \in x) \to t \in A).$$

Pelo axioma de separação podemos formar

$$\{t \in A \colon (\exists x \in \mathcal{F}) t \in x\}$$

que, na realidade, será $\{t \colon (\exists x \in \mathcal{F}) t \in x\}$; uma vez que todos os t's que satisfazem $(\exists x \in \mathcal{F}) t \in x$ estão em A. Denotamos $\{t \colon (\exists x \in \mathcal{F}) t \in x\}$ por $\bigcup \mathcal{F}$ (que se lê a **união** de $\mathcal{F}$; e é a união de todos os elementos de $\mathcal{F}$).

$$\forall t(t \in \bigcup \mathcal{F} \leftrightarrow (\exists x \in \mathcal{F}) t \in x).$$

Exemplo Dados x e y, podemos formar $\mathcal{F} = \{x, y\}$ (pelo axioma do par) e $\bigcup \mathcal{F}$ (pelo axioma da união). Teremos

$$\forall t(t \in \bigcup \mathcal{F} \leftrightarrow (\exists z \in \mathcal{F}) t \in z).$$

Como $t \in \bigcup \mathcal{F} \leftrightarrow (\exists z \in \{x, y\}) t \in z$,

$$t \in \bigcup \mathcal{F} \leftrightarrow t \in x \lor t \in y.$$

Denotamos, então, este conjunto por $x \cup y$. Assim $\bigcup \{x, y\} = x \cup y$.

Em particular, $\bigcup \{x\} = x$ e $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

Como obter $\{x, y, z\}$? Basta tomar $\{x, y\} \cup \{z\}$.

Dia 19/3/97

Já vimos os axiomas:

- da extensionalidade
- esquema do axioma de substituição
- do par
- da união

Dado um conjunto A e uma fórmula $\varphi(x)$, vimos que existe um conjunto $B = \{x \in A\colon \varphi(x)\}$. Daí, $\emptyset = \{x\colon x \neq x\}$, $\{A, B\} = \{x\colon x = A \vee x = B\}$ e $\bigcup A = \{x\colon (\exists y \in A) x \in y\}$.

6.Esquema do axioma de substituição (replacement) (introduzido por Fraenkel em 1922): "Diz" que dado um conjunto A e uma fórmula $\varphi(x,y)$ tal que $(\forall x \in A)\exists! y \varphi(x,y)$ - i.e., representaria uma função definida em A - deve existir algum conjunto Y que tenha todos os y's tais que $\varphi(x,y)$ para $x \in A$.

Formalmente: para toda fórmula $\varphi(x,y)$ a seguinte sentença será um dos axiomas de substituição:

$$\text{O fecho universal de } (\forall x \in A)\exists! y \varphi(x,y) \to \exists Y (\forall x \in A)(\exists y \in Y)\varphi(x,y),$$

onde Y é alguma variável que não ocorre livre em φ.

Pelo axioma de separação, podemos formar $B = \{y \in Y\colon (\exists x \in A)\varphi(x,y)\}$, onde Y é dado pelo axioma da substituição, e portanto este B também será

$$B = \{y\colon (\exists x \in A)\varphi(x,y)\}.$$

Mais algumas construções de conjuntos:

1.Dados conjuntos A e B podemos formar os conjuntos: $\{x \in A\colon x \in B\}$ e $\{x \in A\colon x \notin B\}$ (usando o axioma de separação). O primeiro denota-se por $A \cap B$ e o segundo por $A \setminus B$, i.e.,

$$A \cap B = \{x\colon x \in A \wedge x \in B\}$$

e

$$A \setminus B = \{x\colon x \in A \wedge x \notin B\}.$$

2.Dado um conjunto não-vazio A, seja $a \in A$. Então existe o conjunto $\{x \in a\colon (\forall y \in A) x \in y\}$ (pelo axioma de separação) que será também igual a:

$$\{x\colon (\forall y \in A) x \in y\}.$$

Denota-se este conjunto por $\bigcap A$ (a intersecção de todos os elementos de A).

Por exemplo, $A = \{u, v\}$, então $\bigcap\{u, v\} = u \cap v$. Se $A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, então $\bigcap A = a_1 \cap \ldots \cap a_n \cap \ldots$. Em particular, $\bigcap\{x\} = x$.

O que é $\bigcap \emptyset$?

Teríamos que $x \in \bigcap \emptyset \leftrightarrow (\forall y \in \emptyset) x \in y$, i.e., $\forall y(y \in \emptyset \to x \in y)$. Portanto todo conjunto satisfaz esta fórmula.

Logo, $\bigcap \emptyset$ não se define (senão $\bigcap \emptyset = \{x \colon x = x\}$, que vimos que não existe).

Observe que dados a e b, se $\{x, y\} = \{a, b\}$, então podemos concluir

$$(x = a \wedge y = b) \vee (x = b \wedge y = a).$$

Gostaríamos de alguma construção tal que, dados a e b, obtivéssemos algum conjunto $\langle a, b\rangle$ com a propriedade: se $\langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle$, então $x = a$ e $y = b$. **Exercício** [Exercício 2 da lista 1] Seja $\langle a, b\rangle \stackrel{def}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Mostre que

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

O conjunto $\langle a, b\rangle$ chama-se o **par ordenado** a, b. a se diz a **primeira componente de** $\langle a, b\rangle$ e b se diz a **segunda componente de** $\langle a, b\rangle$.

Observação "$z = \langle x, y\rangle$" é abreviação de $z = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ que é abreviação de $\forall t(t \in z \leftrightarrow t = \{x\} \vee t = \{x, y\})$ que, por sua vez, é abreviação de $\forall t(t \in z \leftrightarrow \forall u(u \in t \leftrightarrow u = x) \vee \forall v(v \in t \leftrightarrow v = x \vee v = y))$.

Queremos garantir a existência de um conjunto feito por todos os pares ordenados $\langle x, y\rangle$ com $x \in A$ e $y \in B$, i.e., algum conjunto C tal que:

$$\forall z(z \in C \leftrightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in B) z = \langle x, y\rangle).$$

Seja $y \in B$ (fixado), e considere a fórmula $\varphi(x, z)$ como sendo "$z = \langle x, y\rangle$". É claro que

$$(\forall x \in A)\exists! z \varphi(x, z).$$

Logo, pelo axioma de substituição, existe $\mathrm{prod}(A, y) \stackrel{def}{=} \{z \colon (\exists x \in A)\varphi(x, z)\} = \{\langle x, y\rangle : x \in A\}$.

Para cada $y \in B$, obtivemos o conjunto $\mathrm{prod}(A, y)$. Se $\psi(y, w)$ é a fórmula "$w = \mathrm{prod}(A, y)$", é claro que $(\forall y \in B)\exists! w \psi(y, w)$. Logo, pelo axioma de substituição, existe o conjunto

$$\mathrm{prod}'(A, B) = \{w \colon (\exists y \in B) w = \mathrm{prod}(A, y)\} = \{\mathrm{prod}(A, y) \colon y \in B\}.$$

Finalmente, pelo axioma da união, existe $C = \bigcup \mathrm{prod}'(A, B)$, e este satisfaz

$$\forall z(z \in C \leftrightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in B) z = \langle x, y\rangle),$$

ou seja,

$$C = \{z\colon (\exists x \in A)(\exists y \in B) z = \langle x, y\rangle\} = \{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Notação Este conjunto C será chamada de **produto cartesiano de** A **por** B e será denotado por $A \times B$.
Observação Se $F(X)$ indica uma operação sobre conjuntos (por exemplo, $F(X)$ sendo $A \cap X$, onde A é um conjunto dado, como no exercício 3(i) da lista 1), então a notação $\{F(X)\colon X \in B\}$ indicaria o conjunto $\{t\colon (\exists X \in B) t = F(X)\}$ (se isto for de fato um conjunto). (Assim $\{A \cap X\colon X \in B\} = \{t\colon (\exists X \in B) t = A \cap X\}$.)

3. Definição. *Um conjunto R se diz uma **relação** se, e só se, todos os seus elementos são pares ordenados, i.e.,*

$$\forall z (z \in R \to z \text{ \emph{é par ordenado}}).$$

Dado um conjunto R, definimos:

1. o **domínio de** R como sendo o conjunto $\operatorname{dom} R = \{x\colon \exists y\ \langle x, y\rangle \in R\}$,
2. a **imagem de** R como sendo o conjunto $\operatorname{im} R = \{y\colon \exists x\ \langle x, y\rangle \in R\}$, e,
3. a **inversa de** R como sendo o conjunto $R^{-1} = \{\langle y, x\rangle : \langle x, y\rangle \in R\} = \{z\colon \exists x \exists y (\langle x, y\rangle \in R \wedge z = \langle y, x\rangle\}$.

Exercício [Exercício 7 da lista 1] Verifique que:
(i) R é uma relação $\leftrightarrow$ $R \subseteq \operatorname{dom} R \times \operatorname{im} R$,
(ii) R^{-1} é sempre uma relação; e R é um relação $\leftrightarrow$ $(R^{-1})^{-1} = R$ (em geral, $(R^{-1})^{-1}$ é a maior "relação" contida em R).

4. Definição. *Um conjunto f é uma **função** se, e só se, f é uma relação **"unívoca"**, i.e., f é uma relação e $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \to y = z)$.*

Notação $f\colon A \longrightarrow B$ abrevia $\begin{cases} f \text{ é uma função}, \\ \operatorname{dom} f = A, \text{ e} \\ \operatorname{im} f \subseteq B \end{cases}$.

Dia 21/3/97

Quando R for uma relação, escreveremos, eventualmente, xRy para $\langle x, y\rangle \in R$.

Lembremos que f é uma função se, e só se, f é uma relação "unívoca", i.e., $\forall x \in \operatorname{dom} f)(\exists! y \in \operatorname{im} f)\, \langle x, y\rangle \in f$, ou $\forall x \forall y \forall z (\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \to y = z)$.

Notação $(\forall x \in \operatorname{dom} f)$ o único y tal que $\langle x, y\rangle \in f$ indica-se por $f(x)$.

5. Definição. *Seja $f\colon A \longrightarrow B$ uma função. Diremos que:*

1. *f é **1-1 (injetora)**, quando f^{-1} é uma função, ou seja, quando $\forall x \forall y \forall z(\langle x, z\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in f \rightarrow x = y)$,*

2. *f é **sobrejetora**, se, e só se,* $\operatorname{im} f = B$,

3. *f é **bijetora** se f é injetora e sobrejetora.*

4. *f **retrita** a C será o conjunto $f \restriction C \stackrel{def}{=} f \cap (C \times B) = \{\langle x, y\rangle \in f \colon x \in C\}$. $f''C = f[C] \stackrel{def}{=} \operatorname{im}(f \restriction C) = \{f(x) \colon x \in C\}$.*

6. Definição. *O par ordenado $\langle A, R\rangle$ é uma **ordem total ("estrita")** (ou R **ordena totalmente** A) se, e só se, R é uma relação e:*

1. $(\forall x, y, z \in A)(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$, *(transitividade)*

2. $(\forall x, y \in A)(xRy \vee x = y \vee yRx)$, *(tricotomia)*

3. $(\forall x \in A)(\neg(xRx))$. *(não-reflexividade)*

Se $\langle A, R\rangle$ é uma ordem total e $B \subseteq A$, $\langle B, R\rangle$ também é uma ordem total. Se $x \in A$, definimos os **predecessores** de x como sendo

$$\operatorname{pred}(A, x, R) = \{y \in A \colon yRx\}.$$

Observe que, como $\neg(xRx)$, então $x \notin \operatorname{pred}(A, x, R)$.

7. Definição. *Se A e B são conjuntos, R e S são relações, dizemos que $\langle A, R\rangle$ é **isomorfo** a $\langle B, S\rangle$, e denotamos isto por $\langle A, R\rangle \simeq \langle B, S\rangle$, se, e só se, existe uma função $f \colon A \longrightarrow B$ bijetora e tal que $(\forall x, y \in A)(xRy \leftrightarrow f(x)Sf(y))$. f se diz um **isomorfismo** entre as estruturas $\langle A, R\rangle$ e $\langle B, S\rangle$.*

Observação No caso em que $\langle A, R\rangle$ e $\langle B, S\rangle$ são ordens totais é suficiente mostrar que

$$(\forall x, y \in A)(xRy \rightarrow f(x)Sf(y)),$$

para que f seja um isomorfismo.

De fato, sejam $x, y \in A$ tais que $f(x)Sf(y)$. Se $\neg(xRy)$, então $x = y$ ou yRx. Se yRx, temos $f(y)Sf(x)$ e, pela transitividade, $f(x)Sf(x)$. Portanto, em ambos os casos, teríamos $f(x)Sf(x)$. ■

8. Definição. *$\langle A, R\rangle$ é uma **boa ordem** se, e só se, $\langle A, R\rangle$ é uma ordem total tal que $\forall B(\emptyset \neq B \subseteq A \rightarrow B$ tem um "R-mínimo"), onde $z \in A$ é um **R-mínimo** de B se, e só se, $z \in B$ e $(\forall x \in B)(zRx \vee x = z)$, i.e., $(\forall x \in B)(x \neq z \rightarrow zRx)$.*

Fatos: **1**. Seja $\langle A, R\rangle$ uma ordem total e sejam $v_1, v_2 \in A$, com $v_1 R v_2$; sejam $A_i = \operatorname{pred}(A, v_i, R)$, para i=1,2. Então

$$A_1 = \operatorname{pred}(A, v_1, R) = \operatorname{pred}(A_2, v_1, R).$$

Demonstração Claramente $\text{pred}(A_2, v_1, R) \subseteq A_1$, pela transitividade. Se $y \in A_1$, então $y \in A$ e yRv_1. Como v_1Rv_2, segue que yRv_2. Portanto, $y \in A_2$. Logo, $y \in A_2$ e yRv_1, e, por isso, $y \in \text{pred}(A_2, v_1, R)$. ■

2. Se $\langle A, R\rangle$ e $\langle B, S\rangle$ são ordens totais, $f\colon A \longrightarrow B$ é um isomorfismo entre $\langle A, R\rangle$ e $\langle B, S\rangle$ e $x \in A$, então $f \restriction \text{pred}(A, x, R)$ é um isomorfismo entre $\text{pred}(A, x, R)$ e $\text{pred}(B, f(x), S)$.
Demonstração Para simplificar estas notações sejam $A' = \text{pred}(A, x, R)$, $y = f(x)$ e $B' = \text{pred}(B, y, S)$.

É óbvio que $f \restriction A'$ também "preserva a ordem" e é 1-1; o que falta é verificar que $f[A'] = B'$.

Seja $u \in A'$, i.e., uRx, então $f(u)Sf(x)$, ou seja, $f(u)Sy$. Portanto $f(u) \in B'$. Seja $v \in B'$. Então $v \in B$ e vSy. Como f é sobrejetora em B, $(\exists u \in A) f(u) = v$ e portanto $f(u)Sf(x)$, donde uRx. ■

3. (lema 6.1 do livro) Se $\langle A, R\rangle$ é uma boa ordem e $x \in A$, então $\langle A, R\rangle \not\simeq \langle \text{pred}(A, x, R), R\rangle$.
Demonstração Se existisse $f\colon A \longrightarrow A'$, onde $A' = \text{pred}(A, x, R)$, isomorfismo; então $f(x) \neq x$, pois $x \notin A'$. Portanto $B = \{y \in A\colon f(y) \neq y\}$ é não-vazio. Sejam z o R-mínimo de B e $w = f(z)$. Se wRz, então $w \notin B$ e $f(w) = w = f(z)$. Como f é 1-1, $w = z$, mas $z \neq f(z)$.

Logo zRw. Como $w = f(z) \in A'$, $z \in A'$, por transitividade. Assim existe $u \in A$ tal que $f(u) = z$. De $zRf(z)$, segue que uRz e $u \in B$ (pois $f(u) = z \neq u$), contra a "minimalidade" de z. ■

4. (lema 6.2 do livro) Se $\langle A, R\rangle$ e $\langle B, S\rangle$ são boas ordens e f e g são isomorfismos entre elas, então $f = g$.
Demonstração Se não, o conjunto $D = \{y \in A\colon f(y) \neq g(y)\} \neq \emptyset$. Seja z o R-mínimo de D. Sem perda de generalidade, suponhamos $f(z)Sg(z)$.

Seja $u \in A$ tal que $g(u) = f(z)$. Como $g(u)Sg(z)$, uRz. Portanto, $u \notin D$ e $f(u) = g(u)$. Mas uRz implica que $f(u)Sf(z)$. E chegamos a uma contradição. ■

5. (teorema 6.3 do livro) Sejam $\langle A, R\rangle$ e $\langle B, S\rangle$ boas ordens. Vale uma, e apenas uma, entre:

1. $\langle A, R\rangle \simeq \langle B, S\rangle$,
2. $(\exists y \in B)\, \langle A, R\rangle \simeq \langle \text{pred}(B, y, S), S\rangle$,
3. $(\exists x \in A)\, \langle \text{pred}(A, x, R), R\rangle \simeq \langle B, S\rangle$.

Exercício 8 da lista 1

Uma **estrutura para a linguagem de ZF** é um par $\langle A, R\rangle$, onde A é um conjunto não-vazio e $R \subseteq A \times A$.

Dizemos que $\langle A, R\rangle$ satisfaz uma fórmula $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ com a substituição das variáveis $v_1, \ldots, v_n$, por elementos $a_1, \ldots, a_n$ de A - e denotamos isto por $\langle A, R\rangle \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ - se a "expressão" obtida substituindo cada $\forall x$ e $\exists x$ que ocorre em φ

por $\forall x \in A$ e $\exists x \in A$ e cada $x \in y$ que ocorre em φ por $s(x)Rs(y)$, onde $s(x) = \begin{cases} a_i & \text{se } x = v_i \\ x & \text{se } x \notin \{v_1, \ldots, v_n\} \end{cases}$, é "verdadeira" na estrutura $\langle A, R\rangle$.

Por exemplo, $\langle \mathbb{N}, E\rangle \models$ axioma da extensionalidade, i.e., $\langle \mathbb{N}, E\rangle \models \forall x \forall y(\forall t(x \in x \leftrightarrow x \in y) \to x = y)$, significa que

$$(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\left[(\forall t \in \mathbb{N})(tEx \Leftrightarrow tEy) \Rightarrow x = y\right].$$

$\langle \mathbb{N}, E\rangle \models$ axioma do par se, e só se,

$$\langle \mathbb{N}, E\rangle \models (\forall x)(\forall y)(\exists z)(x \in z \wedge y \in z),$$

ou seja, se, e só se,

$$(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(\exists z \in \mathbb{N})(xEz \text{ e } xEz).$$

$\langle \mathbb{N}, E\rangle \models$ axioma da união se, e só se,

$$\langle \mathbb{N}, E\rangle \models \forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x(Y \in \mathcal{F} \wedge x \in Y \to x \in A),$$

Portanto, devemos verificar se

$$(\forall \mathcal{F} \in \mathbb{N})(\exists A \in \mathbb{N})(\forall Y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})[\text{se } yE\mathcal{F} \text{ e } xEY, \text{ então } xEA].$$

$\langle \mathbb{N}, E\rangle \models \forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \varphi(x))$ significa que

$$(\forall A \in \mathbb{N})(\exists B \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})\left[xEB \text{ se, e só se, } xEA \text{ e } \langle \mathbb{N}, E\rangle \models \varphi[x]\right].$$

Dia 2/4/97

9. Teorema (6.3). *Sejam $\langle A, R\rangle$ e $\langle B, S\rangle$ boas ordens. Vale uma, e apenas uma, entre:*

(i) $\langle A, R\rangle \simeq \langle B, S\rangle$,

(ii) $(\exists y \in B)\, \langle A, R\rangle \simeq \langle \mathrm{pred}(B, y, S), S\rangle$,

(iii) $(\exists x \in A)\, \langle \mathrm{pred}(A, x, R), R\rangle \simeq \langle B, S\rangle$.

Observação isomorfismo é uma relação de equivalência.

Suponha que valem (ii) e (iii) do teorema. Seja $f\colon A \to B'$, $B' = \mathrm{pred}(B, y, S)$, o isomorfismo entre $\langle A, R\rangle$ e $\langle \mathrm{pred}(B, y, S), S\rangle$. Então $f \restriction \mathrm{pred}(A, x, R)$ seria isomorfismo entre $\langle \mathrm{pred}(A, x, R), R\rangle$ e $\langle \mathrm{pred}(B', f(x), S), S\rangle$ que é igual, pelo Fato 1, a $\langle \mathrm{pred}(B, f(x), S), S\rangle$ e portanto $\langle B, S\rangle \simeq \langle \mathrm{pred}(B, f(x), S), S\rangle$ contra o lema 6.1. Que não valem (i) e (iii) ou (i) e (ii), fica como exercício.

Demonstração

Notação para $v \in A$ e $w \in B$, sejam $A_v = \mathrm{pred}(A, v, R)$ e $B_w = \mathrm{pred}(B, w, S)$. Seja

$$f = \{\langle v, w\rangle : v \in A \text{ e } w \in B \text{ e } \langle A_v, R\rangle \simeq \langle B_w, S\rangle\}.$$

Vamos provar que f é uma função que preserva a ordem e que $\operatorname{dom} f = A$ ou $\operatorname{im} f = B$.

1)$\underline{f \text{ é função}}$: Como f é uma relação é suficiente mostrar que é unívoca.

Sejam $\langle v, w_1\rangle, \langle v, w_2\rangle \in f$. Sabemos que $\langle A_v, R\rangle \simeq \langle B_{w_i}, S\rangle$ para $i = 1, 2$, portanto $\langle B_{w_1}, S\rangle \simeq \langle B_{w_2}, S\rangle$. Se $w_1 \neq w_2$, então s.p.g. $w_1 S w_2$ e portanto $B_{w_1} = \operatorname{pred}(B_{w_2}, w_1, S)$ e teríamos $\langle \operatorname{pred}(B_{w_2}, w_1, S), S\rangle \simeq \langle B_{w_2}, S\rangle$ contra o lema 6.1.

2)$\underline{f \text{ preserva a ordem}}$: Sejam $v_1, v_2 \in A$, $v_1 R v_2$ e sejam $w_i = f(v_i)$, $i = 1, 2$. Sejam $g_i \colon A_{v_i} \to B_{w_i}$ isomorfismos entre $\langle A_{v_i}, R\rangle$ e $\langle B_{w_i}, S\rangle$.

Pelo Fato 2, $g_2 \restriction A_{v_1}$ é um isomorfismo entre $\langle A_{v_1}, R\rangle$ e $\langle \operatorname{pred}(B_{w_2}, g_2(v_1), S), S\rangle$. Logo $\langle B_{w_1}, S\rangle \simeq \langle \operatorname{pred}(B_{w_2}, g_2(v_1), S), S\rangle$ pois ambos são isomorfos a $\langle A_{v_1}, R\rangle$. Como em 1) $w_1 = g_2(v_1) \in B_{w_2}$ e portanto $g_2(v_1) S w_2$. Logo $w_1 S w_2$.

Logo f é um isomorfismo entre $\langle \operatorname{dom} f, R\rangle$ e $\langle \operatorname{im} f, S\rangle$. Suponhamos que $\langle \operatorname{dom} f, R\rangle \neq A$ i.e. $A \setminus \operatorname{dom} f \neq \emptyset$, logo existe $x = R\text{-min}(A \setminus \operatorname{dom} f)$.

Afirmação: $\operatorname{dom} f = \operatorname{pred}(A, x, R) \overset{\text{not.}}{=} A_x$.

$\underline{A_x \subseteq \operatorname{dom} f}$: Se $v \in A_x$ então $v \in A$ e vRx. Logo $v \in A$ e $v \notin A \setminus \operatorname{dom} f$ portanto $v \in \operatorname{dom} f$.

$\underline{\operatorname{dom} f \subseteq A_x}$: Seja $v \in \operatorname{dom} f$. Se $\neg(vRx)$ então xRv (é claro que $x \neq v$). Como $v \in \operatorname{dom} f$, $\langle A_v, R\rangle \overset{g}{\simeq} \left\langle B_{f(v)}, S\right\rangle$; e como já vimos $g \restriction \operatorname{pred}(A_v, x, R) = g \restriction A_x$ seria um isomorfismo entre $\langle A_x, R\rangle$ e $\left\langle B_{g(x)}, S\right\rangle$ e portanto $x \in \operatorname{dom} f$, o que é um absurdo. Logo, vRx e portanto $v \in A_x$.

Analogamente, ou $\operatorname{im} f = B$ ou $\operatorname{im} f = \operatorname{pred}(B, y, S) = B_y$, onde $y = S\text{-min}(B \setminus \operatorname{im} f)$.

Falta verificar que não pode ocorrer $\operatorname{dom} f \neq A$ e $\operatorname{im} f \neq B$. As outras três possibilidades correspondem a (i), (ii) e (iii) do teorema. Se acontecesse isso, então f seria um isomorfismo entre $\langle A_x, R\rangle$ e $\langle B_y, S\rangle$ e portanto $\langle x, y\rangle \in f$ e $x \in \operatorname{dom} f$ e $y \in \operatorname{im} f$, absurdo. ■

9.<u>Axioma da Escolha</u>: Diz que todo conjunto pode ser bem ordenado, i.e.,

$$\forall A \exists R (\langle A, R\rangle \text{ é uma boa ordem}).$$

10. Definição. *Um conjunto A se diz **transitivo** sse todo elemento de A é subconjunto de A i.e.*

$$\forall x (x \in A \to x \subseteq A) \text{ ou equivalentemente,}$$
$$(\forall x \in A)(\forall y \in x) y \in A.$$

i.e., todos os elementos de elementos de A também são elementos de A.

Observe que A é transitivo sse $\bigcup A \subseteq A$ ("$\leftrightarrow A \subseteq \mathcal{P}A$").

Exemplo São transitivos: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; enquanto que $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ não é transitivo pois $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\} \in A$, mas $\{\emptyset\} \notin A$. Se $x = \{x\}$ (i.e. $x \in x$) então x seria transitivo.

11. Definição. *Um conjunto A se diz um **ordinal** sse A é transitivo e bem ordenado por $\in$ (i.e., $\langle A, \in_A\rangle$ é uma boa ordem onde $\in_A = \{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in A \wedge x \in y\}$).*

$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ não é totalmente ordenado por $\in$ logo não é bem ordenado e não é ordinal. Também, $x = \{x\}$ não é ordinal (pois não vale a não-reflexividade $\neg(x \in x)$).

Notação Se x é um ordinal e $y \in x$ escrevemos $\mathrm{pred}(x, y)$ ao invés de $\mathrm{pred}(x, y, \in)$ e $\langle A, R\rangle \simeq x$ ao invés de $\langle A, R\rangle \simeq \langle x, \in_x\rangle$.

12. Teorema (7.3).

(i) *Se x é um ordinal e $y \in x$, então y é ordinal e* $\mathrm{pred}(x, y) = y$.

(ii) *Se x e y são ordinais e $x \simeq y$, então $x = y$.*

(iii) *Se x e y são ordinais, então vale uma e apenas uma entre: $x \in y$, $x = y$ e $y \in x$.*

(iv) *Se x, y, z são ordinais e $x \in y$ e $y \in z$ então $x \in z$.*

(v) *Se $C \neq \emptyset$ e todos o elementos de C são ordinais, então existe $b \in C$ tal que $(\forall x \in C)(b \in x \vee b = x)$, i.e., C tem um $\in$-mínimo.*

Demonstração (i). Para mostrar que y é transitivo seja $u \in v \in y$. De x transitivo $v \in x$ e portanto $u \in x$. De $u \in v$ e $v \in y$ temos $u \in y$ pois $\in$ é transitivo em x.

Como $\in_y$ é uma restrição de $\in_x$ ao conjunto $y \times y$ e $\in_x$ é uma boa ordem sobre x, segue que $\in_y$ é uma boa ordem sobre y. Logo y é ordinal.

$\mathrm{pred}(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \{z \in x \colon z \in y\} \subseteq \{z \colon z \in y\} = y$. Reciprocamente, se $z \in y$ então $z \in x$ (pois x é transitivo e $y \in x$ e $z \in y$) e portanto $z \in \mathrm{pred}(x, y)$ i.e. $y \subseteq \mathrm{pred}(x, y)$ portanto $y = \mathrm{pred}(x, y)$.

(ii). Sejam x, y ordinais e $x \simeq y$. Suponhamos $x \neq y$. Então ou $x \setminus y \neq \emptyset$ ou $y \setminus x \neq \emptyset$, s.p.g. $x \setminus y \neq \emptyset$. Seja $z = \in\text{-min}(x \setminus y)$. Se $v \in z$ temos que $v \in x$ e $v \notin (x \setminus y)$ e portanto $v \in y$ i.e. $z \subseteq y$. Se $z = y$, então $x \simeq z = \mathrm{pred}(x, z)$ contra o lema 6.1 e portanto $z \subseteq y$ e $z \neq y$. Logo existe $w = \in\text{-min}(y \setminus z)$.

Como antes $w \subseteq z$. Vamos verificar que também $z \subseteq w$: Seja $v \in z$, como $z \subseteq y$, $v \in y$, e v e w são elementos de y. Por tricotomia, $v \in w$ ou $v = w$ ou $w \in v$. Se $v = w$ ou $w \in v$ então $w \in z$, contra $w \in y \setminus z$. Logo $v \in w$ e portanto $z \subseteq w$. Portanto $z = w \in y$ contra $z \in x \setminus y$.

(iii). Pelo teorema 6.3 ou $x \simeq y$ ou $x \simeq \mathrm{pred}(y, w) = w$, $(w \in y)$, ou $\mathrm{pred}(x, v) \simeq y$ $(v \in x)$. No primeiro caso $x = y$. No segundo caso $x = w \in y$ portanto $x \in y$, e no terceiro caso $v = y$ portanto $y \in x$.

(v). Seja $y \in C$. Se $\neg(y = \in\text{-min}(C))$, então existe $x \in C$ tal que $x \in y$ (por (iii)) i.e. $y \cap C \neq \emptyset$. Seja $z = \in\text{-min}(y \cap C)$ $(0 \neq y \cap C \subseteq C)$. Seja $x \in C$, então $x \in z$ ou $x = z$ ou $z \in x$. Se $x \in z$ então $x \in y$ (pois $z \in y$) e portanto $x \in y \cap C$ contra a minimalidade de z em $y \in C$. ∎

13. Corolário. $\neg\exists A \forall x(x$ *é um ordinal* $\rightarrow x \in A)$.

Demonstração Se existisse tal A então existiria

$$\mathrm{OR} = \{x \colon x \text{ é ordinal}\} = \{x \in A \colon x \text{ é ordinal}\}$$

e por (i) OR é transitivo e por $(iii), (iv), (v)$ é bem ordenado por $\in$, logo OR seria um ordinal e portanto $\mathrm{OR} \in \mathrm{OR}$ contra a não-reflexividade das relações de ordem. ∎

Dia 4/4/97

14. Lema (7.5). *Se A é um conjunto de ordinais e A é transitivo, então A é um ordinal.*

Demonstração Como A é transitivo basta verificar que $\langle A, \in\rangle$ é uma boa ordem: os items $(iii), (iv), (v)$ mostram que $\langle A, \in\rangle$ satisfaz a tricotomia, é tansitiva e todo subconjunto não vazio C de A tem mínimo. ■

15. Teorema (7.6). *Seja $\langle A, R\rangle$ uma boa ordem. Então existe um único ordinal C tal que $\langle A, R\rangle \simeq C$.*

Demonstração A unicidade segue do teorema 7.3(ii). Para existência, seja

$$B = \{a \in A\colon \exists x(x \text{ é ordinal} \wedge \langle \operatorname{pred}(A, a, R), R\rangle \simeq x)\}.$$

Notação $A_a = \operatorname{pred}(A, a, R)$, para $a \in A$.

Pelo teorema 7.3(ii), para cada $a \in B$, existe na realidade um único ordinal x tal que $\langle A_a, R\rangle \simeq x$. Vamos denotar por $f(a)$ este único ordinal x.

Seja $C = \operatorname{im} f = \{f(a)\colon a \in B\}$. Vamos verificar que C é um ordinal, que f é isomorfismo entre $\langle B, R\rangle$ e C e que $B = A$.

Que C é um ordinal: Pelo lema 7.5 é suficiente verificar que C é transitivo. Sejam $x \in C$ e $y \in x$. De $x \in C$ segue que $x = f(a)$ para algum $a \in B$. Como $a \in B$ e $x = f(a)$ existe $g\colon A_a \to x$ isomorfismo entre $\langle A_a, R\rangle$ e x, portanto $g^{-1}\colon x \to A_a$ é isomorfismo entre x e $\langle A_a, R\rangle$, e pelo Fato 2

$$g^{-1} \restriction y = g^{-1} \restriction \operatorname{pred}(x, y)$$

é isomorfismo entre y e $\left\langle A_{g^{-1}(y)}, R\right\rangle$.

Seja $b = g^{-1}(y)$; temos então que $\langle A_b, R\rangle \simeq y$ portanto $b \in B$ e $y = f(b)$ i.e. $y \in \operatorname{im} f = C$ e C é transitivo.

O axioma de separação garante a existência do conjunto

$$B = \{a \in A\colon \varphi(a, A, R)\}, \text{ onde } \varphi(a, A, R)\colon \exists x(x \text{ é ordinal} \wedge \langle \operatorname{pred}(A, a, R), R\rangle \simeq x).$$

A existência de

$$f = \Big\{z \in B \times C\colon \underbrace{(\exists a \in B)\exists x(x \text{ é ordinal} \wedge \langle A_a, R\rangle \simeq x \wedge z = \langle a, x\rangle)}_{\psi(z,B,R)}\Big\}.$$

decorre do axioma de separação desde que tenhamos a existência de C. De

$$(\forall a \in B)\exists! x(\underbrace{x \text{ é ordinal} \wedge \langle A_a, R\rangle \simeq x}_{\varphi'(a,x,A,R)}).$$

temos, pelo axioma de substituição,

$$\exists X \forall a \in B \exists x \in X \varphi'(a, x, A, R)$$

e, por separação existe

$$C = \{x \in X \colon (\exists a \in B)\varphi'(a, x, A, R)\} = \{x \colon (\exists a \in B)\varphi'(a, x, A, R)\}\,.$$

Obviamente, f é sobrejetora; temos que verificar que preserva a ordem: Sejam $a_1, a_2 \in B$, $a_1 R a_2$, e sejam $g_i \colon A_{a_i} \to f(a_i)$ os isomorfismos entre $\langle A_{a_i}, R\rangle$ e $f(a_i)$. $a_1 \in A_2$ portanto $g_2 \restriction \text{pred}(A_{a_2}, a_1, R) = g_2 \restriction A_{a_1}$ é isomorfismo entre $\langle A_{a_1}, R\rangle$ e $g_2(a_1) = \text{pred}(f(a_2), g_2(a_1))$.

Pela unicidade de $f(a_1)$, $g_2(a_1) = f(a_1)$. Mas $g_2(a_1) \in f(a_2)$ e portanto $f(a_1) \in f(a_2)$. Logo f é um isomorfismo entre $\langle B, R\rangle$ e C.

Se $B \neq A$, seja $b = R\text{-min}(A \setminus B)$. Então, como no teorema 6.3, $B = \text{pred}(A, b, R)$ (verifique!) e portanto f é um isomorfismo entre $\langle A_b, R\rangle$ e C; e portanto afinal $b \in B$ contra $b \in A \setminus B$. ■

Notação Dada uma boa ordem $\langle A, R\rangle$, vamos designar por $\text{type}(A, R)$ ao único ordinal C tal que $\langle A, R\rangle \simeq C$. $\text{type}(A, R)$ se chama o **tipo de ordem** de $\langle A, R\rangle$; em alguns livros aparece com $\text{o.t.}(A, R)$ e em português as vezes se usa $\text{t.o.}(A, R)$.

Notação Vamos usar letras minúsculas gregas $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \zeta$, etc. para designar os ordinais. Assim, fórmulas do tipo $\exists\alpha \ldots$ significam $\exists\alpha(\alpha$ é um ordinal $\wedge \ldots)$ e também usaremos $<$ ao invés de $\in$ entre os ordinais, i.e.,

$$\forall\alpha\forall\beta(\alpha < \beta \overset{\text{def.}}{\leftrightarrow} \alpha \in \beta).$$

e também serão usadas notações como:

- $\alpha \leq \beta \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$ ou $\alpha = \beta$.
- $\alpha > \beta \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \beta < \alpha$.
- $\alpha \geq \beta \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \alpha > \beta$ ou $\alpha = \beta \Leftrightarrow \beta \in \alpha$ ou $\alpha = \beta$.

16. Lema (7.9).

(i) $\forall\alpha, \beta(\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta)$.

(ii) Se X *é um conjunto de ordinais então* $\bigcup X$ *é o supremo de* X *e, para* $X \neq 0$, $\bigcap X$ *é o mínimo de* X.

Demonstração (i). $(\rightarrow)$: Seja $\alpha \leq \beta$ i.e. $\alpha \in \beta$ ou $\alpha = \beta$. Como β é transitivo e $\alpha \in \beta$ segue que $\alpha \subseteq \beta$. Logo em qualquer caso $\alpha \subseteq \beta$.

$(\leftarrow)$: Sejam α, β ordinais tais que $\alpha \subseteq \beta$. Para provar que $\alpha \leq \beta$ (i.e. $\alpha \in \beta$ ou $\alpha = \beta$) é suficiente, por 7.3(iii), verificar que $\beta \notin \alpha$.

Se $\beta \in \alpha$ então $\beta \subseteq \alpha$, que junto com a hipótese implica $\alpha = \beta$ e portanto $\alpha \in \alpha$, absurdo.

(ii). $\bigcup X$ é um conjunto de ordinais (pois $x \in \bigcup X \Rightarrow \exists\alpha \in X$ tal que $x \in \alpha$ e portanto por 7.3(i) x é um ordinal) e pelo exercício 2(iii) da lista 2, $\bigcup X$ é transitivo. Logo $\bigcup X$ é um ordinal, digamos $\bigcup X = \sigma$.

Seja $\alpha \in X$, então $\alpha \subseteq \bigcup X = \sigma$ portanto por (i) $\alpha \leq \sigma$. Seja β um majorante de X – i.e. $(\forall \alpha \in X)\alpha \leq \beta$ – novamente por (i) $(\forall \alpha \in X)\alpha \subseteq \beta$ portanto $\bigcup\{\alpha\colon \alpha \in X\} \subseteq \beta$ i.e. $\sigma = \bigcup X \subseteq \beta$ e mais uma vez por (i) $\sigma \leq \beta$ i.e. σ é o menor dos majorantes, i.e. $\sigma = \sup(X)$, i.e.

$$\sup(X) = \bigcup X.$$

Seja $0 \neq X$ um conjunto de ordinais. Por 7.3(v) existe $\mu = \min(X)$ i.e. $(\forall \alpha \in X)\mu \leq \alpha$ portanto, por (i), $(\forall \alpha \in X)\mu \subseteq \alpha$ e portanto $\mu \subseteq \bigcap\{\alpha\colon \alpha \in X\} = \bigcap X$. Mas $\mu \in X$, logo $\bigcap X \subseteq \mu$. De $\mu \subseteq \bigcap X$ e $\bigcap X \subseteq \mu$ segue $\bigcap X = \mu = \min(X)$. ■

Seja α um ordinal e seja α^+ o "sucessor imediato" de α nos ordinais (veja exercício 1(ii) lista 2) i.e. $\alpha \in \alpha^+$ e $\neg\exists\beta(\alpha \in \beta$ e $\beta \in \alpha^+)$. Quem seria α^+? $\alpha \in \alpha^+$ portanto $\alpha \subseteq \alpha^+$. $\alpha, \{\alpha\} \subseteq \alpha^+$ portanto $\beta = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \alpha^+$. Então $\alpha < \alpha \cup \{\alpha\} \leq \alpha^+$ i.e. $\alpha \in \beta \leq \alpha^+$. Não poderia ser $\beta < \alpha^+$ pois $\alpha \in \beta \in \alpha^+$ não vale. Portanto $\alpha \in \beta = \alpha^+$.

17. Definição. $S(x) = x \cup \{x\}$.

Fato[1] Para todo α, $S(\alpha)$ é um ordinal e $S(\alpha)$ é o sucessor imediato de α nos ordinais, i.e.

$$\alpha < S(\alpha), \text{ e } \forall\beta(\beta < S(\alpha) \leftrightarrow \beta < \alpha \text{ ou } \beta = \alpha).$$

18. Definição. *Um ordinal α se diz um **ordinal sucessor** se $\alpha = S(\beta)$ para algum β; e se diz um **ordinal limite** se $\alpha \neq 0$ e α não é ordinal sucessor.*

19. Definição. $0 =$*vazio*, $1 = S(0)$, $2 = S(1)$, ...

- $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{0, \{0\}\}$
- $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$.

20. Definição. *Um ordinal α se diz um **número natural** se*

$$\forall\beta \leq \alpha(\beta = 0 \vee \beta \text{ é um ordinal sucessor}).$$

Dia 9/4/97

Se α é um ordinal sucessor, i.e. $\alpha = S(\beta)$ para algum β, então dizemos que β é **antecessor** de α.

Exercício

a) Se α é um ordinal successor, então $\sup(\alpha) = \bigcup \alpha = \beta$, onde β é o antecessor de α.

b) Se α é um ordinal limite (ou 0), então $\sup(\alpha) = \bigcup \alpha = \alpha$.

[1] exercício 3(i) lista 2.

c) Toda boa ordem é completa i.e. se $\langle A, R\rangle$ é boa ordem e todo $B \subseteq A$, $B \neq 0$ é limitado superiormente, então B tem sup.

d) Seja $f\colon \lambda \to \mu$. Se f for **não-decrescente** i.e.

$$(\forall \alpha, \beta \in \lambda)\,(\alpha \leq \beta \to f(\alpha) \leq f(\beta))$$

e **contínua** i.e. $\forall \alpha \in \lambda$, α limite, $f(\alpha) = \sup\{f(\xi)\colon \xi < \alpha\}$, então para todo $X \subseteq \lambda$ tal que $\sup X < \lambda$,

$$f(\sup X) = \sup\{f(\xi)\colon \xi \in X\} = \sup(f[X]).$$

e) Ache o número natural 3 da estrutura $\langle \mathbb{N}, E\rangle$ do exercício 8 da lista 1.

Propriedades dos números naturais.

- 0 é natural.
- Se n é natural então $S(n)$ é natural.
- Se n é natural e $\alpha < n$ então α é natural.
- Se existe algum ordinal α maior que todos os naturais, então existe o menor entre estes ordinais digamos ω, e ω é ordinal limite, é o menor ordinal limite e

$$\forall \alpha\,(\alpha \in \omega \leftrightarrow \alpha \text{ é número natural})$$

i.e. ω é o conjuntos de todos os naturais.

- As mesmas conclusões valem se assumimos que existe pelo menos um ordinal limite, e também o mesmo vale se assumimos que existe algum conjunto "**indutivo**" A i.e. A tal que

(i) $0 \in A$.

(ii) $(\forall x \in A) S(x) \in A$.

pois, é fácil de ver que se A é indutivo, então

$$\forall n\,(n \text{ é número natural} \to n \in A)\,.$$

De fato: Se existisse n natural tal que $n \notin A$, existiria $m = \min(S(n) \setminus A)$ ($\neq 0$ pois $n \in S(n) \setminus A$). Como $m \notin A$, $m \neq 0$, e portanto $m = S(k)$ para algum k natural, $k < m$, portanto $k \in A$ e por (ii) $m = S(k) \in A$.

7.<u>Axioma do Infinito</u>: Diz que existe algum conjunto indutivo, i.e.

$$\exists A\,(0 \in A \wedge (\forall x \in A)\, S(x) \in A)\,.$$

21. Definição. *Seja*

$$\omega = \{x \in A\colon x \text{ \textit{é número natural}}\} = \{x\colon x \text{ \textit{é natural}}\}\,.$$

ω é um ordinal limite e é o primeiro ordinal limite.

ω com o 0 e a função $\sigma\colon \omega \to \omega$, $\sigma = \{\langle n, S(n)\rangle : n \in \omega\}$, satisfaz os **Postulados de Peano**:

- $0 \in \omega$.
- $(\forall n \in \omega) S(n) \in \omega$.
- $(\forall m, n \in \omega)(m \neq n \to S(m) \neq S(n))$. [segue de 2($v$) da lista 2]
- Princípio da Indução Finita (P.I.F.):

$$(\forall X \subseteq \omega)\,[(0 \in X \wedge (\forall n \in X)\, S(n) \in X) \to X = \omega]\,.$$

Demonstração do PIF: Se $X \neq \omega$, seja $m = \min(\omega \setminus X)$. $m \neq 0$ (pois $0 \in X$) portanto $m = S(n)$ para algum n. Como $n < m$, $n \in X$ e portanto $m = S(n) \in X$. ■

Aritmética Ordinal

Sejam α e β dois ordinais, e seja R a seguinte relação sobre o conjunto

$$A = (\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})\,,$$

$R = \{\langle\langle\xi, 0\rangle, \langle\eta, 0\rangle\rangle : \xi < \eta < \alpha\} \cup \{\langle\langle\xi, 1\rangle, \langle\eta, 1\rangle\rangle : \xi < \eta < \beta\} \cup \{\langle\langle\xi, 0\rangle, \langle\eta, 1\rangle\rangle : \xi < \alpha,\ \eta < \beta\}\,.$

$\langle A, R\rangle$ é uma boa ordem e por isso existe o $\operatorname{type}(A, R)$ que é o único ordinal δ isomorfo a $\langle A, R\rangle$. **Definimos** $\alpha + \beta = \operatorname{type}(A, R)$.

Notação Fixado α, para cada β sejam

$$A_\beta = \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$$

e R_β anteriormente definida e

$$f_\beta\colon A_\beta \to \alpha + \beta$$

o único isomorfismo entre $\langle A_\beta, R_\beta\rangle$ e $\alpha + \beta$.

Então para cada $\xi < \beta$

- $\operatorname{pred}(A_\beta, \langle\xi, 1\rangle, R_\beta) = A_\xi$.
- $R_\xi = R_\beta \cap (A_\xi \times A_\xi)$ i.e. "$R_\xi = R_\beta \restriction A_\xi$".

$f_\beta \restriction A_\xi = f_\beta \restriction \operatorname{pred}(A_\beta, \langle\xi, 1\rangle, R_\beta)$ é isomorfismo entre $\langle A_\xi, R_\xi\rangle$ e $f_\beta(\langle\xi, 1\rangle)$ portanto $f_\beta(\langle\xi, 1\rangle) = \alpha + \xi$ (pois $\langle A_\xi, R_\xi\rangle \simeq \alpha + \xi$) e $f_\xi = f_\beta \restriction A_\xi$ e como $f_\beta(\langle\xi, 1\rangle) \in \alpha + \beta$, segue que $\alpha + \xi < \alpha + \beta$.

Exercício Veja os exercícios 2 e 3 do primeiro capítulo do Kunen.

22. Lema (7.8).

(i) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

(ii) $\alpha + 0 = \alpha$.

(iii) $\alpha + 1 = S(\alpha)$.

(iv) $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$.

(v) Se β *é um ordinal limite, então* $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi \colon \xi < \beta\}$.

Demonstração (i).

$\alpha + (\beta + \gamma) \simeq \langle (\alpha \times \{0\}) \cup ((\beta + \gamma) \times \{1\}), R\rangle \simeq$
$\langle \alpha \times \{0\} \cup ((\beta \times \{1\}) \cup (\gamma \times \{2\})), R'\rangle \simeq \langle (\alpha \times \{0\} \cup (\beta \times \{1\})) \cup (\gamma \times \{2\}), R'\rangle \simeq$
$\langle (\alpha + \beta) \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\}, R\rangle \simeq (\alpha + \beta) + \gamma$.

(iv).

$\alpha + S(\beta) \simeq \langle \alpha \times \{0\} \cup S(\beta) \times \{1\}, R\rangle =$
$\langle \alpha \times \{0\} \cup (\beta \times \{1\} \cup \{\beta\} \times \{1\}), R\rangle = \langle (\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}) \cup \{\langle \beta, 1\rangle\}, R\rangle \simeq$
$\langle (\alpha + \beta) \times \{0\} \cup \{\langle 0, 1\rangle\}, R'\rangle$ (R' DIZ QUE $\langle 0, 1\rangle$ É MAIOR QUE TODO O RESTO.)
$\simeq S(\alpha + \beta)$.

(v).

$$\begin{aligned}&\alpha + \beta = f_\beta[A_\beta] \overset{?}{=} f_\beta\left[\bigcup\{A_\xi \colon \xi < \beta\}\right] = \\ &\bigcup\{f_\beta[A_\xi] \colon \xi < \beta\} = \bigcup\{f_\xi[A_\xi] \colon \xi < \beta\} = \\ &\bigcup\{\alpha + \xi \colon \xi < \beta\}.\end{aligned}$$

Se β é um ordinal limite então

$$A_\beta = \bigcup\{A_\xi \colon \xi < \beta\}.$$

Lembrando que $A_\beta = \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$, faltaria verificar que um elemento do tipo $\langle \eta, 1\rangle \in A_\beta$ também está em $\bigcup\{A_\xi \colon \xi < \beta\}$.

$\langle \eta, 1\rangle \in A_\beta \Rightarrow \eta < \beta$, e como β é ordinal limite, $S(\eta) < \beta$ (pois certamente $S(\eta) \leq \beta$ e $S(\eta) \neq \beta$, senão β seria ordinal sucessor).

Logo $\eta \in S(\eta) = \xi < \beta$ e portanto $\langle \eta, 1\rangle \in \xi \times \{1\} \subseteq A_\xi$ e portanto $\langle \eta, 1\rangle \in \bigcup\{A_\xi \colon \xi < \beta\}$. ■

Exercício Observe que as propriedades (ii), (iv) e (v) caracterizam a adição, i.e. fixado α, se f for uma função tal que

(i) $f(0) = \alpha$,

(ii) $f(S(\beta)) = S(f(\beta))$,

(iii) para β limite $f(\beta) = \sup\{f(\xi)\colon \xi < \beta\}$,

então $\forall\beta f(\beta) = \alpha + \beta$.

A adição não é comutativa $(1 + \omega \neq \omega + 1)$, preserva a ordem "pela direita" i.e. $\forall\alpha, \beta, \gamma(\beta < \gamma \rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma)$ mas não a preserva "estritamente pela esquerda" i.e. $\forall\alpha, \beta, \gamma(\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma)$, mas não se pode garantir que se $\alpha < \beta$ então $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$. Contra-exemplo: $0 < 1$ mas $0 + \omega = 1 + \omega$!!

Multiplicação

$\underline{\alpha \cdot \beta}$: Sejam $M = \beta \times \alpha$ e L a relação **lexicográfica** sobre M i.e.

$$\langle \xi, \eta\rangle \, L \, \langle \xi', \eta'\rangle \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\xi < \xi' \vee (\xi = \xi' \wedge \eta < \eta'))\,.$$

$\langle M, L\rangle$ é uma boa ordem; **definimos** $\alpha \cdot \beta = \text{type}(M, L)$.

Exemplo $2 \cdot \omega = \omega$ e $\omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq \omega$.

Exercício

$$\alpha + \sup X \overset{?}{=} \sup\{\alpha + \xi\colon \xi \in X\}\,.$$

$$\sup X + \alpha \overset{?}{=} \sup\{\xi + \alpha\colon \xi \in X\}\,.$$

Dia 11/4/97

Exercício Seja $\langle A, R\rangle$ uma boa ordem e sejam $x \in A$ e $B \subseteq A$. Mostre que:

(i) $\text{type}(\text{pred}(A, x, R), R) < \text{type}(A, R)$.

(ii) $\beta = \text{type}(B, R) \leq \text{type}(A, R) = \alpha$.

Mostre com algum exemplo que é possível $B \subsetneqq A$ e $\beta = \alpha$.

Exercício Com A, x, R como antes, moste que não existe $f\colon A \rightarrow \text{pred}(A, x, R)$ tal que f preserva a ordem entre as estruturas $\langle A, R\rangle$ e $\langle \text{pred}(A, x, R), R\rangle$. Sug.: exercício $1(i)$ da lista 2.

Vimos $\alpha + \beta = \text{type}(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\})$. Para todo α, β, γ:

(i) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

(ii) $\alpha + 0 = \alpha$.

(iii) $\alpha + 1 = S(\alpha)$.

(iv) $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$.

(v) Se β é um ordinal limite, então $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi\colon \xi < \beta\}$.

e as propriedades (ii), (iv) e (v) caracterizam a adição. Vimos também

$\forall \alpha, \beta, \gamma(\beta < \gamma \rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma)$.

$\forall \alpha, \beta, \gamma(\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma)$; é possível[2] $\alpha < \beta$ e $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

$\alpha \leq \beta \rightarrow \exists! \delta$ tal que $\alpha + \delta = \beta$; nem sempre é possível achar δ tal que $\delta + \alpha = \beta$ (com $\alpha \leq \beta$).[3]

$\alpha + \sup X \stackrel{?}{=} \sup \{\alpha + \xi \colon \xi \in X\}$.

$\sup X + \alpha \stackrel{?}{=} \sup \{\xi + \alpha \colon \xi \in X\}$.

Produto de ordinais

$$\alpha \cdot \beta \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{type}(\beta \times \alpha, L) \text{ e } g_\beta \colon \beta \times \alpha \rightarrow \alpha \cdot \beta \text{ o isomorfismo.}$$

Se $\xi < \beta$, então $\xi \times \alpha = \operatorname{pred}(\beta \times \alpha, \langle \xi, 0 \rangle, L)$ e $g_\xi = g_\beta \restriction \xi \times \alpha$, portanto $\alpha \cdot \xi < \alpha \cdot \beta$.

No caso β limite, observe que

$$\beta \times \alpha = \bigcup \{\xi \times \alpha \colon \xi < \beta\}.$$

Propriedades do produto. Para todo α, β, γ:

(i) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

(ii) $\alpha \cdot 0 = 0$.

(iii) $\alpha \cdot 1 = 1$.

(iv) $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$.

(v) β limite $\Rightarrow \alpha \cdot \beta = \sup \{\alpha \cdot \xi \colon \xi < \beta\}$.

(vi) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Demonstração (i).

$$\begin{aligned} &\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \simeq \langle (\beta \cdot \gamma) \times \alpha, L \rangle \simeq \\ &\langle (\gamma \times \beta) \times \alpha, L' \rangle \simeq \langle \gamma \times (\beta \times \alpha), L'' \rangle \simeq \\ &\langle \gamma \times (\alpha \cdot \beta), L \rangle \simeq (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma. \end{aligned}$$

[2] $0 < 1$ e $0 + \omega = 1 + \omega$.

[3] $\omega < \omega + 1$, $\delta + \omega \neq \omega + 1$.

(iv).

$$\begin{aligned}&\alpha\cdot S(\beta)\simeq\langle(\beta\cup\{\beta\})\times\alpha,L\rangle=\langle(\beta\times\alpha)\cup((\{\beta\}\times\alpha)),L\rangle\simeq\\&\langle((\alpha\cdot\beta)\times\{0\})\cup(\alpha\times\{1\}),R\rangle\simeq\alpha\cdot\beta+\alpha.\end{aligned}$$

(v).

$$\begin{aligned}\alpha\cdot\beta=&g_\beta[\beta\times\alpha]=g_\beta\left[\bigcup\{\xi\times\alpha\colon\xi<\beta\}\right]=\\=&\bigcup\{g_\beta[\xi\times\alpha]\colon\xi<\beta\}=\bigcup\{g_\xi[\xi\times\alpha]\colon\xi<\beta\}=\\=&\bigcup\{\alpha\cdot\xi\colon\xi<\beta\}=\sup\{\alpha\cdot\xi\colon\xi<\beta\}.\end{aligned}$$

Em particular para $f(\beta)=\alpha\cdot\beta$ (para $\alpha\neq0$ fixado) preserva a ordem e é contínua; deve valer então: $\alpha\cdot\sup X=\sup\{\alpha\cdot\xi\colon\xi\in X\}$. É possível que $(\sup X)\cdot\alpha\neq\sup\{\xi\cdot\alpha\colon\xi\in X\}$, tome, por exemplo, $X=\omega$ e $\alpha=\omega$.

(vi). Usando (ii), (iv) e (v): Dados α,β suponhamos que existe γ tal que $\alpha\cdot(\beta+\gamma)\neq\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$. Seja γ_0 o mínimo desses γ.

- $\gamma_0\neq0$, pois $\alpha\cdot(\beta+0)=\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\beta+0=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot0$.
- γ_0 não pode ser $S(\delta)$, pois se $\gamma_0=S(\delta)$, então $\delta<\gamma_0$, donde $\alpha\cdot(\beta+\delta)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta$ e portanto $\alpha\cdot(\beta+\gamma_0)=\alpha\cdot(\beta+S(\delta))=\alpha\cdot S(\beta+\delta)=(\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta)+\alpha=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot S(\delta)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma_0$.
- γ_0 não pode ser limite, pois para γ_0 limite $\alpha\cdot(\beta+\gamma_0)=\alpha\cdot\sup\{\beta+\xi\colon\xi<\gamma_0\}=\sup\{\alpha\cdot(\beta+\xi)\colon\xi<\gamma_0\}=\sup\{\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\xi\colon\xi<\gamma_0\}=\alpha\cdot\beta+\sup\{\alpha\cdot\xi\colon\xi<\gamma_0\}=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma_0$. ■

Exercício Para $\alpha\neq0$, $\beta<\gamma\to\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma$ e $\beta\cdot\alpha\leq\gamma\cdot\alpha$.[4]

Algoritmo de Euclides: $0\neq\alpha\leq\beta\to\exists!\delta,\rho$ tais que $\beta=\alpha\cdot\delta+\rho$ e $\rho<\alpha$.

Dado um conjunto A, para cada $n\in\omega$ existe o conjunto de todas as funções de n em A, que será denotado por ${}^nA$ ou A^n; e existe o conjunto de todas as funções definidas em algum $n\in\omega$ com valores em A; que seria denotado por ${}^{<\omega}A$ ou $A^{<\omega}=\bigcup\{{}^nA\colon n\in\omega\}$: é o conjunto de todas as sequências finitas de A.

As vezes escrevemos $\langle x_i\colon i\in X\rangle$ para designar a função f de domínio I tal que $f(i)=x$.

$$\langle x_i\colon i\in I\rangle=f=\{\langle i,x\rangle : i\in I\}.$$

Para $\operatorname{dom} f=n$, dizemos que f é uma **sequência finita de comprimento** n.

- $\operatorname{dom} f=\omega$: f é uma sequência.
- $\operatorname{dom} f=\alpha$: f é uma sequência de comprimento α.

[4] $1<2$ mas $1\cdot\omega=2\cdot\omega$.

Se s e t são sequências de comprimento α e β, respectivamente, define-se a **concatenação** de s e t como sendo a sequencia $s^\frown t$ de comprimento $\alpha+\beta$, tal que

$$\begin{array}{l} s^\frown t \restriction \alpha = s \\ \forall \xi < \beta \; s^\frown t(\alpha+\xi) = t(\xi). \end{array}$$

Ponha $X = \{n \in \omega \colon \exists Y \forall s (s \in Y \leftrightarrow \varphi(s,n,A))\}$, onde $\varphi(s,n,A)\colon$ s é uma função de n em A.

- $0 \in X$, $Y = \{0\}$ serve (0 é a única função de 0 em A).
- Suponha que $n \in X$, seja Y_n tal que $\forall s(s \in Y_n \leftrightarrow \varphi(s,n,A))$ e seja $Z = Y_n \times A$, então é verdade que $\forall z \in Z \exists! s (z = \langle y, a\rangle \wedge s = y^\frown \langle a \rangle)$.

  Seja $\psi(z,s,Y_n,A)\colon (\exists y \in Y_n)(\exists a \in A)(z = \langle y,a\rangle \wedge s = y^\frown\langle a\rangle)$. Pelo axioma de substituição $\exists Y \forall z \in Z \exists s \in Y\; \psi(z,s,Y_n,A)$. Definimos

  $$Y_{n+1} = \{s \in Y : \psi(z,s,Y_n,A)\} = \{s \colon \psi(z,s,Y_n,A)\}$$

  e Y_{n+1} (que seria o conjunto de todas as funções de $n+1$ em A) satisfaz a fórmula

  $$\forall s(s \in Y_{n+1} \leftrightarrow \varphi(s, n+1, A)),$$

  portanto, pelo P.I.F., $X = \omega$.

Por extensionalidade $(\forall n \in \omega)(\exists! Y)$ tal que $\varphi(s,n,A)$ e denotamos este único Y por ${}^nA$ ou A^n.

$$\begin{array}{l} (\forall n \in \omega)(\exists! z)\,(z = {}^nA) \\ (\exists Y)(\forall n \in \omega)(\exists z \in Y)\,(z = {}^nA) \\ T = \{z \in Y \colon (\exists n \in \omega) z = {}^nA\} = \{{}^nA \colon n \in \omega\} \\ \text{e } {}^{<\omega}A = \bigcup T = \bigcup \{{}^nA \colon n \in \omega\}. \end{array}$$

Classes

Exemplo $\mathbf{V} = \{x \colon x = x\}$, $\mathbf{ON} = \{x \colon x \text{ é ordinal}\}$.

$$y \in \{x \colon \varphi(x)\} \text{ equivale a } \varphi(y).$$

Notação em negrito indicaria classes.

23. Teorema. *Se $0 \neq \boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{ON}$, então $\boldsymbol{C}$ tem mínimo.*

Demonstração Como $\mathbf{C} \neq 0$, seja $\alpha \in \mathbf{C}$. Se α não é mínimo de $\mathbf{C}$ toma-se o mínimo de $\alpha \cap \mathbf{C}$ (que é conjunto por separação) e este será o mínimo de $\mathbf{C}$. ■

Na realidade teríamos alguma fórmula $\psi(x, z_1, \ldots, z_n)$ ($z_1, \ldots, z_n$ parâmetros) e estamos considerando $\mathbf{C} = \{x \colon \psi(x, \vec{z})\}$ e o enunciado do teorema acima seria $\forall z_1 \ldots \forall z_n$

$$\exists x \psi(x,\vec{z}) \wedge \forall x\,(\psi(x,\vec{z}) \to x \text{ é um ordinal}) \to \exists x \psi(x,\vec{z}) \wedge \forall y\,(\psi(x,\vec{z}) \to x \leq y).$$

Dia 18/4/97

Demonstrações por indução sobre boas ordens

Seja $\langle A, R\rangle$ uma boa ordem. Então

$$(\forall B \subseteq A)[(\forall x \in A)(\text{pred}(A,x,R) \subseteq B \to x \in B) \to B = A].$$

Demonstração Se não, seja $z = R - \min(A \setminus B)$. Então $(\forall y \in A)(yRz \to y \in B)$, i.e. $\text{pred}(A,z,R) \subseteq B$, e, portanto, $z \in B$, uma contradição! ■

Por exemplo, no exercício 1 da lista 2, seja $f\colon A \longrightarrow A$ crescente. Definamos $B = \{x \in A\colon xRf(x) \vee x = f(x)\}$. Suponha $\text{pred}(A,x,R) \subseteq B$, para algum $x \in A$. Se tivéssemos $f(x)Rx$, então teríamos $f(f(x))Rf(x)$, pois f preserva a ordem. Mas $f(x) \in \text{pred}(A,x,R)$, e, daí, $f(x) \in B$. Sendo assim $f(x)Rf(f(x))$ ou $f(x) = f(f(x))$, e chegamos a um absurdo. Logo $xRf(x)$ ou $x = f(x)$, e $x \in B$.

No caso de um ordinal λ, teríamos:

$$(\forall C \subseteq \lambda)[(\forall \alpha < \lambda)(\alpha \subseteq C \to \alpha \in C) \to C = \lambda].$$

Como temos boa-ordem na classe dos ordinais, também vale:

$$(\forall \mathbf{C} \subseteq \mathbf{ON})[\forall \alpha(\alpha \subseteq \mathbf{C} \to \alpha \in \mathbf{C}) \to \mathbf{C} = \mathbf{ON}],$$

onde $\mathbf{C}$ seria a classe $\{\alpha \in \mathbf{ON}\colon \psi(\alpha)\}$. Rescrevendo em termos de ψ, temos:

$$\forall x(\psi(x) \to x \in \mathbf{ON}) \to [\forall \alpha((\forall \beta < \alpha)\psi(\beta) \to \psi(\alpha)) \to \forall \alpha \psi(\alpha)].$$

É comum nas demonstrações por "indução transfinita sobre os ordinais", fazer as seguintes três verificações:

1. $0 \in \mathbf{C}$,
2. se $\alpha \in \mathbf{C}$, então $S(\alpha) \in \mathbf{C}$, e,
3. se α é limite e $(\forall \beta < \alpha)\beta \in \mathbf{C}$, então $\alpha \in \mathbf{C}$.

Disto também resulta que $\mathbf{C} = \mathbf{ON}$.

Em termos de ψ, corresponde a verificar:

1. $\psi(0)$,
2. se $\psi(\alpha)$, então $\psi(S(\alpha))$, e,
3. se α é limite e $(\forall \beta < \alpha)\psi(\beta)$, então $\psi(\alpha)$.

Disto tembém resulta que $\forall\alpha\psi(\alpha)$.

Exemplo Fixado α se $\mathbf{G}$ satisfaz:

1. $\mathbf{G}(0) = \alpha$,
2. $\mathbf{G}(S(\alpha)) = S(\mathbf{G}(\alpha))$, e,
3. para β limite, $\mathbf{G}(\beta) = \sup\{\mathbf{G}(\xi)\colon \xi < \beta\}$,

então $\forall\beta\mathbf{G}(\beta) = \alpha + \beta$.

É só verificar que $\psi(\beta) : \mathbf{G}(\beta) = \alpha + \beta$ satisfaz as três condições acima:

1. $\psi(0)$ vale, pois $\mathbf{G}(0) = \alpha = \alpha + 0$,
2. Suponha que $\psi(\beta)$, i.e. $\mathbf{G}(\beta) = \alpha + \beta$. Daí
$$\mathbf{G}(S(\beta)) = S(\mathbf{G}(\beta)) = S(\alpha + \beta) = \alpha + S(\beta),$$
logo $\psi(S(\beta))$,
3. Seja β limite e suponhamos que $(\forall\xi < \beta)\psi(\xi)$, i.e. $(\forall\xi < \beta)\mathbf{G}(\xi) = \alpha + \xi$. Então $\mathbf{G}(\beta) = \sup\{\mathbf{G}(\xi)\colon \xi < \beta\} = \sup\{\alpha + \xi : \xi < \beta\} = \alpha + \beta$, e $\psi(\beta)$ vale. ■

Recursão Transfinita sobre os ordinais

24. Teorema. *Se* $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{V}$ *(i.e.* $\boldsymbol{F} = \{\langle x, y\rangle : \varphi(x, y)\}$, *onde* $\forall x\exists! y\varphi(x, y)$*), então existe uma única* $\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{ON} \longrightarrow \boldsymbol{V}$ *tal que*
$$\forall\alpha[\boldsymbol{G}(\alpha) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G} \restriction \alpha)].$$

Ou seja,
$$\mathbf{G}(0) = \mathbf{F}(0)$$
$$\mathbf{G}(1) = \mathbf{F}\,(\mathbf{G} \restriction 1) = \mathbf{F}(\{\langle 0, \mathbf{G}(0)\rangle\})$$
$$\mathbf{G}(2) = \mathbf{F}\,(\mathbf{G} \restriction 2) = \mathbf{F}(\{\langle 0, \mathbf{G}(0)\rangle, \langle 1, \mathbf{G}(1)\rangle\})$$
$$\vdots$$

Formalmente: dada uma $\varphi(x, y)$ tal que $\forall x\exists! y\varphi(x, y)$, existe uma $\psi(v, w)$ tal que
$$\forall\alpha\exists! w\psi(\alpha, w) \wedge \forall\alpha\exists x\exists y(`x = \psi \restriction \alpha' \wedge \psi(\alpha, y) \wedge \varphi(x, y)),$$
onde '$x = \psi \restriction \alpha$' seria a fórmula:
$$x \text{ é função } \wedge \operatorname{dom} x = \alpha \wedge (\forall\beta)\psi(\beta, x(\beta)).$$

A unicidade seria "dita" através de: se $\psi'(v, w)$ é uma fórmula satisfazendo as condições acima, então
$$\forall\alpha\forall y(\psi(\alpha, y) \leftrightarrow \psi'(\alpha, y)).$$

Demonstração Seja δ (um ordinal), dizemos que g é uma δ-aproximação (de $\mathbf{G}$) se:

$$g \text{ é uma função} \wedge \operatorname{dom} g = \delta \wedge (\forall \alpha < \delta) g(\alpha) = \mathbf{F}(g \upharpoonright \alpha).$$

Observe que 'g é uma δ-aproximação' é uma fórmula $\pi(g, \delta)$.

1. Vamos provar que se g é uma δ-aproximação e g' é uma δ'-aproximação, então $g \upharpoonright \delta \cap \delta' = g' \upharpoonright \delta \cap \delta'$; por indução sobre $\alpha < \delta \cap \delta'$, vamos verificar que $g(\alpha) = g'(\alpha)$. Vê-se que

$$g(0) = \mathbf{F}(g \upharpoonright 0) = \mathbf{F}(0) = \mathbf{F}(g' \upharpoonright 0) = g'(0).$$

Suponhamos que $\alpha < \delta \cap \delta'$ e que $(\forall \beta < \alpha) g(\beta) = g'(\beta)$; vamos verificar que $g(\alpha) = g'(\alpha)$. De fato,

$$g(\alpha) = \mathbf{F}(g \upharpoonright \alpha) = \mathbf{F}(g' \upharpoonright \alpha) = g'(\alpha).$$

2. Vamos provar, também por indução transfinita sobre δ, que para todo δ existe uma δ-aproximação.

1. para $\delta = 0$, seja $g = 0$,

2. seja $\delta = \gamma + 1$ e suponha que g é uma γ-aproximação. Seja $h = g \cup \{\langle \gamma, \mathbf{F}(g) \rangle\}$. Por construção h é uma função de domínio $\operatorname{dom} g \cup \{\gamma\} = \gamma \cup \{\gamma\} = \gamma + 1 = \delta$. Ainda, se $\alpha < \gamma$,

   $$h(\alpha) = g(\alpha) = \mathbf{F}(g \upharpoonright \alpha) = \mathbf{F}(h \upharpoonright \alpha),$$

   se $\alpha < \delta$, $\alpha = \gamma$

   $$h(\gamma) = \mathbf{F}(g) = \mathbf{F}(h \upharpoonright \gamma).$$

   Portanto h é uma δ-aproximação.

3. Seja δ um ordinal limite e suponha que exista uma γ-aproximação, para todo $\gamma < \delta$. Pelo item **1**, temos que, para cada $\gamma < \delta$, existe uma única γ-aproximação g_γ. Seja

   $$g = \bigcup \{g_\gamma \colon \gamma < \delta\}.$$

   Vimos pelo item **1**, que a família de funções $\{g_\gamma \colon \gamma < \delta\}$ é uma família de **funções compatíveis**. ($\mathcal{F}$ é uma família de funções compatíveis se $(\forall f, f' \in \mathcal{F}) f \upharpoonright (\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} f') = f' \upharpoonright (\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} f')$.) Logo g é uma função. Ainda,

   $$\operatorname{dom} g = \bigcup \{\operatorname{dom} g_\gamma \colon \gamma < \delta\} = \bigcup \{\gamma \colon \gamma < \delta\} = \delta.$$

   Se $\alpha < \delta$, $\gamma = \alpha + 1 < \delta$ e $g_\gamma(\alpha) = \mathbf{F}(g_\gamma \upharpoonright \alpha)$. Como $g(\alpha) = g_\gamma(\alpha)$ e $g \upharpoonright \alpha = g_\gamma \upharpoonright \alpha$,

   $$g(\alpha) = \mathbf{F}(g \upharpoonright \alpha).$$

   Portanto g é uma δ-aproximação.

Provamos que $\forall\delta\exists!g$ tal que g é uma δ-aproximação. Podemos definir $\mathbf{G}$ como sendo a "função-classe" tal que $\mathbf{G}(\alpha) = g(\alpha)$, para alguma (e portanto para toda) δ-aproximação com $\alpha < \delta$.

Formalmente: $\mathbf{G}(\alpha) = y$ seria dada por uma fórmula $\psi(\alpha, y)$ tal que

$$\exists\delta\exists g(\alpha < \delta \wedge \pi(g, \delta) \wedge y = g(\alpha)).$$

<u>Unicidade de $\mathbf{G}$</u>: Suponha que $\mathbf{G}'$ satisfaz:

$$\forall\alpha[\mathbf{G}'(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G}' \restriction \alpha)].$$

Temos, por indução transfinita sobre α:

$$\text{se } (\forall\beta < \alpha)[\mathbf{G}(\beta) = \mathbf{G}'(\beta)], \text{ então } \mathbf{G} \restriction \alpha = \mathbf{G}' \restriction \alpha,$$

e, portanto, $\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G} \restriction \alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G}' \restriction \alpha) = \mathbf{G}'(\alpha)$.

Logo, $\forall\alpha(\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{G}'(\alpha))$. ■

Exemplo Vamos definir $\alpha + \beta$ por recursão em β:

$$\begin{cases} \alpha + 0 = \alpha, \\ \alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta), \text{ e} \\ \alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi \colon \xi < \beta\}, \text{ se } \beta \text{ é limite.} \end{cases}$$

Vamos exibir uma $\mathbf{F} \colon \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ tal que a $\mathbf{G}$ obtida pelo teorema seja $\mathbf{G}(\beta) = \alpha + \beta$.

$$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ não é uma função com } \operatorname{dom} x \in \mathbf{ON}, \\ \alpha & \text{se } x = 0 \text{ (i.e. a função } x \text{ com domínio vazio)}, \\ S(x(\beta - 1)) & \text{se } x \text{ é uma função, } \operatorname{dom} x = \beta \text{ e } \beta \text{ é um ordinal sucessor}, \\ \bigcup\{x(\xi) \colon \xi < \beta\} & \text{se } x \text{ é uma função, } \operatorname{dom} x = \beta \text{ e } \beta \text{ é um ordinal limite}, \end{cases}$$

onde

$$\beta - 1 = \begin{cases} \beta & \text{se } \beta = 0 \text{ ou } \beta \text{ é ordinal limite}, \\ \gamma & \text{se } \beta = \gamma + 1. \end{cases}$$

Ou seja, $\beta - 1 = \bigcup\beta$, para qualquer β.

Vamos verificar que $\mathbf{G}$ dada pelo teorema é tal que $\forall\alpha(\mathbf{G}(\beta) = \alpha + \beta)$.

1. $\mathbf{G}(0) = \mathbf{F}(0) = \alpha$,

2. Considerando $\beta = S(\gamma)$ e $x = \mathbf{G} \restriction \beta$, temos

$$\mathbf{G}(S(\gamma)) = \mathbf{F}(\mathbf{G} \restriction S(\gamma)) = S(x(\gamma)) = S(\mathbf{G}(\gamma)).$$

3. Se β é ordinal limite,

$$\mathbf{G}(\beta) = \mathbf{F}(\mathbf{G} \restriction \beta) = \bigcup\{\mathbf{G} \restriction \beta(\xi) \colon \xi < \beta\} = \bigcup\{\mathbf{G}(\xi) \colon \xi < \beta\}.$$

Portanto, $\mathbf{G}(\beta) = \alpha + \beta$, para todo β.

Dia 23/04/97

Teorema da Recursão Transfinita: Se $\mathbf{F}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, então existe uma única $\mathbf{G}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{V}$ tal que para todo α, $\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G} \restriction \alpha)$.

Variantes do T.R.T.:

1. *Se $a_0 \in \boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, então existe uma única $\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{ON} \to \boldsymbol{V}$ tal que*

- $\mathbf{G}(0) = a_0$,
- $\forall\alpha[\mathbf{G}(\alpha+1) = \mathbf{F}_1(\mathbf{G}(\alpha))]$,
- para todo α limite, $\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{F}_2(\mathbf{G} \restriction \alpha)$.

Demonstração Aplicar o Teorema da Recursão com $\mathbf{F}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tal que

$$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} a_0 & \text{se } x = 0, \\ \mathbf{F}_1(x(\alpha)) & \text{se } x \text{ é uma função } \wedge \ \operatorname{dom} x = \alpha+1 \text{ (para algum } \alpha), \\ \mathbf{F}_2(x) & \text{se } x \text{ é uma função } \wedge \ \operatorname{dom} x = \alpha \text{ é um ordinal limite}, \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

■

Exemplo Já vimos como definir $\alpha+\beta$, recursivamente em β (com α fixado). Vamos definir α^β por recursão transfinita em β (α fixado):

$$\begin{cases} \alpha^0 = 1, \\ \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha, \\ \beta \text{ limite, } \alpha^\beta = \sup\left\{\alpha^\xi \colon \xi < \beta\right\}, \end{cases}$$

i.e., é uma aplicação da variante do Teorema da Recursão com $a_0 = 1$; $\mathbf{F}_1(x) = x \cdot \alpha$ e $\mathbf{F}_2(x) = \sup \operatorname{im} x$.

Exemplo $2^\omega = \sup\{2^n \colon n < \omega\} = \omega$. Quando $\alpha = \omega^\alpha$, α se diz um $\varepsilon-$ **número**. Defina, recursivamente usando **1**

$$\begin{cases} \xi_0 = \omega, \\ \xi_{n+1} = \omega^{\xi_n}, \\ \varepsilon = \sup\{\xi_n \colon n < \omega\}. \end{cases}$$

Então, $\omega^\varepsilon = \sup\left\{\omega^\xi \colon \xi < \varepsilon\right\} = \sup\left\{\omega^{\xi_n} \colon n < \omega\right\} = \sup\{\xi_{n+1} \colon n < \omega\} = \varepsilon$.

Exercício Exercícios 4, 5 e 6 do primeiro capítulo do Kunen.

Uma outra variante do T.R.T. é:

2. *Dados um ordinal δ e $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ existe uma única função g com domínio δ tal que*

$$(\forall\alpha < \delta)\,[g(\alpha) = \mathbf{F}(g \restriction \alpha)].$$

Agora, g é de fato um conjunto!

Demonstração Pelo Teorema da Recursão existe $\mathbf{G}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G} \restriction \alpha)$. Então, pelo axioma de substituição

$$\exists Y \forall \alpha < \delta \exists y \in Y \psi(\alpha, y),$$

onde $\mathbf{G} = \{\langle \alpha, y\rangle : \psi(\alpha, y)\}$. Como $\forall \alpha \exists ! y \psi(\alpha, y)$, e particular $\forall \alpha < \delta \exists ! y \psi(\alpha, y)$.

Seja $B = \{y \in Y \colon (\exists \alpha < \delta)\psi(\alpha, y)\}$ e seja $g = \{\langle \alpha, y\rangle \in \delta \times B \colon \psi(\alpha, y)\}$. ■

Analogamente, dados δ, a_0, $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, existe uma única função $g\colon \delta \to \mathbf{V}$ tal que

$$\begin{cases} g(0) = a_0, \\ \forall(\alpha+1) < \delta,\ g(\alpha+1) = \mathbf{F}_1(g(\alpha)) \text{ e} \\ \forall \alpha < \delta,\ \alpha \text{ limite}, g(\alpha) = \mathbf{F}_2(g \restriction \alpha). \end{cases}$$

Na realidade, não precisamos ter uma função $\mathbf{F}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$; é suficiente ter uma função $F\colon {}^{<\delta}A \to A$, para ter uma $g\colon \delta \to A$ tal que $(\forall \alpha < \delta)[g(\alpha) = F(g \restriction \alpha)]$, onde ${}^{<\delta}A$ é o conjunto[5] de todas as sequências de comprimento $< \delta$ de A.

Em compensação, para $\delta = \omega$ já vimos que ${}^{<\omega}A$ existe. Neste caso: dada $F\colon {}^{<\omega}A \to A$ existe uma única $g\colon \omega \to A$ tal que $\forall n < \omega[g(n) = F(g \restriction n)]$.

Como casos particulares temos:

1. Dados $a_0 \in A$ e $F\colon A \to A$ existe uma única $g\colon \omega \to A$ tal que $g(0) = a_0$ e $\forall n < \omega[g(n+1) = F(g(n))]$.

2. Dados $a_0 \in A$ e $F\colon \omega \times A \to A$ existe uma única $g\colon \omega \to A$ tal que $g(0) = a_0$ e $\forall n < \omega[g(n+1) = F(n, g(n))]$. ■

Outras equivalências do axioma da escolha

Af$_1$. "Produto cartesiano de não-vazios é não-vazio" i.e. se H é uma função com domínio $I \neq 0$ tal que $\forall i \in I(H(i) \neq 0)$, então existe alguma função h com domínio I tal que $h(i) \in H(i)$ para todo $i \in I$.

Af$_2$. "Existência da Função-Escolha".

$$\forall A \left[0 \notin A \to \exists f \left((f\colon A \to \bigcup A) \wedge \forall x \in A(f(x) \in x)\right)\right].$$

Af$_3$. "Comparabilidade de Cardinais".

$$\forall A \forall B \exists f\, ((f\colon A \to B \wedge f \text{ é 1-1}) \vee (f\colon B \to A \wedge f \text{ é 1-1})).$$

[5] a sua existência depende do axioma das partes.

Af$_4$. Dada uma relação R, existe uma função H tal que $H \subseteq R$ e $\operatorname{dom} H = \operatorname{dom} R$. ($H$ "escolhe", para cada $x \in \operatorname{dom} R$, um único y tal que $\langle x, y\rangle \in R$ e faz $\langle x, y\rangle \in H$.)

Af$_5$. Conjunto-escolha:

$$\forall A\,[(0 \notin A \wedge (\forall x \in A)\,(\forall y \in A)\,(x \neq y \rightarrow x \cap y = 0)) \rightarrow \exists C \forall x \in A\,(C \cap x \text{ é unitário})]\,.$$

Af$_6$. Função-escolha:

$$\forall A\,(\exists f \colon \mathcal{P}(A) \setminus \{0\} \rightarrow A)\,(\forall x \in \mathcal{P}(A) \setminus \{0\})\, f(x) \in x.$$

$$\boxed{\textbf{Af}_1,\ \textbf{Af}_2,\ \textbf{Af}_3,\ \textbf{Af}_4,\ \textbf{Af}_5 \text{ e } \textbf{Af}_6 \text{ são equivalentes entre si.}}$$

Princípios Maximais

1. Lema de Zorn:
Z$_0$: *Diz que se $\langle A, R\rangle$ é uma ordem parcial com $A \neq 0$ e tal que para todo $B \subseteq A$, se $\langle B, R\rangle$ for uma ordem total então B é limitado superiormente, então A tem elemento maximal.*

$$\forall A \forall R\big[A \neq 0 \wedge \langle A, R\rangle \text{ o.p.} \wedge \forall B \subseteq A(\langle B, R\rangle \text{ o.t.} \rightarrow B \text{ limitado superiormente}) \rightarrow (\exists m \in A)\neg(\exists x \in A) mRx\big].$$

Notação Se $\langle A, R\rangle$ é uma ordem parcial e $B \subseteq A$ é tal que $\langle B, R\rangle$ é ordem total, dizemos que B é uma **cadeia** de A ou uma R-**cadeia** de A.

<u>Variantes do Lema de Zorn</u>:

Z$_1$: Como em **Z$_0$**, com B admite supremo.
Z$_2$: Como em **Z$_0$**, com B admite máximo.
Z$_3$: Se $\langle A, R\rangle$ é ordem parcial, com $A \neq 0$, então existe uma cadeia maximal, i.e.

$$\forall A \forall R\big[(A \neq 0 \wedge \langle A, R\rangle \text{ ordem parcial}) \rightarrow \exists B \subseteq A\,(\langle B, R\rangle \text{ ordem total} \wedge \neg \exists C \subseteq A\,(\langle C, R\rangle \text{ ordem total} \wedge B \subsetneqq C))\,\big].$$

Z$_1$ $\rightarrow$ Z$_3$: Seja $\langle A, R\rangle$ ordem parcial e seja $\mathcal{C} = \{B \subseteq A \colon \langle B, R\rangle \text{ é ordem total}\}$. $\langle \mathcal{C}, \subseteq\rangle$ satisfaz as hipóteses de **Z$_1$**: $\mathcal{C} \neq 0$, $\langle \mathcal{C}, \subseteq\rangle$ é ordem parcial.

Seja $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\langle \mathcal{B}, \subseteq\rangle$ seja ordem total e seja $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{C}$, portanto, $\bigcup \mathcal{B}$ é supremo de $\mathcal{B}$. Logo, por **Z$_1$**, $\mathcal{C}$ admite um elemento maximal M, $M \in \mathcal{C}$: M é uma R-cadeia de A i.e. $\langle M, R\rangle$ é ordem total e é uma R-cadeia maximal, já que M é maximal em $\langle \mathcal{C}, \subseteq\rangle$.$\blacksquare$

Z$_3$ $\rightarrow$ Z$_0$: Seja $\langle A, R\rangle$ satisfazendo as hipóteses de **Z$_0$**. Por **Z$_3$**, seja $M \subseteq A$, uma R-cadeia maximal e seja $m \in A$ um limitante superior de M. Se existisse $x \in A$ tal que mRx então $x \notin M$ e $M^* = M \cup \{x\}$ seria uma R-cadeia.

$x \notin M$ senão m não seria limitante superior de M.

M^* é R-cadeia: sejam $u, v \in M^*$. Então, se $u, v \in M$ então u e v são comparáveis; se $u \in M$ e $v = x$, então uRm ou $u = m$ e mRx, portanto uRx, contra a maximalidade de M, portanto, $\neg\exists x \in A(mRx)$ i.e. m é R-maximal em A. ■

2. Outro princípio maximal é o Lema de Teichmuler–Tuckey.
Dizemos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}A$ é de **caráter finito** se

$$(\forall X \subseteq A)\,[X \in \mathcal{F} \leftrightarrow (\forall Y \subseteq X)\,(Y \text{ finito} \rightarrow Y \in \mathcal{F})]\,.$$

Exemplo $\mathcal{F} = \{X \subseteq A\colon (\forall u \in X)(\forall v \in X)[u \neq v \rightarrow u \cap v = 0]\}$.

Se $\langle A, R\rangle$ é ordem parcial, então $\mathcal{F} = \{X \subseteq A\colon \langle X, R\rangle$ é ordem total$\}$ tem caráter finito então $(\forall X \in \mathcal{F})(\exists Y \in \mathcal{F})[X \subseteq Y \wedge Y$ é $\subseteq$ $-$maximal de $\mathcal{F}]$.

Dia 25/4/97

Princípios Maximais

Lema de Zorn ($\mathbf{Z_0}$): toda ordem parcial não vazia na qual toda cadeia é limitada superiormente, tem elemento maximal.

$\mathbf{Z_1}$: toda ordem parcial não vazia na qual toda cadeia admite supremo, tem elemento maximal.

$\mathbf{Z_3}$: toda ordem não vazia tem alguma cadeia maximal.

$\mathbf{Z_0} \rightarrow \mathbf{Z_1}$✓

$\mathbf{Z_1} \rightarrow \mathbf{Z_3}$ Seja $\langle A, R\rangle$ uma o.p. satisfazendo as condições de $\mathbf{Z_3}$. Usando os axioma das partes e da separação garantimos a existência de $\mathcal{C} = \{B \subseteq A\colon \langle B, R\rangle$ é o.t.$\}$. $\langle \mathcal{C}, \subseteq\rangle$ é o.p. não-vazia. Se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ é uma cadeia, vê-se facilmente que $\langle \bigcup \mathcal{B}, R\rangle$ é o.t. e $\bigcup \mathcal{B}$ é o supremo de $\mathcal{B}$. Por hipótese, $\mathcal{C}$ tem elemento maximal. ■

$\mathbf{Z_3} \rightarrow \mathbf{Z_0}$ Seja $\langle A, R\rangle$ uma ordem parcial não vazia satisfazendo as condições de $\mathbf{Z_0}$. Seja $M \subseteq A$ uma cadeia maximal. Por hipótese, M tem um limitante superior a. Se existisse $x \in A$ tal que aRx, teríamos mRx, para todo $m \in M$. Logo $M \cup \{x\}$ é uma cadeia de $\langle A, R\rangle$ e $M \subsetneq M \cup \{x\}$. Portanto a é um elemento maximal de $\langle A, R\rangle$. ■

Observe que na demonstração de $\mathbf{Z_1} \rightarrow \mathbf{Z_3}$, usamos $\mathbf{Z_1}$ para a ordem $\subseteq$; chamemos de $\mathbf{Z_1^*}$ esta afirmação - i.e. $\mathbf{Z_1^*}$ seria

$$\forall A\left[\Big(A \neq 0 \wedge (\forall B \subseteq A)(B \text{ é } \subseteq\text{-cadeia} \rightarrow \bigcup B \in A)\Big) \rightarrow (\exists m \in A)\neg(\exists x \in A)(m \subsetneq x)\right].$$

Portanto,

$$\mathbf{Z_0} \rightarrow \mathbf{Z_1} \rightarrow \mathbf{Z_1^*} \rightarrow \mathbf{Z_3} \rightarrow \mathbf{Z_0}.$$

■

25. Definição. *Seja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}A$. Dizemos que $\mathcal{F}$ tem **caráter finito (c.f.)** se*

$$(\forall X \subseteq A)\,(X \in \mathcal{F} \leftrightarrow (\forall Y \subseteq X)(Y \text{ é finito} \to Y \in \mathcal{F}))\,.$$

26. Lema (Lema de Teich-Tuckey (T)). *Se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}A$ tem c.f., então*

$$(\forall X \in \mathcal{F})(\exists Y \in \mathcal{F})\,(X \subseteq Y \wedge \neg(\exists Z \in \mathcal{F})Y \subsetneqq Z)\,.$$

$\mathbf{T} \to \mathbf{Z_3}$ Dada $\langle A, R\rangle$ o.p. com $A \neq 0$, temos que

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq A\colon\ \langle B, R\rangle \text{ é o.t.}\}$$

tem caráter finito.

Por $\mathbf{T}$, dado $X = 0$ (por exemplo), existe $Y \in \mathcal{F}$ tal que Y é $\subseteq$-maximal em $\mathcal{F}$. Este Y é uma cadeia maximal de $\langle A, R\rangle$ e é maximal entre as cadeias. ■

$\mathbf{Z_1^*} \to \mathbf{T}$ Seja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}A$ com c.f. e $X \in \mathcal{F}$. Seja $\mathcal{C} = \{Y \in \mathcal{F}\colon X \subseteq Y\}$. Como $X \in \mathcal{C}$ temos que $\langle \mathcal{C}, \subseteq\rangle$ é o.p. não vazia. Se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ é uma $\subseteq$-cadeia, então $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{C}$. De fato, seja $Z = \bigcup \mathcal{B}$. Temos que verificar que $Z \in \mathcal{F}$ e $X \subseteq Z$. Como todos os elementos de $\mathcal{B}$ contêm X, Z também conterá. Seja $Y \subseteq Z$, finito. $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subseteq Z = \bigcup \mathcal{B}$; para cada i, de 1 a n, existe $B_i \in \mathcal{B}$, tal que $y_i \in B_i$. Como $\mathcal{B}$ é $\subseteq$-cadeia e $B_1, B_2, \ldots, B_n$ é uma quantidade finita, existe $i_0 \in \{i_1, \ldots, i_n\}$ tal que $B_i \subseteq B_{i_0}$, para todo i, i.e. $y_1, \ldots, y_n \in B_{i_0}$. Portanto $Y \subseteq B_{i_0}$. Como $B_{i_0} \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ tem c.f., $Y \in \mathcal{F}$. Ou seja, toda parte finita de Z é elemento de $\mathcal{F}$, logo $Z \in \mathcal{F}$.

Logo, por $\mathbf{Z_1^*}$, existe $M \in \mathcal{C}$, elemento maximal. Como $M \in \mathcal{F}$ e $X \subseteq M$, M é elemento maximal entre os $Y \in \mathcal{F}$ tal que $X \subseteq Y$, i.e. vale $\mathbf{T}$. ■

$\mathbf{Z_0}$, $\mathbf{Z_1}$, $\mathbf{Z_1^*}$, $\mathbf{Z_3}$ e $\mathbf{T}$ são equivalentes.

$\mathbf{T} \to \mathbf{Af_3}$ Dados A e B, seja

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{P}(A \times B) : f \text{ é uma função 1-1} \wedge \operatorname{dom} f \subseteq A \wedge \operatorname{im} f \subseteq B\}\,.$$

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ tem caráter finito. Seja $X \in \mathcal{P}(A \times B)$, temos que provar que

$$X \in \mathcal{F} \leftrightarrow (\forall Y \subseteq X)(Y \text{ é finito} \to Y \in \mathcal{F}).$$

Facilmente temos que toda parte finita de uma função de $\mathcal{F}$ é uma função de $\mathcal{F}$. Agora suponha que toda parte finita de X é elemento de $\mathcal{F}$. Com certeza X é uma relação, pois $X \subseteq A \times B$, e, ainda, $\operatorname{dom} X \subseteq A$ e $\operatorname{im} X \subseteq B$. Falta mostrar que X é função injetora. Suponha $\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle \in X$. Então $Y = \{\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle\}$ é uma parte finita de X e $Y \in \mathcal{F}$, já que $\mathcal{F}$ tem c.f.. Logo $y_1 = y_2$ e X é uma função. Agora suponha $\langle x_1, y\rangle, \langle x_2, y\rangle \in X$. Pelo mesmo motivo de antes $Y = \{\langle x_1, y\rangle, \langle x_2, y\rangle\} \in \mathcal{F}$. Logo $x_1 = x_2$ e X é uma função injetora.

Concluimos que $\mathcal{F}$ tem c.f. e, por $\mathbf{T}$, existe $g \in \mathcal{F}$ maximal (começando com $f = 0$, por exemplo). Então $\operatorname{dom} g = A$ ou $\operatorname{im} g = B$. Caso contrário, sejam $a \in A \setminus \operatorname{dom} g$ e $b \in B \setminus \operatorname{im} g$, e $g \cup \{\langle a, b\rangle\} \in \mathcal{F}$, um absurdo pela maximalidade de g.

Se $\operatorname{dom} g = A$, então $g\colon A \longrightarrow B$ é 1-1. Se $\operatorname{im} g = B$, então $g^{-1}\colon B \longrightarrow A$ é 1-1. ■

$\mathbf{Z_1^*} \to \mathbf{Af_2}$ Dado A não vazio tal que $0 \notin A$ seja

$$\mathcal{F} = \{f\colon f \text{ é função} \wedge \operatorname{dom} f \subseteq A \wedge (\forall x \in \operatorname{dom} f) f(x) \in x\} \subseteq \mathcal{P}(A \times \bigcup A).$$

Se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ é uma $\subseteq$-cadeia, é fácil ver que $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{F}$. Portanto existe $f \in \mathcal{F}$ maximal. Se $\operatorname{dom} f \neq A$ seja $a \in A \setminus \operatorname{dom} f$ e seja $u \in a$ (existe pois $a \neq 0$). Daí $f^* = f \cup \{\langle a, u\rangle\} \in \mathcal{F}$ e $f \subsetneq f^*$. Logo $\operatorname{dom} f = A$. ■

$\mathbf{Z_1^*} \to$ **todo espaço vetorial tem base** Seja $\mathcal{C} = \{X \subseteq V\colon X \text{ é l.i.}\}$ e $\mathcal{C}$ tem c.f.. Daí existe $X \in \mathcal{C}$ maximal. Se $\langle X\rangle \neq V$, seja $x \in X \setminus \langle X\rangle \neq V$. Daí, $Y = X \cup \{x\}$ é l.i. e $Y \in \mathcal{C}$. Mas $X \subsetneq Y$. ■

Cardinais

27. Definição. *Seja A e B conjuntos; escreveremos que:*

1. $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$ *se existe f tal que f é uma função 1-1 de A em B,*
2. $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ *se existe $f\colon A \longrightarrow B$, 1-1 e sobre B,*
3. $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$ *se $A \preccurlyeq B$ e $B \not\preccurlyeq A$.*

$\approx$ é uma relação de equivalência e $\preccurlyeq$ é uma relação transitiva.

28. Teorema (Schröder-Bernstein). *Se $A \preccurlyeq B$ e $B \preccurlyeq A$, então $A \approx B$.*

Demonstração Sejam $f\colon A \longrightarrow B$ e $g\colon B \longrightarrow A$ duas funções 1-1. Definamos $A_0 = A$, $B_0 = B$, $A_{n+1} = g[B_n]$ e $B_{n+1} = f[A_n]$. E, ainda,

$$A_\infty = \bigcap \{A_n\colon n < \omega\}$$

e

$$B_\infty = \bigcap \{B_n\colon n < \omega\}.$$

Por indução em $n < \omega$, prova-se que $B_{n+1} \subseteq B_n$ e $A_{n+1} \subseteq A_n$. Assim

$$B_k \setminus B_{k+1} \cap B_j \setminus B_{j+1} = 0,$$

sempre que $k \neq j$.

Seja $h\colon A \longrightarrow B$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_\infty \cup \bigcup \{A_{2n} \setminus A_{2n+1}\colon n < \omega\} \\ g^{-1}(x) & \text{caso contrário, i.e. se } x \in \bigcup \{A_{2n+1} \setminus A_{2n+2}\colon n < \omega\}. \end{cases}$$

Observe que se $x \in A_{2n+1} \setminus A_{2n+2} = g[B_{2n}] \setminus g[B_{2n+1}] = g[B_{2n} \setminus B_{2n+1}]$, então $x = g(y)$, para um (único) $y \in B_{2n} \setminus B_{2n+1}$ e $h(x) = g^{-1}(x) = y$.

Consideremos $\mathcal{R}_1 = A_\infty \cup \bigcup \{A_{2n} \setminus A_{2n+1}\colon n < \omega\}$ e $\mathcal{R}_2 = \bigcup \{A_{2n+1} \setminus A_{2n+2}\colon n < \omega\}$.

<u>h é 1-1</u>: sejam $x_1, x_2 \in A$.

1. se $x_1, x_2 \in \mathcal{R}_i$, então $(h(x_1) = h(x_2) \to x_1 = x_2)$, pois f e g são injetoras.

2. se $x_1 \in \mathcal{R}_1$ e $x_2 \in \mathcal{R}_2$, temos que $h(x_2) = g^{-1}(x_2) \in B_{2n} \setminus B_{2n+1}$, para algum $n < \omega$. Caso $x_1 \in A_\infty$, então $h(x_1) = f(x_1) \in B_\infty$ e, com certeza, $h(x_1) \neq h(x_2)$. Caso $x_1 \in A_{2m} \setminus A_{2m+1}$, para algum $m < \omega$, temos que $h(x_1) \in B_{2m+1} \setminus B_{2m+2}$, logo $h(x_1) \neq h(x_2)$

h é sobrejetora: Seja $y \in B$. Se $y \in B_{2n} \setminus B_{2n+1}$, para algum $n < \omega$, então $y = g^{-1}(x) = h(x)$, para $x = g(y) \in A_{2n+1} \setminus A_{2n+2}$. Se $y \in B_\infty$, então $y \in B_{n+1} = f[A_n]$, para todo $n < \omega$. Logo existe $x_n \in A_n$ tal que $y = f(x_n)$, para cada $n < \omega$. Como f é 1-1, $x_n = x \in A_\infty$, para todo $n < \omega$. E $f(x) = y = h(x)$. ■

Dia 30/04/97

Notação $f\colon A \hookrightarrow B$ indica que f é 1-1 e $f\colon A \twoheadrightarrow B$ indica que é sobre B.

$$\begin{aligned} &A \preccurlyeq B \text{ se } \exists f\colon A \hookrightarrow B, \\ &A \approx B \text{ se } \exists f\colon A \to B \text{ bijetora e} \\ &A \prec B \text{ se } A \preccurlyeq B \text{ e } B \not\preccurlyeq A. \end{aligned}$$

Vimos que $A \preccurlyeq B$ e $B \preccurlyeq A \Rightarrow A \approx B$.

29. Definição. *Dado A, se existe R tal que $\langle A, R\rangle$ é boa ordem, define-se $|A|$ como o mínimo de $\{\alpha\colon \alpha \approx A\}$, $|A|$ se chama a **cardinalidade** de A.*

A cardinalidade só se define para conjuntos "bem ordenáveis". Assumindo **AE**, todo conjunto é bem ordenável e portanto $|A|$ se define para todo A. Observe que como $|A| \approx A$, o que a "operação" $|A|$ faz é escolher um representante entre a $\approx$-classe de equivalência de A. Ainda, observe que $|A| = |B| \Leftrightarrow A \approx B$.

Mesmo sem o **AE**, $|\alpha|$ está definido para todo α e $|\alpha| \leq \alpha$.

Dizemos que um ordinal κ é um **cardinal** se $\kappa = |\kappa|$ ou, equivalentemente, $\forall\alpha(\alpha < \kappa \to \alpha \not\approx \kappa)$.

30. Lema (10.5). $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha \to |\beta| = |\alpha|$.

Demonstração $|\alpha| \leq \beta \to |\alpha| \subseteq \beta$ portanto $|\alpha| \preccurlyeq \beta$, e $\alpha \approx |\alpha| \to \alpha \preccurlyeq \beta$. $\beta \leq \alpha \to \beta \preccurlyeq \alpha$, logo pelo teorema de Schröder-Bernstein $\alpha \approx \beta$ portanto $|\alpha| = |\beta|$. ■

31. Lema (10.6). *Para todo $n \in \omega$*

(i) $n \not\approx n + 1$.

(ii) $\forall\alpha[\alpha \approx n \to \alpha = n]$.

Observação Se $A \approx B$ e $x \notin A$ e $y \notin B$, então $A \cup \{x\} \approx B \cup \{y\}$, e se $a \in A$ e $b \in B$, $A \setminus \{a\} \approx B \setminus \{b\}$.

Demonstração (i). Ponha $T = \{n \in \omega\colon n \not\approx n + 1\}$. Então $0 \in T$ e se $n \in T$, então $n+1 \in T$ senão teríamos $h\colon n+1 \to n+2$ bijetora: $n+1 = n\cup\{n\} \approx n+1\cup\{n+1\} = n+2$, donde $n = (n+1) \setminus \{n\} \approx (n+2) \setminus \{n+1\} = n+1$, contra $n \in T$.

(ii). Seja $\alpha \approx n$. Se $\alpha \neq n$ então $\alpha < n$ ou $n < \alpha$. No primeiro caso temos $\alpha+1 \leq n$, logo $|n| = |\alpha| \leq \alpha < \alpha+1 \leq n$ portanto, por 10.5, $|n| = |\alpha+1|$. De $\alpha \approx n$, $\alpha+1 \approx n+1$ portanto $n \approx n+1$. Absurdo.

No segundo caso $n+1 \leq \alpha$, logo $|\alpha| = |n| \leq n < n+1 \leq \alpha$ portanto $|\alpha| = |n| = |n+1|$. Absurdo. ∎

32. Corolário (10.7). *ω é ordinal e $\forall n \in \omega$(n é cardinal).*

Demonstração $|\omega| \leq \omega$. Se $|\omega| < \omega$, então $|\omega| = n < \omega$ e $\omega \approx n$, portanto, $\omega = n \in \omega$. Absurdo. Logo $|\omega| = \omega$.

Se $|n| = m < n$ então $m \approx n$ então $m = n$. Absurdo. ∎

33. Definição.

*(i) A se diz **finito** se $\exists n < \omega(A \approx n)$.*

*(ii) A se diz **enumerável** se $A \preccurlyeq \omega$.*

*(iii) A se diz **infinito** se A não é finito.*

*(iv) A se diz **não-enumerável** se A não é enumerável.*

34. Definição. *Sejam κ e λ cardinais. Definimos*

$$
\begin{aligned}
&\kappa \oplus \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}\,| \text{ e,}\\
&\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda|.
\end{aligned}
$$

Observe que $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa = |\kappa + \lambda| = |\lambda + \kappa|$ e $\kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa = |\kappa \cdot \lambda| = |\lambda \cdot \kappa|$.

Exemplo $\omega \oplus 1 = |1 + \omega| = |\omega| = \omega < \omega + 1$ e $\omega \otimes 2 = |2 \cdot \omega| = |\omega| = \omega < \omega \cdot 2$.

35. Teorema (10.10). $(\forall m, n \in \omega)[m \oplus n = m + n < \omega \wedge m \otimes n = m \cdot n < \omega]$.

Demonstração Dado $m < \omega$, seja $T = \{n \in \omega\colon m + n < \omega\}$. Então $0 \in T$ e se $m + n < \omega$ então $m + (n+1) = (m+n) + 1 < \omega$, portanto $n + 1 \in T$ e $T = \omega$. $m \oplus n = |m+n|$ portanto $m \oplus n \approx m + n$ portanto $m \oplus n = m + n$ por 10.6(ii).

Analogamente, dado $m \in \omega$, $T = \{n \in \omega\colon m \cdot n < \omega\} = \omega$. ∎

36. Lema (10.11). *Se κ é um cardinal infinito, então κ é ordinal limite.*

Demonstração Se $\kappa = \alpha + 1$, então de[6] $1 + \alpha = \alpha$ segue que $\kappa = |\kappa| = |\alpha + 1| = |1 + \alpha| = |\alpha| \leq \alpha < \kappa$, i.e. $\kappa < \kappa$. Absurdo. ∎

37. Teorema. *Se κ é cardinal infinito, então $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.*

[6] exercício 5 da lista 3.

Demonstração Por indução transfinita sobre κ (i.e. sobre os cardinais infinitos).[7]

Seja κ um cardinal infinito e suponhamos que $\lambda \otimes \lambda = \lambda$ para todo $\lambda < \kappa$ infinito. Então *para todo* $\alpha < \kappa$ *temos* $|\alpha \times \alpha| = |\alpha| \otimes |\alpha| < \kappa$ pois se $\alpha < \omega$ então $|\alpha| \otimes |\alpha| < \omega \leq \kappa$ por 10.10. Se $\omega \leq \alpha$, então $|\alpha| \otimes |\alpha| = |\alpha| \leq \alpha < \kappa$.

Seja $\lhd$ definida em $\kappa \times \kappa$ por: para $\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \gamma, \delta \rangle \in \kappa \times \kappa$, $\langle \alpha, \beta \rangle \lhd \langle \gamma, \delta \rangle$ se

$$\begin{gathered} \max(\alpha, \beta) < \max(\gamma, \delta) \text{ ou} \\ \max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \text{ e } \langle \alpha, \beta \rangle < \langle \gamma, \delta \rangle \text{ lexicograficamente.} \end{gathered}$$

Observe que para todo $\langle \alpha, \beta \rangle \in \kappa \times \kappa$, $\operatorname{pred}(\kappa \times \kappa, \langle \alpha, \beta \rangle, \lhd) \subseteq \mu \times \mu$, onde $\mu = \max(\alpha, \beta) + 1$, portanto

$$|\operatorname{pred}(\kappa \times \kappa, \langle \alpha, \beta \rangle, \lhd)| \leq |\mu \times \mu| = |\mu| \otimes |\mu| < \kappa$$

pois de κ cardinal infinito temos que κ é ordinal limite, portanto, de $\max(\alpha, \beta) < \kappa$ temos $\mu < \kappa$.

Defina $\tau_{\langle \alpha, \beta \rangle} = \operatorname{type}(\operatorname{pred}(\kappa \times \kappa, \langle \alpha, \beta \rangle, \lhd), \lhd)$. Então $\tau_{\langle \alpha, \beta \rangle} < \kappa$ pois $\tau_{\langle \alpha, \beta \rangle} \approx \operatorname{pred}(\kappa \times \kappa, \langle \alpha, \beta \rangle, \lhd)$.

Portanto, pelo exercício 3 da lista 3, $\operatorname{type}(\kappa \times \kappa, \lhd) = \sup \left\{ \tau_{\langle \alpha, \beta \rangle} + 1 \colon \langle \alpha, \beta \rangle \in \kappa \times \kappa \right\} \leq \kappa$ e, portanto, $\kappa \otimes \kappa = |\kappa \times \kappa| \leq \kappa$. Mas, $\kappa \leq |\kappa \times \kappa|$ portanto $\kappa = |\kappa \times \kappa| = \kappa \otimes \kappa$. ■

38. Corolário. *Para todos* κ, λ *cardinais infinitos*

(i) $\kappa \otimes \lambda = \kappa \oplus \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

(ii) $|{}^{<\omega}\kappa| = \kappa$.

Demonstração (i). Sem perda de generalidade, $\kappa = \max(\kappa, \lambda)$.
$\kappa \leq \kappa \otimes \lambda \leq \kappa \otimes \kappa = \kappa$ e $\kappa \leq \kappa \oplus \lambda \leq \kappa \oplus \kappa = \kappa \otimes 2 \leq \kappa \otimes \kappa = \kappa$.

(ii). ${}^{<\omega}\kappa = \bigcup \{ {}^{n}\kappa \colon n < \omega \}$. Para cada $1 \leq n < \omega$ existe uma bijeção $f_n \colon {}^{n}\kappa \to \kappa$: $f_1 =$"id", obtida a bijeção $f_n \colon {}^{n}\kappa \to \kappa$, sejam $j \colon \kappa \times \kappa \to \kappa$ e $\theta_n \colon {}^{n+1}\kappa \to {}^{n}\kappa \times \kappa$ bijeções e θ dada por $\theta_n(h) = \langle h \restriction n, h(n) \rangle$.

$$\begin{gathered} {}^{n+1}\kappa \xrightarrow{\theta_n} {}^{n}\kappa \times \kappa \xrightarrow{\langle f_n, \mathrm{id} \rangle} \kappa \times \kappa \xrightarrow{j} \kappa \\ f_{n+1} = j \ \langle f_n, \mathrm{id} \rangle \ \theta_n. \end{gathered}$$

Defina $f \colon \bigcup \{ {}^{n}\kappa \colon n < \omega \} \to \omega \times \kappa$ por $f(h) = \langle \operatorname{dom} h, f_{\operatorname{dom} h}(h) \rangle$. Sejam $h_1 \neq h_2$: se $n_1 = \operatorname{dom} h_1 \neq n_2 = \operatorname{dom} h_2$ então $f(h_1) \neq f(h_2)$; se $n_1 = n_2 = n$ temos $\langle n, f_n(h_1) \rangle \neq \langle n, f_n(h_2) \rangle$ pois f_n é 1-1.

Logo ${}^{<\omega}\kappa \preccurlyeq \omega \otimes \kappa = \kappa$. Como $\kappa \preccurlyeq {}^{<\omega}\kappa$ temos ${}^{<\omega}\kappa \approx \kappa$, i.e. $|{}^{<\omega}\kappa| = \kappa$. ■

[7] isto significa que assumindo que a propriedade vale para todo cardinal infinito $\lambda < \kappa$ provamos a propriedade para κ; e com isto vale para todo κ.

Dia 7/5/97

8.Axioma das Partes: $\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \to z \in y)$.

39. Definição. $\mathcal{P}(x) = \{z \in y \colon z \subseteq x\}$, *onde* y *é dado pelo axioma, ou seja,* $\mathcal{P} = \{z \colon z \subseteq x\}$.

40. Teorema (Cantor). $\forall X (X \not\approx \mathcal{P}(X))$, *mais precisamente,* $X \prec \mathcal{P}(X)$, *i.e.* $\mathcal{P}(X) \not\preccurlyeq X$.

Demonstração Se $\mathcal{P}(X) \preccurlyeq X$, então existiria $h \colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ sobrejetora. Mas, dada h, o conjunto $B = \{x \in X : x \notin h(x)\} \in \mathcal{P}(X)$ e não pertence a $\operatorname{im} h$. De fato, seja $y \in X$,

$$\begin{cases} \text{se } y \in h(y), \text{ então } y \notin B \text{ e, portanto } h(y) \neq B, \text{ e} \\ \text{se } y \notin h(y), \text{ então } y \in B \text{ e, daí, } h(y) \neq B. \end{cases}$$ ■

A Função de Hartog

Seja A um conjunto e sejam

$$W_A = \{R \in \mathcal{P}(A \times A) \colon R \text{ é uma boa ordem sobre } \operatorname{corpo} R \subseteq A\},$$

onde $\mathbf{corpo}\,\mathbf{R} = \operatorname{dom} R \cup \operatorname{im} R$.

Ainda, definamos $H_A = \{\operatorname{type}(\operatorname{corpo} R, R) \colon R \in W_A\} \subseteq \mathbf{ON}$.

Temos que W_A existe pelos axiomas das partes e da separação e que H_A existe pelos axiomas da substituição e da separação.

Fatos: **1**. $\forall \alpha (\alpha \in H_A \leftrightarrow \alpha \preccurlyeq A)$, i.e. $H_A = \{\alpha \colon \alpha \preccurlyeq A\}$.
Demonstração ($\to$) Seja $\alpha \in H_A$. Logo $\alpha = \operatorname{type}(B, R)$, onde $R \in W_A$ e $B = \operatorname{corpo} R \subseteq A$. Logo existe $g \colon \alpha \longrightarrow B$, bijetora; como $B \subseteq A$, $g \colon \alpha \longrightarrow A$ é injetora.

($\leftarrow$) Se $\alpha \preccurlyeq A$, existe $g \colon \alpha \longrightarrow A$ 1-1. Daí, g "induz" uma relação R, de boa-ordem, sobre $\operatorname{im} g$.

$$xRy \leftrightarrow \exists \alpha \exists \beta \, (x = g(\alpha) \wedge y = g(\beta) \wedge \alpha < \beta)$$

e $\alpha \simeq \langle \operatorname{im} g, R \rangle$. Portanto, $\operatorname{type}(\operatorname{im} g, R) = \alpha \in H_A$. ■

2. $\mathbf{H_A}$ é ordinal É suficiente mostrar que H_A é transitivo.
Sejam $\beta \in \alpha$ e $\alpha \in H_A$, então $\beta \subseteq \alpha \preccurlyeq A$. Logo $\beta \preccurlyeq A$. ■

3. $H_A \not\preccurlyeq A$.
De fato, se $H_A \preccurlyeq A$, então $H_A \in H_A$. ■

4. $\mathbf{H_A}$ é cardinal (i.e. $\forall \beta (\beta < H_A \to \beta \not\approx H_A)$)
Seja $\beta < H_A$ e suponhamos que $\beta \approx H_A$. Temos que $H_A \approx \beta \preccurlyeq A$, donde chegamos ao absurdo que $H_A \preccurlyeq A$. ■

5. Conseqüentemente, H_A é o menor cardinal κ tal que $\kappa \not\preccurlyeq A$.

Vamos usar H_A para mostrar que $\mathbf{Af_3} \to \mathbf{AE}$:

Lembremos que $\mathbf{Af_3}$ é a afirmação: $\forall A \forall B (A \preccurlyeq B \vee B \preccurlyeq A)$.

Dado A, seja $B = H_A$. Então $B \not\preccurlyeq A$, ou seja, $A \preccurlyeq H_A$, pela $\mathbf{Af_3}$. Daí, existe $g\colon A \longrightarrow H_A$ 1-1 e g induz uma boa ordem R sobre A:

$$(\forall x, y \in A)\left(xRy \overset{def}{\leftrightarrow} g(x) < g(y)\right).$$

Logo $\forall A \exists R(\langle A, R\rangle$ é boa ordem). ■

Aplicando esta construção para um ordinal α, obtemos um cardinal H_α, tal que $\alpha < H_\alpha$, e é o menor cardinal com esta propriedade.

Notação $\alpha^+ = H_\alpha = \min\{\kappa \in \mathbf{CARD}\colon \alpha < \kappa\}$.

É claro que $\alpha^+ = |\alpha|^+$; e, em geral, se $\alpha \approx \beta$, $\alpha^+ = \beta^+$.

41. Lema. *Se X é um conjunto de cardinais, então $\sigma = \sup X$ é uma cardinal.*

Demonstração Seja $\alpha < \sigma$, então existe $\xi \in X$ tal que $\alpha < \xi$. Como X é um conjunto de cardinais, ξ é um cardinal e $\alpha \not\approx \xi$. *A fortiori* $\alpha \not\approx \sigma$. ■

42. Definição. *Um cardinal κ se diz **cardinal sucessor**, se $\kappa = \alpha^+$, para algum α; e κ se diz **cardinal limite** , se $\kappa \geq \omega$ e κ não é cardinal sucessor.*

É fácil ver que, para $\kappa \geq \omega$:

κ é cardinal limite $\leftrightarrow$ para todo $\lambda < \kappa$, $\lambda^+ < \kappa \leftrightarrow \kappa = \sup\{\lambda\colon \lambda$ é cardinal $\wedge\ \lambda < \kappa\}$.

Constrói-se, por recursão transfinita sobre α, uma função ω_α (ou $\aleph_\alpha$) dada por:

$$\begin{cases} \omega_0 = \omega \\ \omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+ \\ \omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta\colon \beta < \alpha\} \quad \text{se } \alpha \text{ limite.} \end{cases}$$

Pela lema acima, e por indução transfinita, sobre α, temos que $\forall \alpha(\omega_\alpha$ é um cardinal). Também, por indução transfinita sobre β, prova-se que $\forall \alpha(\alpha < \beta \to \omega_\alpha < \omega_\beta)$.

1. $\beta = 0$✓

2. suponha verdadeira para β, então, para $\alpha < \beta + 1$, temos que $\alpha \leq \beta$ e, portanto,

$$\omega_\alpha \leq \omega_\beta < (\omega_\beta)^+ = \omega_{\beta+1}.$$

3. para β limite, temos que, se $\alpha < \beta$, $\alpha + 1 < \beta$. Logo, se $\alpha < \beta$,

$$\omega_\alpha < \omega_{\alpha+1} \leq \omega_\beta.$$

Observe que $\forall\alpha(\alpha \leq \omega_\alpha)$, mas não se pode concluir que $\forall\alpha(\alpha < \omega_\alpha)$.

Exemplo Seja

$$\begin{cases} \alpha_0 = \omega \\ \alpha_{n+1} = \omega_{\alpha_n} \\ \sigma = \sup\{\alpha_n \colon n < \omega\}. \end{cases}$$

Temos que $\sigma \leq \omega_\sigma$. Como σ é ordinal limite, $\omega_\sigma = \sup\{\omega_\gamma \colon \gamma < \sigma\}$. Se $\gamma < \sigma$, então $\gamma < \alpha_n$, para algum $n < \omega$; portanto $\omega_\gamma < \omega_{\alpha_n} = \alpha_{n+1} \leq \sigma$. Logo $\omega_\sigma \leq \sigma$.

43. Proposição. *Se $f : \boldsymbol{ON} \longrightarrow \boldsymbol{ON}$ é crescente e contínua, então $\forall\alpha\exists\beta > \alpha(f(\beta) = \beta)$.*

Demonstração Definamos

$$\begin{cases} \beta_0 = \alpha \\ \beta_{n+1} = f(\beta_n) \\ \beta = \sup\{\beta_n \colon n < \omega\}. \end{cases}$$

■

44. Proposição. *Se κ é cardinal infinito, então $\kappa = \omega_\alpha$, para algum α.*

Demonstração Provemos por indução transfinita sobre o cardinal $\kappa \geq \omega$.

1. para $\kappa = \omega$, $\kappa = \omega_0$.

2. para κ sucessor, e suponha que vale para os anteriores, então $\kappa = \mu^+$ e $\mu = \omega_\alpha$, para algum α, logo $\kappa = \omega_{\alpha+1}$.

3. suponha que κ é cardinal limite e que vale para todos cardinais anteriores a ele.

   Se $\mu < \kappa$, cardinal infinito, seja α_μ o (único!) ordinal tal que $\omega_{\alpha_\mu} = \mu$. Considere $X = \{\alpha_\mu \colon \mu < \kappa \wedge \mu \geq \omega\}$ e seja $\beta = \sup X$.

   Seja $\gamma \in X$. Sendo assim, $\omega_\gamma < \kappa$. Como κ é cardinal limite, temos que $\omega_{\gamma+1} = (\omega_\gamma)^+ < \kappa$. Daí $\gamma + 1 \in X$. Logo se $\delta < \beta$, temos que $\delta + 1 < \beta$, e assim β será ordinal limite.

   Se $\gamma < \beta$, temos que $\gamma < \alpha_\mu$, para algum $\mu < \kappa$. Assim $\omega_\gamma < \omega_{\alpha_\mu} = \mu < \kappa$. Logo $\omega_\beta = \sup\{\omega_\gamma \colon \gamma < \beta\} \leq \kappa$. Suponha $\mu < \kappa$ cardinal. Então $\mu = \omega_{\alpha_\mu}$ e $\alpha_\mu \in X$. Logo $\alpha_\mu < \beta$. Daí, $\mu = \omega_{\alpha_\mu} < \omega_\beta$. Portanto $\kappa \subseteq \omega_\beta$. Daí, $\kappa = \omega_\beta$. ■

Concluímos que

$$\forall\alpha\,[(\omega_\alpha \text{ é card.sucessor} \leftrightarrow \alpha \text{ é ord.sucessor}) \wedge (\omega_\alpha \text{ é card.limite} \leftrightarrow \alpha \text{ é ord.limite})]\,.$$

Se $\alpha = \beta+1$, $\omega_\alpha = (\omega_\beta)^+$. Se α é limite e $\omega_\alpha = \kappa^+$, temos que $\kappa < \omega_\alpha$. Logo $\kappa < \omega_\beta$, para algum $\beta < \alpha$. Daí, $\omega_\alpha = \kappa^+ < (\omega_\beta)^+ = \omega_{\beta+1} \leq \omega_\alpha$, e concluímos que $\omega_\alpha < \omega_\alpha$, um absurdo. Logo ω_α é cardinal limite.

45. Lema$^{\mathbf{AE}}$. *Se $f\colon A \longrightarrow B$ é sobrejetora, então $B \preccurlyeq A$.*

Demonstração Seja R uma boa ordem em A e seja $g\colon B \longrightarrow A$ definida por

$$g(y) = R - \min f^{-1}(\{y\}).$$

Lembremos que $(\forall \in B) f^{-1}(\{y\}) \neq 0$ pois f é sobrejetora. Claramente, g é 1-1. ■

Existe $g\colon \mathcal{P}(\omega) \longrightarrow \omega_1$ sobrejetora, mas, sem o **AE** não se pode produzir $f\colon \omega_1 \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)$ 1-1.

Existe $j\colon \omega \longrightarrow \omega\times\omega$ bijetora. Logo

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{P}(\omega) & \stackrel{J}{\longrightarrow} & \mathcal{P}(\omega\times\omega) & \stackrel{\Theta}{\longrightarrow} & \omega_1 \\
 & & R & \mapsto & \Theta(R) = \begin{cases} \text{type}(\text{corpo}\, R, R) & \text{se } R \text{ é boa-ordem,} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}
\end{array}$$

é uma função sobrejetora.

09/05/97

46. Lema$^{\mathbf{AE}}$ (10.21). *Seja κ um cardinal infinito. Reunião de $\leq \kappa$ conjuntos de cardinalidade $\leq \kappa$ tem cardinalidade $\leq \kappa$ i.e. dados X_α para $\alpha < \kappa$ tais que $|X_\alpha| \leq \kappa$ para todo $\alpha < \kappa$, então $|\bigcup\{X_\alpha\colon \alpha<\kappa\}| \leq \kappa$.*

Demonstração Para cada $\alpha < \kappa$ escolha $f_\alpha\colon X_\alpha \to \kappa$ injetora: seja R uma boa ordem sobre $A = \mathcal{P}(\bigcup\{X_\alpha\colon \alpha<\kappa\}\times\kappa)$. Tome

$$f_\alpha = R - \min\{f \in A\colon f \text{ é uma função 1-1 de } X_\alpha \text{ em } \kappa\}\,.$$

Então, com estas f_α podemos definir uma

$$h\colon \bigcup\{X_\alpha\colon \alpha<\kappa\} \to \kappa\times\kappa$$

por $h(x) = \langle m_x, f_{m_x}(x)\rangle$, onde $m_x = \min\{\alpha<\kappa\colon x \in X_\alpha\}$.

Seja $x, y \in \bigcup_\alpha X_\alpha$, $x \neq y$. Então $m_x \neq m_y$ ou $m_x = m_y$. Se $m_x \neq m_y$ então $h(x) \neq h(y)$. Se $m_x = m_y = m$ então $f_m(x) \neq f_m(y)$ pois f_m é 1-1 e, portanto, $h(x) \neq h(y)$.

Logo $\bigcup\{X_\alpha\colon \alpha<\kappa\} \preccurlyeq \kappa\times\kappa \approx \kappa$. ■

47. Corolário. *Se* $X \subseteq \kappa^+$ *e* $|X| < \kappa^+$ *então* $\sup X < \kappa^+$.

Demonstração $X = \{\gamma_\xi \colon \xi < |X| \leq \kappa\}$, com $\gamma_\xi \in \kappa^+$ i.e. $|\gamma_\xi| \leq \kappa$. Portanto, pelo lema, $|\sup X| \leq \kappa$ logo $\sup X < \kappa^+$. ■

Observe que este corolário não valeria para κ no lugar de κ^+. Por exemplo, tome $X = \{\omega_n \colon n < \omega\}$, então $X \subseteq \omega_\omega$ com $|X| = \omega < \omega_\omega$ e $\sup X = \omega_\omega$.

Lévy provou que é consistente com ZF que $\mathcal{P}(\omega)$ e ω_1 sejam reuniões enumeráveis de enumeráveis.

48. Definição. *f é uma função* ***n-ária*** *($n < \omega$) sobre A se $f \colon A^n \to A$ no caso em que $n > 0$ e $f \in A$ no caso $n = 0$. f é uma* ***função finitária*** *sobre A se f é uma função n-ária para algum $n < \omega$.*

Para uma função n-ária f sobre A, um subconjunto $B \subseteq A$ se diz **fechado** para f se $f[B^n] \subseteq B$ no caso $n > 0$ e $f \in B$ no caso $n = 0$.

Se $\mathcal{F}$ é um conjunto de funções finitárias sobre A e $B \subseteq A$, o **fecho** de B por $\mathcal{F}$ é o menor subconjunto $\hat{B} \subseteq A$ que é fechado para toda $f \in \mathcal{F}$.

49. Teorema$^{\mathbf{AE}}$. *Seja $B \subseteq A$, $|B| \leq \kappa$ ($\kappa \geq \omega$), $\mathcal{F}$ um conjunto de funções finitárias sobre A, com $|\mathcal{F}| \leq \kappa$. Então $|\hat{B}| \leq \kappa$, onde $\hat{B}$ é o fecho de B por $\mathcal{F}$.*

Demonstração Por recursão finita sejam

$$\begin{cases} B_0 = B \\ B_{n+1} = B_n \cup \bigcup \{f_*(B_n) \colon f \in \mathcal{F}\}, \end{cases}$$

onde para todo $X \subseteq A$

$$f_*(X) = \begin{cases} f[X^k] & \text{se } f \text{ é } k\text{-ária com } k > 0 \\ f & \text{se } f \text{ é 0-ária.} \end{cases}$$

e seja

$$B_\omega = \bigcup \{B_n \colon n < \omega\}.$$

Por indução finita $|B_n| \leq \kappa$: $|B_0| = |B| \leq \kappa$. Supondo $|B_n| \leq \kappa$ então $|f_*(B_n)| \leq \kappa$ então $\bigcup \{f_*(B_n) \colon f \in \mathcal{F}\}$ é reunião de $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ conjuntos de cardinalidade $\leq \kappa$, portanto por 10.21, $|\bigcup \{f_*(B_n) \colon f \in \mathcal{F}\}| \leq \kappa$; e $|B_{n+1}| \leq \kappa$ e também $|B_\omega| \leq \kappa$ pois é a união de $\omega \leq \kappa$ conjuntos de cardinalidade $\leq \kappa$.

B_ω é fechado por $\mathcal{F}$.

Se $f \in \mathcal{F}$ é k-ária com $k > 0$ e $x_1, \ldots, x_k \in B_\omega$ então existem $n_1, \ldots, n_k < \omega$ tais que $x_i \in B_{n_i}$ ($i = 1, \ldots, k$). Seja $n^* = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, então $x_1, \ldots, x_k \in B_{n^*}$ e $f(x_1, \ldots, x_k) \in f_*[B_{n^*}] = f_*(B_{n^*}) \subseteq B_\omega$.

Logo $\hat{B} \subseteq B_\omega$ e portanto $|\hat{B}| \leq |B_\omega| \leq \kappa$. Na realidade, $\hat{B} = B_\omega$ (provar por indução finita que para todo $n \in \omega$ tem-se $B_n \subseteq \hat{B}$). ■

50. Definição. *Dados A e B denota-se por ${}^{B}A$ ou A^B o conjunto*

$$\{f \in \mathcal{P}(B \times A) \colon f \text{ é função e } \operatorname{dom} f = B \text{ e } \operatorname{im} f \subseteq A\}$$

de todas as funções de B em A.

51. Definição$^{\mathbf{AE}}$. *Dados κ e λ cardinais define-se κ^λ como sendo $|{}^{\lambda}\kappa|$.*

Já tinhamos definido a operação α^β para α e β ordinais. Em geral κ^λ como operação nos ordinais é diferente de κ^λ como operação nos cardinais. Por exemplo, $2^\omega = \omega$ nos ordinais e veremos que $2^\omega > \omega$ nos cardinais.

52. Lema.

1. $\mathcal{P}(A) \approx {}^{A}2$.

2. *Se κ e λ são cardinais e $\lambda \geq \omega$ e $2 \leq \kappa \leq \lambda$, então ${}^{\lambda}\kappa \preccurlyeq {}^{\lambda}2 \approx \mathcal{P}(\lambda)$ e com **AE** $2^\lambda = \kappa^\lambda = \lambda^\lambda$.*

Demonstração (i). Defina $H \colon \mathcal{P}(A) \to {}^{A}2$ por $\forall X \subseteq A$, $H(X)$ é uma função de A sobre 2 tal que $H(X)(a) = 0$ se $a \in A \setminus X$ e $H(X)(a) = 1$ se $a \in X$. H é 1-1 e sobre.
(ii). ${}^{\lambda}2 \preccurlyeq {}^{\lambda}\kappa \preccurlyeq {}^{\lambda}\lambda \preccurlyeq \mathcal{P}(\lambda \times \lambda) \approx \mathcal{P}(\lambda) \approx {}^{\lambda}2$. ■

Note que $2^{\aleph_0} = 2^\omega = |\mathcal{P}(\omega)| > |\omega|$ e em geral $\omega_\alpha < |\mathcal{P}(\omega_\alpha)| = 2^{\omega_\alpha}$. Logo $\omega_{\alpha+1} \leq 2^{\omega_\alpha}$.
A **Hipótese do Contínuo (CH)** é a afirmação

$$2^{\omega_0} = \omega_1$$

e a **Hipótese Generalizada do Contínuo (GCH)** é a afirmação

$$\forall \alpha [2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}].$$

Sem **AE**, reescrevemos **CH** e **GCH** como

CH: $\mathcal{P}(\omega) \approx \omega_1$.

GCH: $\forall \kappa (\mathcal{P}(\kappa) \approx \kappa^+)$.

Vamos mostrar que para $m, n < \omega$, m^n (exponenciação ordinal) é igual a m^n (exponenciação cardinal) verificando que m^n nos cardinais satisfaz também $m^0 = 1$ e $m^{n+1} = m^n \cdot m$. Para cada $m < \omega$, $m^0 = |{}^{0}m| = |\{0\}| = 1$ (0 é a única função de 0 em m). Temos uma função $\theta \colon {}^{(n+1)}m \to ({}^{n}m) \times m$ bijetora que associa a cada $h \in {}^{(n+1)}m$ o par $\langle h \restriction n, h(n) \rangle \in ({}^{n}m) \times m$. Portanto, $m^{n+1} = m^n \otimes m = m^n \cdot m$.

53. Lema$^{\mathbf{AE}}$.

1. $\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu$.

2. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \otimes \mu}$.

Demonstração (i). Se $B \cap C = 0$, então

$$\begin{gathered} {}^{(B \cup C)}A \approx ({}^{B}A) \times ({}^{C}A) \\ h \in {}^{(B \cup C)}A \rightsquigarrow \langle h \restriction B, h \restriction C \rangle \in ({}^{B}A) \times ({}^{C}A). \end{gathered}$$

(ii). Para todos A, B, C

$$\begin{gathered} {}^{C}({}^{B}A) \approx {}^{(C \times B)}A \\ h \in {}^{C}({}^{B}A) \rightsquigarrow \theta(h) \colon C \times B \to A \text{ tal que } \theta(h)(\langle c, b \rangle) = h(c)(b). \end{gathered}$$

Usando **AE** tomamos os cardinais e temos o lema. ■

54. Definição. *$f \colon \alpha \to \beta$ se diz **cofinal** (em β) se $f[\alpha]$ é um conjunto não limitado superiormente em β.*

Observação Se $\beta = \gamma + 1$, f é cofinal $\leftrightarrow \gamma \in \operatorname{im} f$.

55. Definição. *A **cofinalidade** de β é o menor α tal que existe $f \colon \alpha \to \beta$ cofinal.*

Notação $\operatorname{cf}(\beta)$ para a cofinalidade de β.

Observação Se $\beta = \gamma + 1$ então $\operatorname{cf}(\beta) = 1$, portanto só interessará $\operatorname{cf}(\beta)$ no caso em que β é limite. Observe que neste caso $\operatorname{cf}(\beta)$ é limite.

56. Lema (10.31). *Existe $f \colon \operatorname{cf}(\beta) \to \beta$ cofinal e crescente.*

Demonstração Existe $g \colon \operatorname{cf}(\beta) \to \beta$ que é cofinal. Vamos definir $f \colon \operatorname{cf}(\beta) \to \beta$ por recursão transfinita sobre $\xi < \operatorname{cf}(\beta)$:

$$f(\xi) = \max(g(\xi), \sup \{f(\eta) + 1 \colon \eta < \xi\})$$

para $\xi < \operatorname{cf}(\beta)$.

$\sup \{f(\eta) + 1 \colon \eta < \xi\} < \beta$ senão $f \restriction \xi \colon \xi \to \beta$ seria cofinal, contra $\xi < \operatorname{cf}(\beta)$. Portanto $f(\xi)$ está bem definida (uma vez conhecido $f \restriction \xi$).

$f(\xi) \geq g(\xi)$ e $\{g(\xi) \colon \xi < \operatorname{cf}(\beta)\}$ é ilimitado em β, portanto, $\{f(\xi) \colon \xi < \operatorname{cf}(\beta)\}$ também é ilimitado em β; e se $\eta < \xi$, $f(\eta) < f(\xi)$ (pois $f(\eta) < f(\eta) + 1 \leq \sup \{f(\eta) + 1 \colon \eta < \xi\} \leq f(\xi)$). ■

Observação $\mathrm{id} \colon \beta \to \beta$ é cofinal, portanto, $\operatorname{cf}(\beta) \leq \beta$.

Observação Existe uma bijeção $f \colon |\beta| \to \beta$, portanto f é cofinal, portanto $\operatorname{cf}(\beta) \leq |\beta|$.

Observação Se $X \subseteq \beta$ então $\operatorname{type}(X, <)$ ($<$ é a ordem entre os ordinais, restrita a X) é o único ordinal isomorfo a $\langle X, < \rangle$. Dessa forma,

$$\operatorname{cf}(\beta) = \min \{\alpha \colon \exists X \subseteq \beta (X \text{ não é limitado superiormente em } \beta \wedge \operatorname{type}(X, <) = \alpha)\}.$$

Então o lema acima pode ser visto tomando $X \subseteq \beta$ não limitado em β tal que $\operatorname{type}(X, <) = \operatorname{cf}(\beta)$. Então $f \colon \operatorname{cf}(\beta) \to X$ o (único) isomorfismo, é a função desejada.

Dia 14/5/97

Cofinalidade

57. Lema (10.32). *Se existe $f\colon \alpha \longrightarrow \beta$ cofinal e crescente e α é limite, então* $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$.

Demonstração Seja $g\colon \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ cofinal; então $fg\colon \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \beta$ é cofinal (pois dado $\xi < \beta$, seja $\eta < \alpha$ tal que $\xi \leq f(\eta)$ e seja $\zeta < \mathrm{cf}(\alpha)$ tal que $\eta \leq g(\zeta)$; como f é crescente, $\xi \leq f(\eta) \leq f(g(\zeta)) = fg(\zeta))$. Portanto, $\mathrm{cf}(\beta) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$.

Seja $g\colon \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \beta$ cofinal. Vamos definir $h\colon \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \alpha$ por

$$\xi < \mathrm{cf}(\beta) \mapsto h(\xi) = \min\{\eta < \alpha\colon g(\xi) < f(\eta)\}.$$

<u>h é cofinal em α</u>: pois dado $\gamma < \alpha$; existe $\xi < \mathrm{cf}(\beta)$ tal que $f(\gamma) < g(\xi)$. Como $f(h(\xi)) > g(\xi)$, temos que $h(\xi) > \gamma$, já que f é crescente. ■

58. Corolário. $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\beta)) = \mathrm{cf}(\beta)$.

Demonstração Existe $f\colon \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \beta$ cofinal e crescente, por 10.31. Logo $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\beta)) = \mathrm{cf}(\beta)$ pelo lema anterior. ■

59. Definição. *Um ordinal (limite) se diz* ***regular*** *se* $\mathrm{cf}(\beta) = \beta$.

Exemplo $f\colon \omega \longrightarrow \omega_\omega$ definida por $f(n) = \omega_n$ é cofinal. Portanto $\mathrm{cf}(\omega_\omega) \leq \omega$. Como $\mathrm{cf}(\omega_\omega) \not< \omega$ temos que $\mathrm{cf}(\omega_\omega) = \omega$. Daí, ω_ω não é regular.

Se β é regular, então β é cardinal. De fato,

$$\mathrm{cf}(\beta) \leq |\beta| \leq \beta = \mathrm{cf}(\beta).$$

Um cardinal infinito que não é regular se diz **singular**. ω é regular.

60. Proposição$^{\mathbf{AE}}$. $(\forall\kappa \geq \omega)\kappa^+$ *é regular.*

Demonstração Caso contrário, existiria $f\colon \mathrm{cf}(\kappa^+) \longrightarrow \kappa^+$ cofinal e $\mathrm{cf}(\kappa^+) < \kappa^+$. Cada $f(\xi)$, para $\xi < \mathrm{cf}(\kappa^+)$, é um elemento de κ^+. Portanto, $|f(\xi)| \leq \kappa$, $\forall\xi < \mathrm{cf}(\kappa^+)$. Sendo f cofinal,

$$\kappa^+ = \sup \operatorname{im} f = \bigcup_{\xi < \mathrm{cf}(\kappa^+)} f(\xi).$$

Daí κ^+ seria uma união de $\leq \kappa$ conjuntos de cardinalidade $\leq \kappa$. Pelo lema 10.21, $|\kappa^+| \leq \kappa$, e chegamos a uma contradição. ■

Observação Se $\lambda = \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, então κ pode ser escrito como união de λ conjuntos de cardinalidade $< \kappa$. De fato, seja $f\colon \lambda \longrightarrow \kappa$ cofinal e crescente, e

$$\kappa = \bigcup \{f(\xi)\colon \xi < \lambda\}.$$

Reciprocamente, se existe $\lambda < \kappa$ e existem $X_\alpha \subseteq \kappa, \forall\alpha < \lambda$, tais que $|X_\alpha| < \kappa$ e $\kappa = \bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha$; então $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. Portanto, κ é singular.

Demonstração Seja $\lambda < \kappa$ o menor cardinal tal que existem $X_\alpha \subseteq \kappa$ $(\forall \alpha < \lambda)$ tais que $|X_\alpha| < \kappa$ e $\kappa = \bigcup \{X_\alpha \colon \alpha < \lambda\}$.

Para todo $\xi < \lambda$ tome $\beta_\xi = \text{type}(\{X_\alpha \colon \alpha < \xi\})$. Pela minimalidade de λ temos que $\beta_\xi < \kappa$. Vamos mostrar que $f \colon \lambda \to \kappa$ dada por $f(\xi) = \beta_\xi$ é cofinal: ponha $\beta = \sup \operatorname{im} f$. Observe que $g \colon \kappa \to \lambda \times \beta$ dada por $g(\zeta) = \langle \xi, \gamma \rangle$, onde $\xi = \min \{\alpha \colon \zeta \in X_\alpha\}$ e $\gamma = \text{type}\, X_\xi \cap \zeta$, é injetora.

Logo $\kappa \leq |\lambda \times \beta| = \lambda \otimes |\beta|$ e como $\lambda < \kappa$ então $|\beta| \geq \kappa$, portanto, $\beta \geq \kappa$, ou seja, $\beta = \kappa$. ■

Provamos que: *um cardinal $\kappa \geq \omega$ é singular se, e somente se, existem $\lambda < \kappa$ e $\langle X_\alpha \colon \alpha < \lambda \rangle$ tais que $(\forall \alpha < \lambda)(X_\alpha \subseteq \kappa \wedge |X_\alpha| < \kappa)$ e $\bigcup \{X_\alpha \colon \alpha < \lambda\} = \kappa$.*

Sem o **AE** sabe-se que é possível que ω_1 seja uma reunião enumerável de enumeráveis, e, portanto, $\text{cf}(\omega_1) \leq \omega$.

Sem o **AE** não se pode provar que existem cardinais de cofinalidade $> \omega$.

61. Lema. *Para α limite,* $\text{cf}(\omega_\alpha) = \text{cf}(\alpha)$.

Lembremos que ω_α é regular, para α sucessor.

Demonstração Seja $f \colon \alpha \longrightarrow \omega_\alpha$ a função "Aleph":

$$f(\xi) = \omega_\xi, \text{ para } \xi < \alpha.$$

Por 10.32, $\text{cf}(\alpha) = \text{cf}(\omega_\alpha)$. ■

<u>Pergunta</u>: Como seria um cardinal limite κ no caso de ser regular?

κ seria ω_α, para algum α limite.

$$\text{cf}(\alpha) = \text{cf}(\omega_\alpha) = \omega_\alpha \leq \alpha \leq \omega_\alpha.$$

$\alpha = \omega_\alpha = \kappa$. Portanto, $\kappa = \omega_\kappa$. Mas esta condição não é suficiente, nós vimos um κ nessas condições mas κ não era regular,

$$\begin{cases} \kappa_0 = \omega_0 \\ \kappa_{n+1} = \omega_{\kappa_n} \\ \kappa = \sup \{\kappa_n \colon n < \omega\} \text{ e} \end{cases}$$

$\text{cf}(\kappa) = \omega$.

62. Definição.

- *Um cardinal κ se diz **fracamente inacessível** se κ é cardinal limite regular.*
- *Um cardinal κ se diz **fortemente inacessível** se $\kappa > \omega$, κ é regular e $(\forall \lambda < \kappa) 2^\lambda < \kappa$.*

Lembremos que κ é cardinal limite se, e só se, $(\forall \lambda < \kappa) \lambda^+ < \kappa$ (κ, λ cardinais).

Se κ é cardinal infinito e $(\forall \lambda < \kappa) 2^\lambda < \kappa$, então, em particular, $(\forall \lambda < \kappa) \lambda^+ \leq 2^\lambda < \kappa$, portanto κ é limite.

Por isso, se κ satisfaz $(\forall \lambda < \kappa) 2^\lambda < \kappa$, κ se diz **limite forte**.

Aritmética Cardinal

Sejam κ_i, para $i \in I$, cardinais, e sejam $A = \bigcup\{\{i\} \times \kappa_i \colon i \in I\}$ e $B = \prod\langle \kappa_i \colon i \in I\rangle = \{f \colon f \text{ é função } \wedge \operatorname{dom} f = I \wedge (\forall i \in I) f(i) \in \kappa_i\}$.

Usando **AE**, definimos

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = |A| \quad \text{e} \quad \prod_{i \in I} \kappa_i = |B|.$$

63. Proposição. *Se* $(\forall i \in I)\kappa_i \geq 1$ *e* $|I| \geq \omega$, *então* $\sum_{i\in I} \kappa_i = |I| \otimes \sup\{\kappa_i \colon i \in I\}$.

Demonstração Sejam $|I| = \lambda$, $\sum_{i \in I} \kappa_i = \sigma$ e $\sup\{\kappa_i \colon i \in I\} = \kappa$. Então

$$\lambda = \sum_{i \in I} 1 \leq \sum_{i \in I} \kappa_i = \sigma.$$

Logo $\lambda \leq \sigma$. Ainda,

$$\sigma = \sum_{i \in I} \kappa_i \leq \sum_{i \in I} \kappa = \lambda \otimes \kappa.$$

Portanto, $\sigma \leq \lambda \otimes \kappa$. Como $\kappa_i \leq \sigma$, para todo $i \in I$, temos que $\kappa \leq \sigma$. De $\lambda \geq \omega$, temos que

$$\sigma \leq \lambda \otimes \kappa = \max\{\lambda, \kappa\} \leq \sigma.$$

■

Exemplo $\sum_{n<\omega} \omega_n = \omega_\omega$.

64. Proposição. $((\forall i \in I)\theta_i < \kappa_i) \to \sum_{i \in I} \theta_i < \prod_{i \in I} \kappa_i$.

Demonstração Sejam $A = \bigcup\{\{i\} \times \theta_i \colon i \in I\}$ e $B = \prod\langle \kappa_i \colon i \in I\rangle$.
Definamos $h \colon A \longrightarrow B$ por

$$\langle i, \xi\rangle \in A \mapsto h(\langle i, \xi\rangle)(j) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \xi + 1 & j = i \end{cases}$$

<u>h é 1-1</u>: Sejam $\langle i_1, \xi_1\rangle$ e $\langle i_2, \xi_2\rangle$ dois elementos distintos de A.

- Se $i_1 = i_2 = i$, temos que

$$h(\langle i_1, \xi_1\rangle)(i) = \xi_1 + 1 \neq \xi_2 + 1 = h(\langle i_2, \xi_2\rangle)(i).$$

- Se $i_1 \neq i_2$,

$$h(\langle i_1, \xi_1\rangle)(i_2) = 0 \neq \xi_2 + 1 = h(\langle i_2, \xi_2\rangle)(i_2).$$

Daí h é 1-1 e $A \preccurlyeq B$. Logo $|A| \leq |B|$.

Agora suponha dada $h\colon A \longrightarrow B$. Para cada $i \in I$, seja $f_i\colon \theta_i \longrightarrow \kappa_i$ definida por $f_i(\xi) = h(\langle i, \xi\rangle)(i)$, para todo $\xi < \theta_i$. Como $\theta_i < \kappa_i$, temos que

$$|\{f_i(\xi)\colon \xi < \theta_i\}| \leq \theta_i < \kappa_i.$$

Então $\kappa_i \setminus \{f_i(\xi)\colon \xi < \theta_i\} \neq 0$. Seja $g(i) = \min(\kappa_i \setminus \operatorname{im} f_i)$. Isto define uma função g com domínio I e tal que $(\forall i \in I) g(i) \in \kappa_i$, i.e. $g \in B$. Vejamos que $g \notin \operatorname{im} h$. Seja $\langle i, \xi\rangle \in A$ e temos que $g(i) \notin \operatorname{im} f_i$ mas $h(\langle i, \xi\rangle)(i) = f_i(\xi) \in \operatorname{im} f_i$. Portanto $g \neq h(\langle i, \xi\rangle)$.

Logo $A \prec B$ e $|A| < |B|$. ∎

65. Proposição$^{\mathbf{AE}}$ (König). *Sejam κ, λ cardinais infinitos tais que $\operatorname{cf}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$. Então $\kappa < \kappa^\lambda$.*

Demonstração Existe $\langle \theta_i\colon i \in \lambda\rangle$ com $\theta_i < \kappa$ e cofinal em κ.
Temos

$$\sum_{i\in\lambda} \theta_i = \lambda \otimes \sup\{\theta_i\colon i \in I\} = \lambda \otimes \kappa = \kappa.$$

Ainda, pela proposição anterior,

$$\sum_{i\in\lambda} \theta_i < \prod_{i\in\lambda} \kappa = \kappa^\lambda.$$

Logo $\kappa < \kappa^\lambda$. Em particular, $\kappa < \kappa^{\operatorname{cf}(\kappa)}$. ∎

66. Corolário. *Para $\kappa \geq \omega$, $\kappa < \operatorname{cf}(2^\kappa)$.*

Demonstração Seja $\theta = 2^\kappa$. Se $\operatorname{cf}(\theta) \leq \kappa$, teríamos, pelo resultado anterior, que

$$2^\kappa = \theta < \theta^\kappa = (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa\otimes\kappa} = 2^\kappa.$$

Portanto, $\kappa < \operatorname{cf}(\theta) = \operatorname{cf}(2^\kappa)$. ∎

Dia 16/5/97

67. Proposição. *Assumindo* **GCH** *(a hipótese generalizada do contínuo), se $\kappa \geq 2$, $\lambda \geq \omega$ então*

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \textit{se } \lambda < \operatorname{cf}(\kappa) \\ \kappa^+ & \textit{se } \operatorname{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa \\ \lambda^+ & \textit{se } \kappa \leq \lambda. \end{cases}$$

Demonstração Se $\kappa \leq \lambda$, então

$$2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa\otimes\lambda} = 2^\lambda.$$

Portanto $\kappa^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+$, por **GCH**.

Se $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa$, então, usando König,

$$\kappa < \kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+.$$

Logo $\kappa^\lambda = \kappa^+$.

Se $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ e $f\colon \lambda \longrightarrow \kappa$ temos que $\sup \mathrm{im}\, f = \sigma < \kappa$, i.e. $f \in {}^\lambda\alpha$ para algum $\alpha < \kappa$. Portanto,

$${}^\lambda\kappa = \bigcup \left\{ {}^\lambda\alpha \colon \alpha < \kappa \right\}.$$

Logo $|{}^\lambda\alpha| = |\alpha|^\lambda \leq 2^{|\alpha| \otimes \lambda} \stackrel{\mathbf{GCH}}{=} \max(|\alpha|, \lambda)^+ \leq \kappa$. Daí,

$$\kappa^\lambda = \left| \bigcup \left\{ {}^\lambda\alpha \colon \alpha < \kappa \right\} \right| \leq \sum_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\lambda \leq \sum_{\alpha<\kappa} \kappa = \kappa \otimes \kappa = \kappa.$$

■

Notação Seja X um conjunto infinito, com $|X| = \kappa$ e seja $\lambda \leq \kappa$. Denotamos por:

- $[X]^\lambda = \{Y \subseteq X \colon |Y| = \lambda\}$
- $[X]^{<\lambda} = \{Y \subseteq X \colon |Y| < \lambda\}$
- $[X]^{\leq\lambda} = \{Y \subseteq X \colon |Y| \leq \lambda\}$.

O conjunto das **partes finitas de** X é o conjunto $[X]^{<\omega}$.

68. Proposição (exercício 14 do Kunen). $|[X]^\lambda| = |X|^\lambda$.

Demonstração Para cada $Y \in [X]^\lambda$ existe $h_Y\colon \lambda \longrightarrow Y$ bijetora, pois $|Y| = \lambda$. Definimos $H(Y) = h_Y$, para cada $Y \in [X]^\lambda$, onde h_Y é uma função de λ em X tal que $\mathrm{im}\, h_Y = Y$. Se $Y_1, Y_2 \in [X]^\lambda$, são distintos, temos que

$$\mathrm{im}\, H(Y_1) = \mathrm{im}\, h_{Y_1} = Y_1 \neq Y_2 = \mathrm{im}\, h_{Y_2} = \mathrm{im}\, H(Y_2).$$

Sendo assim, H é uma função 1-1 de $[X]^\lambda$ em ${}^\lambda|X|$. E

$$|[X]^\lambda| \leq |{}^\lambda X| = |X|^\lambda.$$

Seja $f \in {}^\lambda X$, então $f \subseteq \lambda \times X$ e $|f| = \lambda$. Portanto $f \in [\lambda \times X]^\lambda \approx [X]^\lambda$, pois $|\lambda \times X| = \lambda \otimes |X| = |X|$. Logo

$${}^\lambda X \subseteq [\lambda \times X]^\lambda \approx [X]^\lambda,$$

e $|X|^\lambda \leq |[X]^\lambda|$. ■

69. Definição.

- ${}^{<\lambda}\kappa \stackrel{def}{=} \bigcup \{ {}^\alpha\kappa \colon \alpha < \lambda\}$.
- ${}^{<\beta}A \stackrel{def}{=} \bigcup \{ {}^\alpha A \colon \alpha < \beta\}$.

- $\kappa^{<\lambda} \overset{def}{=} |{}^{<\lambda}\kappa| = \left|\bigcup\{{}^{\alpha}\kappa\colon \alpha < \lambda\}\right|$.

70. Lema. $\left|\bigcup\{X_i\colon i \in I\}\right| \leq \sum_{i\in I} |X_i| = \left|\bigcup\{\{i\} \times X_i\colon i \in I\}\right|$.

Demonstração No caso $I = \lambda$. Definamos uma função de $\bigcup\{X_i\colon i \in I\}$ em $\bigcup\{\{i\} \times X_i\colon i \in I\}$, por

$$x \mapsto \langle\alpha, x\rangle\,,\ \text{onde } \alpha = \min\{\xi < \lambda\colon x \in X_\xi\}\,.$$

É fácil ver que esta função é injetora. ■

Vejamos quanto é $\kappa^{<\lambda}$. Pelo lema anterior,

$$\kappa^{<\lambda} = \left|\bigcup\{{}^{\alpha}\kappa\colon \alpha < \lambda\}\right| \leq \sum_{\alpha<\lambda} |{}^{\alpha}\kappa| = \sum_{\alpha<\lambda} \kappa^{|\alpha|} = \lambda \otimes \sup\left\{\kappa^{|\alpha|}\colon \alpha < \lambda\right\}.$$

- Se $\lambda = \mu^+$, então $\kappa^{|\alpha|} \leq \kappa^{\mu}$, para todo $\alpha < \lambda$. Logo $\sup\left\{\kappa^{|\alpha|}\colon \alpha < \lambda\right\} = \kappa^{\mu}$. Ainda,

$$\lambda = \mu^+ \leq 2^{\mu} \leq \kappa^{\mu}.$$

  Logo $\kappa^{<\lambda} = \kappa^{\mu}$.

- Se λ é cardinal limite, temos

$$\lambda = \sup\{\mu\colon \mu < \lambda \wedge \mu \text{ é cardinal}\} \leq \sup\{\kappa^{\mu}\colon \mu < \lambda \wedge \mu \text{ é cardinal}\}\,.$$

  Então

$$\lambda \otimes \sup\left\{\kappa^{|\alpha|}\colon \alpha < \lambda\right\} = \sup\{\kappa^{\mu}\colon \mu < \lambda \wedge \mu \text{ é cardinal}\}\,.$$

  Como $\sup\{\kappa^{\mu}\colon \mu < \lambda \wedge \mu \text{ é cardinal}\} \leq \kappa^{<\lambda}$, temos que

$$\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^{\mu}\colon \mu < \lambda \wedge \mu \text{ é cardinal}\}\,.$$

A **função do contínuo** $\beth(\alpha)$ se define recursivamente por:

$$\begin{cases} \beth(0) = \omega_0 \\ \beth(\alpha+1) = 2^{\beth(\alpha)} \\ \beth(\alpha) = \sup\left\{2^{\beth(\xi)}\colon \xi < \alpha\right\} & \text{se } \alpha \text{ é um ordinal limite.} \end{cases}$$

Um pouco mais de aritmética de Cardinais

Já vimos que $\sum \kappa_i = |I| \otimes \sup\{\kappa_i\colon i \in I\}$.

71. Proposição. $\prod \kappa_i^{\lambda} = (\prod \kappa_i)^{\lambda}$ *e* $\prod \kappa^{\lambda_i} = \kappa^{\sum \lambda_i}$.

Demonstração As funções definidas abaixo são bijeções.

Definamos
$$H\colon \prod\langle\, {}^{\lambda}\kappa_i\colon i\in I\rangle \longrightarrow {}^{\lambda}\prod\langle\kappa_i\colon i\in I\rangle$$
por $f\in\prod\langle\, {}^{\lambda}\kappa_i\colon i\in I\rangle \mapsto H(f)\in {}^{\lambda}\prod\langle\kappa_i\colon i\in I\rangle$ onde $H(f)(\xi)$ é dada por $H(f)(\xi)(i) = f(i)(\xi)$.

Definamos
$$H\colon \prod\langle\, {}^{\lambda_i}\kappa\colon i\in I\rangle \longrightarrow {}^{\bigcup_i\{\{i\}\times\lambda_i\}}\kappa$$
por $f\in\prod\langle\, {}^{\lambda_i}\kappa\colon i\in I\rangle \mapsto H(f)(\langle i,\xi\rangle) = f(i)(\xi)$. ∎

- Se $\{A_j\colon j\in J\}$ é uma partição de I, então

$$\sum_{i\in I}\kappa_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in A_j}\kappa_i\right)$$
$$\prod_{i\in I}\kappa_i = \prod_{j\in J}\left(\prod_{i\in A_j}\kappa_i\right).$$

∎

- Se $2\le\kappa_i$ $(\forall i\in I)$, então $\sum_i\kappa_i\le\prod_i\kappa_i$.

Demonstração Se $2\le\kappa_i$ então $\prod_i 2\le\prod_i\kappa_i$ portanto $2^{|I|}\le\prod_i\kappa_i$ logo $|I|\le\prod_i\kappa_i$. Defina
$$\bigcup\{\{i\}\times\kappa_i\colon i\in I\}\to I\times\prod\langle\kappa_i\colon i\in I\rangle$$
$$\langle i,\xi\rangle\mapsto\langle i,f\rangle\,,$$
onde $f\colon I\to\bigcup\kappa_i$ é dada por
$$f(j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j\neq i\\ \xi & \text{se } j = i.\end{cases}$$
Portanto, $\sum_i\kappa_i = \left|\bigcup\{\{i\}\times\kappa_i\colon i\in I\}\right| \le |I|\otimes\prod_i\kappa_i = \prod_i\kappa_i$. ∎

- Se $\kappa_i<\lambda_i$ $(\forall i\in I)$, então $\sum_i\kappa_i<\prod_i\lambda_i$. ∎

- Se $\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)<\kappa$, i.e. κ é singular, então existe uma sequência κ_α para $\alpha<\lambda$ com $\kappa_\alpha<\kappa$ e tal que $\sup\{\kappa_\alpha\colon\alpha<\lambda\} = \lambda\otimes\kappa = \kappa$. Mas então, $\sum_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha = \lambda\otimes\sup\{\kappa_\alpha\colon\alpha<\lambda\} = \lambda\otimes\kappa = \kappa$.

  κ é singular $\Leftrightarrow$ existem $\lambda<\kappa$ e $\kappa_\alpha<\kappa$ $(\forall\alpha<\kappa)$ tais que $\kappa = \sum_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha$. ∎

- $\mathrm{cf}(2^\lambda) > \lambda$. Em geral, $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) > \lambda$ $(\forall \kappa \geq 2)$. Se não, $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) \leq \lambda$ e poderíamos escrever $\kappa^\lambda = \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$ com $\kappa_\alpha < \kappa^\lambda$. Seja $\lambda_\alpha = \kappa^\lambda$, então $\kappa_\alpha < \lambda_\alpha$ para todo α, portanto, $\kappa^\lambda = \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha < \sum_{\alpha<\lambda} \lambda_\alpha = \prod_{\alpha<\lambda} \kappa^\lambda = (\kappa^\lambda)^\lambda = \kappa^\lambda$, um absurdo.

72. Teorema (computação indutiva de κ^λ). *Sejam $\kappa, \lambda \geq \omega$.*

(i) Se $\kappa \leq \lambda$ então $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.

(ii) Se existe $\mu < \kappa$ tal que $\kappa \leq \mu^\lambda$ então $\kappa^\lambda = \mu^\lambda$.

(iii) Se $\lambda < \kappa$ e $(\forall \mu < \kappa)\mu^\lambda < \kappa$, então

(a) se κ é regular ou $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ então $\kappa^\lambda = \kappa$,

(b) se $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa$ então $\kappa^\lambda = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

Demonstração

(i). $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa\otimes\lambda} = 2^\lambda$.

(ii). $\mu^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (\mu^\lambda)^\lambda = \mu^{\lambda\otimes\lambda} = \mu^\lambda$.

(iii). Num dos casos usaremos a Fórmula de Hausdorff[8]:

$$\kappa, \lambda \geq \omega \ \Rightarrow\ (\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda.$$

(a). Temos $\lambda < \kappa$ e $(\forall \mu < \kappa)\mu^\lambda < \kappa$ e vamos supor κ regular. Se $\kappa = \xi^+$, então $\kappa^\lambda = (\xi^+)^\lambda = \xi^+ \otimes \xi^\lambda = \xi^+ = \kappa$, pois $\xi < \kappa$ e portanto $\xi^\lambda < \kappa = \xi^+$. Se κ for cardinal limite, $\kappa = \sup\{\mu\colon \mu < \kappa\} \leq \sup\left\{\mu^\lambda\colon \mu < \kappa\right\} \leq \kappa$, portanto, $\kappa = \sup\left\{\mu^\lambda\colon \mu < \kappa\right\}$. Estamos na situação em que ${}^\lambda\kappa = \bigcup\left\{{}^\lambda\alpha\colon \alpha < \kappa\right\}$, pois $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, e portanto $k^\lambda = \left|\bigcup\left\{{}^\lambda\alpha\colon \alpha < \kappa\right\}\right| \leq \sum_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\lambda = \lambda \otimes \sup\left\{|\alpha|^\lambda\colon \alpha < \kappa\right\} = \lambda \otimes \kappa = \kappa$. Logo $\kappa^\lambda = \kappa$. O caso $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ é parecido: ${}^\lambda\kappa = \bigcup\left\{{}^\lambda\alpha\colon \alpha < \kappa\right\}$ (pois toda $f\colon \lambda \to \kappa$ é limitada) e $\kappa = \sup\left\{\mu^\lambda\colon \mu < \kappa\right\}$, portanto, $\kappa^\lambda = \kappa$.

(b). Temos $\kappa = \sup\left\{\mu^\lambda\colon \mu < \kappa\right\}$. Vamos mostrar

$$\kappa^\lambda = \left(\sup\left\{\mu^\lambda\colon \mu < \kappa\right\}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$

Seja $2 \leq \kappa_\alpha \leq \kappa$, para $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, tal que $\sup\{\kappa_\alpha\colon \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \kappa$, i.e. $\kappa = \sum_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\alpha$. Então

$$\kappa^\lambda = \left(\sum_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\alpha\right)^\lambda \leq \left(\prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\alpha\right)^\lambda = \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} {\kappa_\alpha}^\lambda \leq$$
$$\prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \sup\left\{\mu^\lambda\colon \mu < \kappa\right\} = \left(\sup\left\{\mu^\lambda\colon \mu < \kappa\right\}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \left(\kappa^\lambda\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^\lambda,$$

portanto $\kappa^\lambda = (\sup\left\{\mu^\lambda\colon \mu < \kappa\right\})^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. ■

- Se $1 \leq \kappa_\alpha$, para $\alpha < \lambda \geq \omega$, é não-decrescente então $\prod_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha = (\sup\{\kappa_\alpha\colon \alpha < \lambda\})^\lambda$. ■

[8] exercício 5, lista 5.

Dia 21/5/97

SEMINARIO DO MAJOR

Dia 23/5/97

Alguns fatos importantes para os exercícios 5 e 6 do capítulo 1 do Kunen:

(a) As operações, definidas recursivamente nos ordinais, dadas abaixo (para α fixado)

$$\begin{aligned} F_\alpha(\beta) &= \alpha + \beta \\ G_\alpha(\beta) &= \alpha \cdot \beta \\ H_\alpha(\beta) &= \alpha^\beta \end{aligned}$$

são todas contínuas. Para todos α, $\alpha \geq 1$ e $\alpha \geq 2$, respectivamente F_α, G_α e H_α são crescentes. Funções crescentes e contínuas são ditas **normais**.

(b) Resultados de subtração e divisão de ordinais:

$$\forall \alpha, \beta (\alpha \geq \beta \to \exists! \delta (\beta + \delta = \alpha)),$$

$$\forall \alpha, \beta (\alpha \geq \beta > 0 \to \exists! \delta, \xi (\beta \cdot \delta + \xi = \alpha \wedge \xi < \beta)).$$

(c) Para qualquer boa-ordem $\langle A, < \rangle$, se $F \colon A \to A$ é crescente, $\forall x \in A (x \leq F(x))$.

(d) Para qualquer boa-ordem $\langle A, R \rangle$, não existe $F \colon \omega \to A$ tal que $F(n^+) R F(n)$ para todo $n \in \omega$.

(e) **Lema (Logaritmo)**. *Sejam α, β ordinais, $\alpha \neq 0$, $\beta \geq 2$. Então existem únicos ordinais γ, δ, ρ (logaritmo, coeficiente e resto) tais que*

$$\alpha = \beta^\gamma \cdot \delta + \rho, \ 0 < \delta < \beta, \ \rho < \beta^\gamma.$$

Demonstração Como $\beta \geq 2$ a β-exponenciação é normal. Afirmamos que existe <u>o maior ordinal</u> γ tal que $\beta^\gamma \leq \alpha$: note que a classe de ordinais

$$\left\{ \zeta \colon \beta^\zeta \leq \alpha \right\}$$

é, na realidade, um conjunto. Como, por (iii), $\alpha \leq \beta^\alpha$, para todo α temos que

$$\left\{ \zeta \colon \beta^\zeta \leq \alpha \right\} = \left\{ \zeta \leq \alpha \colon \beta^\zeta \leq \alpha \right\}.$$

Mas, $\left\{ \zeta \colon \beta^\zeta \leq \alpha \right\}$ é um conjunto de ordinais claramente transitivo. Então $\left\{ \zeta \colon \beta^\zeta \leq \alpha \right\} = \mu$, um ordinal. Note que $\mu \neq 0$, pois $0 \in \mu$ ($\beta^0 = 1 \leq \alpha$).
<u>μ não é limite</u>: suponha μ limite. Então $\beta^\mu = \sup \left\{ \beta^\zeta \colon \zeta < \mu \right\} \leq \alpha$, donde $\mu \in \mu$, contradição. Portanto, $\mu = \gamma + 1$ e $\gamma = \sup \mu$ é o maior ordinal tal que $\beta^\gamma \leq \alpha$, i.e.,

$$\beta^\gamma \leq \alpha < \beta^{\gamma+1}.$$

Aplicando a divisão a α e β^γ, existem únicos δ e ρ tais que

$$\alpha = \beta^\gamma \cdot \delta + \rho,\ \ \rho < \beta^\gamma.$$

$\underline{0 < \delta < \beta}$: note que, se $\delta = 0$, $\alpha < \beta^\gamma$ contra $\beta^\gamma \leq \alpha < \beta^{\gamma+1}$. Portanto, $0 < \delta$.

Suponha agora que $\beta \leq \delta$. Então, $\beta^{\gamma+1} = \beta^\gamma \cdot \beta \leq \beta^\gamma \cdot \delta \leq \beta^\gamma \cdot \delta + \rho = \alpha$, contra $\beta^\gamma \leq \alpha < \beta^{\gamma+1}$. Portanto, $\delta < \beta$.

$\underline{\text{unicidade de } \gamma, \delta, \rho}$: suponha que $\alpha = \beta^{\gamma'} \cdot \delta' + \rho'$, $0 < \delta' < \beta$, $\rho' < \beta^{\gamma'}$. Se mostrarmos que necessariamente $\gamma = \gamma'$, então o algoritmo da divisão já nos garante que $\delta = \delta'$, $\rho = \rho'$. Basta ver que

$$\begin{aligned}
\beta^{\gamma'} &\leq \beta^{\gamma'} \cdot \delta' \\
&\leq \beta^{\gamma'} \cdot \delta' + \rho' \\
&= \alpha \\
&< \beta^{\gamma'} \cdot \delta' + \beta^{\gamma'} = \beta^{\gamma'} \cdot (\delta' + 1) \\
&\leq \beta^{\gamma'} \cdot \beta \\
&= \beta^{\gamma'+1}.
\end{aligned}$$

Então γ' satisfaz

$$\beta^{\gamma'} \leq \alpha < \beta^{\gamma'+1},$$

i.e., γ' é o maior ordinal satisfazendo $\beta^{\gamma'} \leq \alpha$. Portanto, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$ e $\rho = \rho'$. ■

Ex. 5. *Seja α um ordinal limite. São equivalentes:*

(i) $\forall \beta, \gamma < \alpha (\beta + \gamma < \alpha)$

(ii) $\forall \beta < \alpha (\beta + \alpha = \alpha)$

(iii) $\exists \delta (\alpha = \omega^\delta)$.

Um α satisfazendo estas condições é dito ***indecomponível****.*

Demonstração $(i) \to (ii)$. Seja $\beta < \alpha$. Então existe um único δ tal que $\beta + \delta = \alpha$. De (i) temos $\alpha \leq \delta$. Note agora que $0 \leq \beta$ implica que $\delta \leq \beta + \delta = \alpha$, portanto, $\delta = \alpha$ e $\beta + \alpha = \alpha$.

$(ii) \to (i)$. Imediato. Se $\beta, \gamma < \alpha$ então $\beta + \gamma < \beta + \alpha = \alpha$.

$(i) \to (iii)$. Como $\alpha \neq 0$, $\omega \geq 2$, podemos usar o lema, donde existem únicos ξ, δ e ρ tais que

$$\alpha = \omega^\xi \cdot \delta + \rho,\ \ 0 < \delta < \omega,\ \ \rho < \omega^\xi.$$

Afirmamos que $\rho = 0$. Caso contrário, de $0 < \rho$ vem $\rho < \omega^\xi \leq \omega^\xi \cdot \delta < \omega^\xi \cdot \delta + \rho = \alpha$ e $\rho < \alpha$, $\omega^\xi \cdot \delta < \alpha$ e $\alpha = \omega^\xi \cdot \delta + \rho$ contradizem (i). Portanto, $\rho = 0$. Afirmamos, agora, que $\delta = 1$. Se $1 < \delta$, então $\omega^\xi < \omega^\xi \cdot \delta = \alpha$ e $\omega^\xi \cdot (\delta - 1) < \omega^\xi \cdot \delta = \alpha$ e

$$\underbrace{\omega^\xi \cdot (\delta - 1)}_{<\alpha} + \underbrace{\omega^\xi}_{<\alpha} = \omega^\xi \cdot \delta = \alpha,$$

contradizendo (i), portanto, $\delta = 1$ e $\alpha = \omega^\xi$.

$(iii) \to (i)$. Sejam $\beta, \gamma < \alpha$. Se um deles for 0, não há o que provar. Supondo ambos diferentes de 0 tem-se

$$\beta = \omega^{\delta_1} \cdot n_1 + \xi_1, \ 0 < n_1 < \omega, \ \xi_1 < \omega^{\delta_1}$$
$$\gamma = \omega^{\delta_2} \cdot n_2 + \xi_2, \ 0 < n_2 < \omega, \ \xi_2 < \omega^{\delta_2}.$$

Note também que $\delta_1 < \delta$ (se $\delta \leq \delta_1$, $\alpha = \omega^\delta \leq \omega^{\delta_1} \leq \omega^{\delta_1} \cdot n_1 + \xi_1 = \beta$, contra $\beta < \alpha$) e analogamente para δ_2; assim

$$\delta' = \max\{\delta_1, \delta_2\} < \delta.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\beta + \gamma &= (\omega^{\delta_1} \cdot n_1 + \xi_1) + (\omega^{\delta_2} \cdot n_2 + \xi_2) \\
&\leq (\omega^{\delta_1} \cdot n_1 + \omega^{\delta_1}) + (\omega^{\delta_2} \cdot n_2 + \omega^{\delta_2}) \\
&\leq \omega^{\delta'} \cdot (n_1 + 1 + n_2 + 1) \\
&< \omega^{\delta'} \cdot \omega \\
&= \omega^{\delta'+1} \leq \omega^\delta = \alpha.
\end{aligned}$$

■

Ex. 6 Forma Normal de Cantor (para uma base $\beta \geq 2$ qualquer). *Sejam α, β ordinais, $\alpha \neq 0$, $\beta \geq 2$. Então existem únicos ordinais $1 \leq n < \omega$, $\alpha \geq k_1 > k_2 > \cdots > k_n$ e $0 < \gamma_i < \beta$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) tais que*

$$\alpha = \beta^{k_1} \cdot \gamma_1 + \cdots + \beta^{k_n} \cdot \gamma_n.$$

Demonstração Existência da representação: aplicando a $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 2$ o lema do logaritmo obtemos

$$\alpha = \beta^{k_1} \cdot \gamma_1 + \rho_1, \ 0 < \gamma_1 < \beta \text{ e } \rho_1 < \beta^{k_1};$$

$k_1 \leq \alpha$ pela escolha de k_1 (máximo elemento de $\{\rho \leq \alpha \colon \beta^\rho \leq \alpha\}$). Se $\rho_1 = 0$ então $\alpha = \beta^{k_1} \cdot \gamma_1$ e $n = 1$.

Caso contrário, aplicamos o lema novamente para ρ_1 e temos $\rho_1 = \beta^{k_2} \cdot \gamma_2 + \rho_2$, $0 < \gamma_2 < \beta$ e $\rho_2 < \beta^{k_2} \leq \rho_1 < \beta^{k_1}$. Note que tem-se $\rho_2 < \rho_1$ e $k_2 < k_1$.

Se $\rho_2 = 0$, $\alpha = \beta^{k_1} \cdot \gamma_1 + \beta^{k_2} \cdot \gamma_2$ e $n = 2$. Se $\rho_2 \neq 0$, repita a operação, obtendo $0 < \gamma_3 < \beta$, $\rho_3 < \rho_2 < \rho_1$, etc. Observe que, por (d), *não pode existir uma sequência decrescente e infinita de ordinais*, logo existe $n < \omega$ tal que $\rho_{n+1} = 0$. Assim, existirá $n < \omega$, k_i e γ_i, $i = 1, \ldots, n$, tais que

$$\alpha = \beta^{k_1} \cdot \gamma_1 + \cdots + \beta^{k_n} \cdot \gamma_2.$$

Unicidade da representação: queremos mostrar que, para todo ordinal $\alpha \neq 0$, a representação acima é única.

Suponhamos por absurdo que não; tome então um ordinal $\alpha \neq 0$ que tenha duas representações, digamos

$$\beta^{k_1} \cdot \gamma_1 + \cdots + \beta^{k_n} \cdot \gamma_n, \text{ e}$$
$$\beta^{k_1} \cdot \gamma'_1 + \cdots + \beta^{k_n} \cdot \gamma'_n, \text{ onde}$$
$$\alpha \geq k_1 > k_2 > \cdots > k_n \text{ e } 0 < \gamma_i, \gamma'_i < \beta \ (i = 1, \ldots, n).$$

(admitindo a possibilidade de alguns dos γ_i, γ'_i serem iguais a zero, podemos supor que a sequência dos expoentes é a mesma).

Afirmamos que $\gamma_1 = \gamma'_1$ e que, se $\gamma_i = \gamma'_i$ para $i = 1, \dots, k-1$, $1 \leq k-1 < n$ então $\gamma_k = \gamma'_k$. Suponhamos, s.p.g, que $\gamma_1 < \gamma'_1$. Então

$$\begin{aligned}
\alpha &= \beta^{k_1} \cdot \gamma_1 + \beta^{k_2} \cdot \gamma_2 + \cdots + \beta^{k_{n-1}} \cdot \gamma_{n-1} + \beta^{k_n} \cdot \gamma_n \\
&< \beta^{k_1} \cdot \gamma_1 + \cdots + \beta^{k_n} \cdot \beta \\
&= \beta^{k_1} \cdot \gamma_1 + \cdots + \beta^{k_{n-1}} \cdot \gamma_{n-1} + \beta^{k_n+1} \\
&\leq \beta^{k_1} \cdot \gamma_1 + \cdots + \beta^{k_{n-1}} \cdot \gamma_{n-1} + \beta^{k_{n-1}} \\
&= \beta^{k_1} \cdot \gamma_1 + \cdots + \beta^{k_{n-1}} \cdot (\gamma_{n-1} + 1) \\
&\leq \beta^{k_1} \cdot \gamma_1 + \cdots + \beta^{k_{n-1}} \cdot \beta \\
&\leq \cdots \\
&\leq \beta^{k_1} \cdot (\gamma_1 + 1) \\
&\leq \beta^{k_1} \cdot \gamma'_1 \\
&\leq \beta^{k_1} \cdot \gamma'_1 + \cdots + \beta^{k_n} \cdot \gamma'_n \\
&= \alpha, \text{ contradição.}
\end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo, mostramos que se $\gamma_i = \gamma'_i$ para $i = 1, \dots, k-1$ então $\gamma_k = \gamma'_k$, portanto, a representação é única. ■

No caso em que $\beta = \omega$, $n = 1$, $k_1 = \alpha$ e $\gamma_1 = 1$ (i.e., $\alpha = \omega^\alpha$) dizemos que α é um ε-**número**.

Exercício Mostre que se κ é um cardinal não-enumerável ($\kappa > \omega$), então κ é um ε-número e existem κ ε-números menores que κ; em particular, o primeiro ε-número, chamado ε_0, é enumerável.

Demonstração Usaremos o seguinte fato: Para um ordinal $\alpha \geq \omega$, $|\omega^\alpha| = |\alpha|$ (exponenciação ordinal).

De fato, por indução sobre $\alpha \geq \omega$; se $\alpha = \omega$ é imediato pois $\omega^\omega = \sup\{\omega^n : n < \omega\}$ e reunião enumerável de enumeráveis é enumerável. Agora, seja $\alpha \geq \omega$ tal que $|\omega^\alpha| = |\alpha|$. Vamos provar que $|\omega^{\alpha+1}| = |\alpha + 1|$: temos

$$|\omega^{\alpha+1}| = |\omega^\alpha \cdot \alpha| = |\omega^\alpha| \otimes |\alpha| = |\alpha| \otimes |\alpha| = |\alpha| = |1 + \alpha| = |\alpha + 1|.$$

Se $\alpha > \omega$ é limite e $\forall \omega \leq \beta < \alpha (|\omega^\beta| = |\beta|)$ então $|\omega^\alpha| = |\alpha|$: a desigualdade $\alpha \leq \omega^\alpha$ já nos dá $|\alpha| = |\omega^\alpha|$. Por outro lado,

$$|\omega^\alpha| = \left|\sup\left\{\omega^\xi : \xi < \alpha\right\}\right| = \left|\bigcup\left\{\omega^\xi : \xi < \alpha\right\}\right|$$

e, por hipótese de indução, $|\omega^\xi| = |\xi| \leq |\alpha|$. Logo, pelo lema 10.21 temos $|\omega^\alpha| \leq \alpha$, portanto, $|\omega^\alpha| = |\alpha|$.

Logo, por indução transfinita, $|\omega^\alpha| = |\alpha|$ para todo $\alpha \geq \omega$.

Com isso, mostraremos que, se κ é um cardinal, $\kappa > \omega$, $\omega^\kappa = \kappa$. A desigualdade $\kappa \leq \omega^\kappa$ é imediata (por (c)). Por outro lado, κ é ordinal limite, então

$$\omega^\kappa = \sup\left\{\omega^\xi : \xi < \kappa\right\}.$$

Agora, $\omega \leq \xi < \kappa$ implica que $|\omega^\xi| = |\xi| < \kappa$ donde $\omega^\xi < |\xi|^+ \leq \kappa$. Logo $\omega^\kappa = \bigcup\left\{\omega^\xi \colon \xi < \kappa\right\} \leq \kappa$ e $\omega^\kappa = \kappa$. ■

Portanto, se κ é cardinal não-enumerável temos que $\omega^\kappa = \kappa$.

A hierarquia dos ε-números

Considere $\varepsilon_0 = \sup\left\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\right\}$. Note que ε_0 é enumerável. Temos,

$$\omega^{\varepsilon_0} = \omega^{\sup\left\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\right\}} = \sup\left\{\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\right\} = \varepsilon_0,$$

e ε_0 é um ε-número. Afirmamos que não existem ε-números menores que ε_0.

De fato, se $\omega^\alpha = \alpha$, então $\alpha > 1$ e $\omega < \omega^\alpha = \alpha$, logo $\alpha > \omega$ e $\omega^\omega < \omega^\alpha = \alpha$, logo $\alpha > \omega^\omega$ e ..., donde

$$\varepsilon_0 = \sup\left\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\right\} \leq \alpha.$$

Em geral, dado um ordinal α qualquer, existe um ε-número maior que α. Considere para α fixado a sequência definida recursivamente por

$$\begin{cases} \beta_0^{(\alpha)} = \alpha + 1 \\ \beta_{n+1}^{(\alpha)} = \omega^{\beta_n^{(\alpha)}} \\ \beta_\omega^{(\alpha)} = \sup\left\{\beta_n^{(\alpha)} \colon n < \omega\right\}. \end{cases}$$

Seja $\varepsilon(\alpha) = \beta_\omega^{(\alpha)}$. Afirmamos que

(i) $\varepsilon(\alpha)$ é ε-número,

(ii) $\alpha < \varepsilon(\alpha)$, e $\varepsilon(\alpha)$ é o menor ε-número com essa propriedade.

Demonstração (i).

$$\begin{aligned} \omega^{\varepsilon(\alpha)} &= \omega^{\sup\left\{\beta_n^{(\alpha)} \colon n < \omega\right\}} \\ &= \sup\left\{\omega^{\beta_n^{(\alpha)}} \colon n < \omega\right\} \\ &= \sup\left\{\beta_{n+1}^{(\alpha)} \colon n < \omega\right\} \\ &= \varepsilon(\alpha). \end{aligned}$$

(ii). $\alpha < \alpha + 1 \leq \omega^{\alpha+1} = \omega^{\beta_0^{(\alpha)}} = \beta_1^{(\alpha)} \leq \varepsilon(\alpha)$. Agora, seja $\mu < \omega^\mu$ um ε-número maior que α. Como $\alpha < \mu$ e μ é claramente um ordinal limite,

$$\alpha + 1 < \mu$$

donde $\omega^{\alpha+1} = \beta_0^{(\alpha)} < \omega^\mu = \mu$. Portanto, $\beta_0^{(\alpha)} < \mu$. Agora, $\beta_1^{(\alpha)} = \omega^{\beta_0^{(\alpha)}} < \omega^\mu = \mu$. Portanto, $\beta_1^{(\alpha)} < \mu$. Procedendo indutivamente, temos $\beta_n^{(\alpha)} < \mu$ para todo $n < \omega$, donde

$$\varepsilon(\alpha) = \beta_\omega^{(\alpha)} = \sup\left\{\beta_n^{(\alpha)} \colon n < \omega\right\} \leq \mu.$$

$\blacksquare$

Vamos agora definir uma operação $h\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ recursivamente pondo

$$\begin{cases} h(0) = \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \\ h(\alpha+1) = \varepsilon(h(\alpha)) \\ h(\alpha) = \sup\{h(\beta)\colon \beta < \alpha\}, \text{ para } \alpha \text{ limite.} \end{cases}$$

Note que h é crescente e contínua. Afirmamos que $h(\alpha) = \varepsilon_\alpha = \alpha$-ésimo ε-número. A prova é por indução em α.

Se $\alpha = 0$; $h(0) = \varepsilon_0$, que sabemos ser o primeiro ε-número.

Se α é sucessor; $\alpha = \beta + 1$ e β é tal que $h(\beta)$ é o β-ésimo ε-número maior que $h(\beta)$. Portanto, $h(\alpha)$ é o $(\beta+1)$-ésimo ε-número.

Se α é limite; seja α tal que $\forall \beta < \alpha(h(\beta) = \varepsilon_\beta = \beta$-ésimo ε-número). Mostraremos que $h(\alpha)$ é ε-número e que é o menor ε-número maior que todos os $h(\beta)$ para $\beta < \alpha$. Que $h(\alpha)$ é ε-número:

$$\begin{aligned} \omega^{h(\alpha)} &= \omega^{\sup\{h(\beta)\colon \beta<\alpha\}} \\ &= \sup\left\{\omega^{h(\beta)}\colon \beta < \alpha\right\} \\ &= \sup\{h(\beta)\colon \beta < \alpha\} \text{ (por hipótese de indução)} \\ &= h(\alpha). \end{aligned}$$

Seja agora ξ um ε-número tal que $h(\beta) < \xi$ para todo $\beta < \alpha$. Então

$$h(\alpha) = \bigcup\{h(\beta)\colon \beta < \alpha\} \leq \xi.$$

Logo todos os ε-números são dados pela operação h. (É claro que com técnicas análogas pode-se mostrar que, dado um ε-número ξ, $\xi = h(\alpha)$ para algum ordinal α.)

Observação h é o isomorfismo entre a classe (bem-ordenada) dos ε-números e a classe $\mathbf{ON}$.

Afirmamos agora que se κ é um cardinal maior que ω, $H(\kappa) = \kappa$, o que justifica a existência de κ ε-números menores que κ.

Fato: Se $\alpha \geq \omega$, $|h(\alpha)| = \alpha$ (α ordinal).

Demonstração Por indução em $\alpha \geq \omega$. Usamos fortemente que $|\omega^\alpha| = |\alpha|$ (exponenciação ordinal) para $\alpha \geq \omega$.
$\underline{\alpha = \omega}$. $h(\omega) = \sup\{h(n)\colon n < \omega\}$. Note que $h(0) = \varepsilon_0$, claramente enumerável. Portanto, $|h(0)| = \omega$.

Se $m < \omega$, $h(m+1) = \varepsilon(h(m)) = \beta_\omega^{(h(m))}$, onde

$$\begin{cases} \beta_0^{(h(m))} = h(m) + 1 \\ \beta_{n+1}^{(h(m))} = \omega^{\beta_n^{(h(m))}} \\ \beta_\omega^{(h(m))} = \sup\left\{\beta_n^{(h(m))}\colon n < \omega\right\}. \end{cases}$$

Note que $|\beta_0^{(h(m))}| = |h(m)+1| = |h(m)|$ e $|\beta_1^{(h(m))}| = |\omega^{\beta_0^{(h(m))}}| = |\beta_1^{(h(m))}| = |h(m)|$, e, por indução finita, claramente $|\beta_n^{(h(m))}| = |h(m)|$ para todo $n \in \omega$; disso vem, pelo lema 10.21,

$$|h(m+1)| = \left|\beta_\omega^{(h(m))}\right| = \left|\sup\left\{\beta_n^{(h(m))}\colon n < \omega\right\}\right| \leq \omega,$$

já que $|h(0)| = \omega$ implica que

$$|h(1)| = \left|\sup\left\{\beta_n^{(h(0))} : n < \omega\right\}\right| \leq \omega \text{ e } |h(2)| = \left|\sup\left\{\beta_n^{(h(1))} : n < \omega\right\}\right| \leq \omega$$

e por indução finita também $|h(m)| \leq \omega$, para todo $n < \omega$.

Segue agora que $|h(\omega)| = |\sup\{h(n) : n < \omega\}| \leq \omega$. Como $\omega \leq h(\omega)$ (da normalidade de h) temos que $|h(\omega)| = |\omega|$.

$\underline{\alpha > \omega \text{ e } \alpha \text{ sucessor}}$. Seja $\alpha = \gamma + 1$ e suponha $|h(\gamma)| = |\gamma|$. Então $\omega \leq \gamma$, $|\gamma| \leq |\alpha|$ e $h(\alpha) = h(\gamma + 1) = \varepsilon(h(\gamma)) = \beta_\omega^{(h(\gamma))}$, onde

$$\begin{cases} \beta_0^{(h(\gamma))} = h(\gamma) + 1 \\ \beta_{n+1}^{(h(\gamma))} = \omega^{\beta_n^{(h(\gamma))}} \\ \beta_\omega^{(h(\gamma))} = \sup\left\{\beta_n^{(h(\gamma))} : n < \omega\right\}. \end{cases}$$

Note que, por indução finita,

$$|\beta_n^{(h(\gamma))}| = |\gamma|, \quad \forall n \in \omega.$$

Segue que

$$|h(\alpha)| = |\beta_\omega^{(h(\alpha))}| = \left|\bigcup\left\{\beta_n^{(h(\gamma))} : n < \omega\right\}\right| \leq |\gamma| \leq |\alpha|.$$

$\underline{\alpha > \omega \text{ e } \alpha \text{ limite}}$. Seja α limite e tal que $\forall \beta < \alpha (|h(\beta)| = |\beta| \leq |\alpha|)$. Segue imediatamente que $|h(\alpha)| = |\sup\{h(\beta) : \beta < \alpha\}| \leq |\alpha|$, $\alpha \leq h(\alpha)$ sempre, então $|h(\alpha)| = |\alpha|$. ■

Já podemos mostrar que $h(\kappa) = \kappa$ se κ é cardinal maior que ω. É imediato que $\kappa \leq h(\kappa)$.

Como κ é cardinal infinito ele é ordinal limite; segue que

$$k(\kappa) = \sup\{h(\xi) : \xi < \kappa\}.$$

Se $\omega \leq \xi < \kappa$, de $h(\xi) = \xi$ vem que $h(\xi) < |\xi|^+ \leq \kappa$. Logo $h(\kappa) = \sup\{h(\xi) : \xi < \kappa\} \leq \kappa$, portanto, $h(\kappa) = \kappa$, se κ é cardinal não-enumerável; assim, se $\kappa > \omega$, κ cardinal, κ é o κ-ésimo ε-número, existindo κ ε-números menores que ele.

Dia 28/5/97

Lista para seminários—(Ref.: cap. 2 do Kunen)

(§1)

(i) Teoremas 1.2 e 1.3 sobre *almost-disjoint families.*

(ii) Teoremas 1.5 e 1.6 sobre *quasi-disjoint families* (o Lema dos Δ-sistemas).

(iii) Uma aplicação dos Δ-sistemas à Topologia, a partir da definição 1.7 até o Teorema 1.9: *Se paa todo $\tau \subseteq I$ finito, $\prod_{i \in \tau} X_i$ é c.c.c., então $\prod_{i \in I} X_i$ é c.c.c..*

(§2)

(i) Exemplos 5 e 6 e o Lema 2.6, págs. 54—55 (MA(ω) é verdadeiro, MA(2^ω) é falso).

(ii) Teorema 2.20 (subconuntos de primeira categoria de $\mathbb{R}$).

(iii) Teorema 2.21 (subconjuntos de medida nula de $\mathbb{R}$).

(iv) Teorema 2.22 (generalização de Baire) e o exercício 11: ${}^\omega(\omega_1+1)$ *é um compacto* T_2 *que é a união de* ω_1 *fechados no-where-dense.*

(v) Lema 2.23 e o Teorema 2.24 (MA(ω_1) implica que produto de c.c.c. é c.c.c.).

(§4)

(i) Exercício 28 (os argumentos de ida-e-volta de Cantor).

(ii) Exercício 29 (caracterização da reta como ordem conexa, separável, sem primeiro nem último elementos).

(§5) Árvores

(i) Fazer um "survey" sobre κ-árvores de Souslin e κ-árvores de Aronszajn (demostrar só o Lema 5.7).

(§6) O filtro c.u.b

(i) Lema 6.13 e o exercício: *Se* $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, *e* $f\colon \kappa \to \kappa$ *é crescente e contínua entào o conjunto dos pontos fixos é c.u.b.*

(ii) Exercício 42: *Se, para* ω_1 *com a topologia da ordem,* $f\colon \omega_1 \to \mathbb{R}$ *é contínua então* $(\exists \alpha < \omega_1)(\forall \beta < \omega_1)(\alpha \leq \beta \to f(\alpha) = f(\beta))$.

Kunen, cap. 1, exer. 16$^{(CH)}$: $(\omega_n)^\omega = \omega_n$ *para todo* $1 \leq n < \omega$.

Por indução em n. Ponha $T = \{n \in \omega\colon (\omega_n)^\omega = \omega_n\}$.

$\underline{1 \in T}$: $(\omega_1)^\omega \overset{\text{CH}}{=} (2^\omega)^\omega \overset{10.27}{=} 2^{\omega\otimes\omega} \overset{10.12}{=} 2^\omega = \omega_1$.

Se $n \in T$, $(\omega_{n+1})^\omega \overset{?}{=} (\omega_n)^\omega \otimes \omega_{n+1} = \omega_n \otimes \omega_{n+1} \overset{10.13}{=} \omega_{n+1}$. portanto, pelo PIF, $T = \omega$. ■

<u>Fórmula de Hausdorff</u>: Sejam κ, λ cardinais infinitos, então $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \otimes \kappa^+$ (e, portanto, $(\omega_{n+1})^\omega = (\omega_n)^\omega \otimes \omega_{n+1}$).

Suponhamos $\kappa^+ \leq \lambda$. Pelo Teorema da computação indutiva $(\kappa^+)^\lambda = 2^\lambda$. Como $\kappa < \kappa^+ \leq \lambda$ temos $\kappa^\lambda = 2^\lambda$. Ainda, $\kappa^+ \leq \lambda < 2^\lambda$, então $\kappa^\lambda = 2^\lambda = \max(\kappa^\lambda, \kappa^+)$ e $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \otimes \kappa^+$.

Seja $\lambda < \kappa^+$, então $\kappa^\lambda \leq (\kappa^+)^\lambda$ e $\kappa^+ \leq (\kappa^+)^\lambda$, logo basta mostrar que $(\kappa^+)^\lambda \leq \kappa^\lambda \otimes \kappa^+$: Como κ^+ é regular , $\mathrm{cf}(\kappa^+) = \kappa^+$. De $\lambda < \kappa^+$ temos que cada função $f\colon \lambda \to \kappa^+$ é limitada, ie, existe $\sigma < \kappa^+$ tal qye $\xi < \lambda(f(\xi) < \sigma)$. Logo, ${}^\lambda\kappa^+ = \bigcup_{\gamma<\kappa^+} {}^\lambda\gamma$ e

$$\left|\bigcup_{\gamma<\kappa^+} {}^\lambda\gamma\right| \leq \sum_{\gamma<\kappa^+} \left|{}^\lambda\gamma\right|$$

e como para qyalquer $\gamma < \kappa^+$, $|\gamma| \leq \kappa$

$$(\kappa^+)^\lambda \leq \sum_{\gamma<\kappa^+} \left|{}^\lambda\gamma\right| \leq \sum_{\gamma<\kappa^+} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^+.$$

Portanto, $(\kappa^+)^\lambda \leq \kappa^\lambda \otimes \kappa^+$. ■

Exer. 1, lista 4, (iv) e (v):

73. Teorema (Compacidade). *Seja Σ um conjunto de sentenças de uma linguagem $\mathcal{L}$. Então Σ tem modelo sse $(\forall \Sigma' \subseteq \Sigma finito)\Sigma'$ tem modelo.*

O Teorema da compacidade sai como corolário do Teorema de Completude de GÖdel: Σ *tem modelo sse* Σ *é consistente.* De fato, Σ' tem modelo implica que Σ' é consistente que iimplica que Σ é consistente pois as provas são finitas.

(iv). Por indução em $n = |A|$. Para $A = \emptyset$ nada a fazer. Suponha, como hipótese, que para todo A de cardinalidade n e para todo R ordem parcial em A existe R^* ordem total tal que $R \subseteq R^*$. Seja A de cardinalidade $n+1$ e R uma ordem parcial sobre A. Tome $a \in A$ e ponha $A' = A \setminus \{a\}$. Então $|A'| = n$ e R é uma ordem parcial sobre A', logo existe R_0^* ordem total sobre A' tal que $R \subseteq R_0^*$.

Ponha $\{\mathcal{C}_1 = \{x \in A \colon x \neq a \wedge (x,a) \notin R_0^* \wedge (a,x) \notin R_0^*\}$. E tome a ordem

$$R_1^* = R_0^* \sqcup \{(a,a_1)\} \cup \{(a,y) \colon (a,y) \in R_0^*\} \cup \{(x,a_1) \colon (x,a) \in R_0^*\} \cup \{(x,y) \colon (x,a_1) \in R_0^* \wedge (a_1,y) \in R_0^*\}.$$

Por (i) R_1^* é ordem. Como A é finito "o processo pára", é fácil ver que R_k^* é ordem total sobre A. ■

(v). Sejam A um conjunto e R uma ordemparcial sobre A quiasquer. Fixe A linguagem $\mathcal{L} = \{<\} \cup \{\underline{a} \colon a \in A\}$. Ponha

$$\Sigma = \{\underline{a} < \underline{b} \colon (a,b) \in R\} \cup \{\forall x(\neg(x < x))\} \cup \{\forall x \forall y \forall z(x < y \wedge y < z \to x < z)\} \cup \{\forall x \forall y(x < y \vee x + y \vee x$$

Seja $\Sigma' \subseteq \Sigma$ finito e seja $I' = \{\underline{a} < \underline{b} \colon (a,b) \in R\} \cap \Sigma'$. Tome R' dada por

$$(a,b) \in R' \Leftrightarrow \underline{a} < \underline{b} \in I'.$$

Tome $A' = \operatorname{corpo} R'$, então A' é finito. Como R é ordem parcial sobre A' e A' é finito, por (iv) existe R^* ordem total sobre A' tal que $R \subseteq R^*$. Interprete $<$ por R^*. Então $\langle A', R^*, \{a \colon a \in A\}\rangle \models \Sigma'$.

Pelo Teorema da Compacidade existe $\mathcal{M} = \langle M, <^M, \{a^M \colon a \in A\}\rangle$. Defina, para todos $a, b \in A$, R^* por

$$(a,b) \in R^* \Leftrightarrow \underline{a}^M <^M \underline{b}^M.$$

<u>Afir</u>: R^* é ordem total sobre A tal que $R \subseteq R^*$

1) $R \subseteq R^*$. Seja $(a,b) \in R \overset{\text{def. }\Sigma}{\Longleftrightarrow} (\underline{a} < \underline{b}) \in \Sigma$. Mas $\mathcal{M}$ é modelo de Σ, portanto,

$$\mathcal{M} \models \underline{a} < \underline{b} \overset{\text{def. VERD.}}{\Longleftrightarrow} \underline{a}^M <^M \underline{b}^M \overset{\text{def. }R^*}{\Longleftrightarrow} (a,b) \in R^*.$$

2) R^* é irreflexiva, i.e. $\forall a \in A((a,a) \notin R^*)$. Suponha $(a,a) \in R^*$. Então, pela definição de R^*,

$$\underline{a}^M <^M \underline{a}^M \overset{\text{def.VERD.}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{M} \models \forall x(\neg(x < x)).$$

3) R^* é transitivo. Suponha que $(a,b) \in R^*$ e $(b,c) \in R^*$. Portanto, segue de $(a,b) \in R^* \Leftrightarrow \underline{a}^M <^M \underline{b}^M$ e $(b,c) \in R^* \Leftrightarrow \underline{b}^M <^M \underline{c}^M$.

Dia 4/6/97

74. Definição. *Seja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$, ($\kappa \geq \omega$ cardinal). Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma família* ***almost disjoint*** *(a.d.) se $\forall x \in \mathcal{F}(|x| = \kappa)$ e $\forall x, y \in \mathcal{F}(x \neq y \to |x \cap y| < \kappa)$.*

75. Teorema (1.2). *Seja $\kappa \geq \omega$ regular.*

(i) Se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ é a.d. e $|\mathcal{F}| \leq \kappa$, então $\mathcal{F}$ nã è maximal entre as famílias a.d..

(ii) Existe uma família a.d. $\mathcal{B}$ contida em $\mathcal{P}(\kappa)$ maximal com $|\mathcal{B}| \geq \kappa^+$.

Exemplo Em ω podemos construir famílias a.d. de cardinalidade 2^ω:

$$\begin{aligned}
&t' = 0, a_1' a_2' a_3' \dots \\
&t = 0, a_1 a_2 a_3 \dots \\
&A_t = \{a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, \dots\} \\
&\mathcal{F} = \{A_t \colon t \in (0,1)\} \\
&|\mathcal{F}| = 2^\omega.
\end{aligned}$$

76. Teorema (1.3). *Se $\kappa \geq \omega$ e $2^{<\kappa} = \kappa$ então existe uma família a.d. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ com $|\mathcal{F}| = 2^\kappa$.*

77. Definição. *$\mathcal{F}$ se diz um* ***Δ-sistema*** *se existe r – chamado* ***raiz do sistema*** *– tal que $\forall x, y \in \mathcal{F}(x \neq y \to x \cap y = r)$.*

78. Lema (Lema dos Δ-sistemas – Šanin). *Se $\kappa > \omega$ é regular e $|\mathcal{F}| = \kappa$ e $\forall x \in \mathcal{F}(|x| < \omega)$, então existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, $|\mathcal{B}| = \kappa$, $\mathcal{B}$ Δ-sistema.*

Exercício [Exercício 2 do capítulo 2 do Kunen] Ache uma família de cardinalidade ω_ω tal que todo elemento é finito e nenhuma subfamília de cardinalidade ω_ω forma um Δ-sistema.

Tome $\bigcup_{i<\omega} \{\{i, i \cdot \alpha\} : 1 < \alpha < \omega_{i-2}\}$.

79. Teorema (1.6). *Sejam $\kappa \geq \omega$ e $\theta > \kappa$ regular tal que $\forall \alpha < \theta(|^{<\kappa}\alpha| < \theta)$. Se $\mathcal{F}$ é tal que $|\mathcal{F}| \geq \theta$ e $\forall x \in \mathcal{F}(|x| < \kappa)$ então existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ com $|\mathcal{B}| = \theta$ e $\mathcal{B}$ é um Δ-sistema.*

O Axioma de Martin

80. Definição. *Uma* ***ordem parcial*** *é um par $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ com $\mathbb{P}$ não-vazio e $\leq$ uma relação reflexiva e transitiva. Se $\leq$ for também antissimétrica dizemos que $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ é uma* ***ordem parcial propriamente dita****.*

Costuma-se dizer que p ***estende*** *q no caso em que $p, q \in \mathbb{P}$ e $p \leq q$ e os elementos de $\mathbb{P}$ chamam-se* ***condições****.*

Dizemos que $C \subseteq \mathbb{P}$ é uam ***cadeia*** *em $\mathbb{P}$ se $\forall p, q \in \mathbb{P}(p \leq q \vee q \leq p)$.*

Dizemos que $p, q \in \mathbb{P}$ são ***compatíveis*** *se $\exists r \in \mathbb{P}(r \leq p \wedge r \leq q)$. Caso contrario são* ***incompatíveis*** *e denotamos isso por $p \perp q$. $A \subseteq \mathbb{P}$ se diz uma* ***anticadeia*** *em $\mathbb{P}$ se $\forall p, q \in A(p \neq q \to p \perp q)$.*

Dizemos que $\mathbb{P}$ é ***c.c.c.*** *se toda anticadeia de $\mathbb{P}$ for enumerável.*

$D \subseteq \mathbb{P}$ se diz ***denso*** *em $\mathbb{P}$ se $(\forall p \in \mathbb{P})(\exists q \in D) q \leq p$.*

$G \subseteq \mathbb{P}$ se diz um ***filtro*** *em $\mathbb{P}$ se*

(i) $(\forall p, q \in G)(\exists r \in G)(r \leq p \wedge r \leq q)$.

(ii) $(\forall p \in G)(\forall q \in \mathbb{P})(p \leq q \to q \in G)$.

Seja $\kappa \geq \omega$ um cardinal. $\mathrm{MA}(\kappa)$ é a afirmação:
Seja $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ uma ordem parcial não-vazia e c.c.c., e seja $\mathcal{D}$ uma família de no máximo κ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Então existe $G \subseteq \mathbb{P}$ filtro tal que $(\forall D \in \mathcal{D}) G \cap D \neq 0$.

81. Lema. *(i) Se $\kappa < \kappa'$, então $\mathrm{MA}(\kappa') \Rightarrow \mathrm{MA}(\kappa)$.*

(ii) $\mathrm{MA}(\omega)$ é verdadeiro.

(iii) $MA2^\omega$ é falso.

Notação MA é $\forall \kappa(\omega \leq \kappa < 2^\omega \to \mathrm{MA}(\kappa))$.

Kunen, cap. 2, exer. 27: Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$. Vamos definir uma ordem parcial $\langle \mathbb{P}_\mathcal{A}, \leq \rangle$ por:

$$\{\langle s, F \rangle : s \subseteq \omega,\ |s| < \omega,\ F \subseteq \mathcal{A},\ |F| < \omega\} = [\omega]^{<\omega} \times [\mathcal{A}]^{<\omega}.$$

Se $p = \langle s, F \rangle$ e $p' = \langle s', F' \rangle$ então

$$p' \leq p \overset{\text{DEF.}}{\iff} s \subseteq s',\ F \subseteq F' \text{ e } (\forall x \in F)(x \cap s' \subseteq s),$$

i.e. $(\bigcup F) \cap s' \subseteq s$.

$p, p' \in \mathbb{P}_\mathcal{A}$ são compatíveis sse $(\forall x \in F)(x \cap s' \subseteq s)$ e $(\forall x \in F)(x \cap s' \subseteq s)$ e neste caso $p'' = \langle s \cup s', F \cup F' \rangle$ estende ambos: Se $r = \langle s^*, F^* \rangle$ estende a ambos então $s \cup s' \subseteq s^*$ e $F \cup F' \subseteq F^*$ e portanto $\forall x \in F(x \cap s^* \subseteq s)$, em particular, $\forall x \in F(x \cap s' \subseteq s)$. Para provar $\Leftarrow$ verifique que p' estende p, p'.

Oberve que se $s = s'$, então p e p' sempre são compatíveis e portanto se $p \perp p'$ então $s \neq s'$.

Seja $A \subseteq \mathbb{P}_\mathcal{A}$ uma anticadeia. Então $S_A = \{s \colon \exists F \langle s, F \rangle \in A\} \approx A$, pois se $(p_1 = \langle s_1, F_1 \rangle ep_2 = \langle s_2, F_2 \rangle) \in A$ e $p_1 \neq p_2$ então $s_1 \neq s_2$.

Os $s \in [\omega]^{<\omega}$ e $|[\omega]^{<\omega} = \omega$, portanto, $S_A \subseteq [\omega]^\omega$ também satisfaz $|S_A| \leq \omega$ e portanto $|A| \leq \omega$, i.e. $\mathbb{P}_\mathcal{A}$ é c.c.c.

Notação Seja $G \subseteq \mathbb{P}_\mathcal{A}$ um filtro em $\mathbb{P}_\mathcal{A}$. Vamos denotar por $f_G = \{s \colon \exists F(\langle s, F \rangle \in G)\}$.

82. Lema. *Se $p = \langle S, F \rangle \in G$, então $(\forall x \in F)(x \cap d_G \subseteq s)$.*

Demonstração Se $n \in x \cap d_G$ então $n \in x$ e $n \in s'$ para algum $p' = \langle s', F' \rangle \in G$. Como p e p' são compatíveis $x \cap s' \subseteq s$ e portanto $n \in x \cap s'$, $n \in s$. ■

83. Definição. *Seja $x \in \mathcal{A}$. Vamos denotar por*

$$D_x = \{p \in \mathbb{P}_\mathcal{A} \colon p = \langle S, F \rangle \text{ com } x \in F\}.$$

84. Lema. *$(\forall x \in \mathcal{A})$ D_x é denso em $\mathbb{P}_\mathcal{A}$.*

Demonstração Seja $p = \langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$. Então, $q = \langle s, F \cup \{x\}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, $q \leq p$ e $q \in D_x$. ■

85. Lema. *Seja $G \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ filtro e $x \in \mathcal{A}$. Se $G \cap D_x \neq 0$ então $|x \cap d_G| < \omega$.*

Demonstração Seja $p = \langle S, F\rangle \in G \cap D_x$. Temos $x \in F$ (pois $p \in D_x$) e $x \cap d_G \subseteq s$ (pois G é filtro), portanto, $|x \cap d_G| \leq |s| < \omega$. ■

86. Teorema (2.15). *Assuma* MA(κ). *Seja $\mathcal{A}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ tais que $|A| = \kappa$, $|\mathcal{C}| = \kappa$ e $(\forall y \in \mathcal{C})(\forall F \in [A]^{<\omega})|y \setminus \bigcup F| = \omega$. Então existe $d \subseteq \omega$ tal que $(\forall x \in A)(|c \cap x| < \omega)$ e $(\forall y \in \mathcal{C})|d \cap y| = \omega$.*

Para $y \in \mathcal{C}$, $n \in \omega$, seja

$$E_n^y = \{p = \langle S, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} \colon y \cap s \not\subseteq x\}\,.$$

$(\forall y \in \mathcal{C})(\forall n \in \omega) E_n^y$ 'e denso em $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$:
Seja $p = \langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$. Como $|s| < \omega$ e $|y \setminus \bigcup F| = \omega$, então existe $m \geq n$ tal que $m \in y \setminus \bigcup F$. Seja $q = \langle s \cup \{m\}, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$

- $q \leq p$.

  $x \in F \Rightarrow m \notin x$ (senão $m \in \bigcup F$).

- $q \in E_n^y$, pois $m \in (s \cup \{m\}) \cap y$ e $m \notin n$, portanto, $(s \cup \{m\}) \cap y \not\subseteq n$.

$\mathcal{D} = \{D_x \colon x \in \mathcal{A}\} \cup \{E_n^y \colon y \in \mathcal{C},\ n \in \omega\}$. Assim, $|\mathcal{D}| = \kappa$; logo, por MA(κ), existe um filtro $G \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ tal que $G \cap D \neq 0$ para todo $D \in \mathcal{D}$.

De $G \cap D_x \neq 0$, segue que $|d_G \cap x| < \omega$, portanto, $(\forall x \in \mathcal{A})|d_x \cap x| < \omega$.

De $G \cap E_n^y \neq 0$, segue que $s \cap y \not\subseteq n$ para algum $p = \langle s, F\rangle \in G$ e portanto $|d_G \cap y| = \omega$.
■

87. Corolário. MA(κ) $\Rightarrow$ *se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ é uma família a.d. com $|\mathcal{A}| = \kappa$, então $\mathcal{A}$ é maximal.*

Demonstração Seja $\mathcal{C} = \omega$. Vamos verificar que $|\omega \setminus \bigcup F| = \omega$ para todo $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$.
Seja $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathcal{A}$ e seja $x^* \in \mathcal{A} \setminus F$.

- $|x^* \cap x_i| < \omega$, $i = 1, \ldots, n$.
- $|x^* \cap (\bigcup F)| < \omega$.

$x^* = (x^* \setminus \bigcup F) \cup (x^* \cap \bigcup F)$; $|x^*| = \omega$, $|x^* \cap \bigcup F| < \omega$ portanto $|x^* \setminus \bigcup F| = \omega$.

$x^* \setminus \bigcup F \subseteq \omega \setminus \bigcup F$ portanto $|\omega \setminus \bigcup F| = \omega$ e podemos aplicar o teorema para obter $d \subseteq \omega$ tal que $|d| = \omega$ e $(\forall x \in \mathcal{A})|d \cap x| < \omega$. ■

Dia 6/6/97

Relembrando
MA(κ): Se $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ é uma oredem parcial c.c.c. e $\mathcal{D}$ é uma família de $\leq \kappa$ densos de $\mathbb{P}$, então existe filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ tal que $G \cap D \neq 0$ para todo $D \in \mathcal{D}$.
MA: $\forall \kappa (\omega \leq \kappa < w^\omega \to \mathrm{MA}(\kappa))$.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega) \mapsto \mathbb{P}_\mathcal{A}$.

88. Teorema (2.15). MA(κ) $\Rightarrow$ *sejam* $\mathcal{A}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ *com* $|\mathcal{A}|, |\mathcal{C}| \leq \kappa$ *e tais que* $(\forall y \in \mathcal{C})(\forall F \in [\mathcal{A}]^{<\omega})|y \setminus \bigcup F| = \omega$. *Então existe* $d \subseteq \omega$ *tal que* $(\forall x \in \mathcal{A})|d \cap x| < \omega$ *e* $(\forall y \in \mathcal{C})|d \cap y| = \omega$.

A partir disto, dada $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ a.d. com $|\mathcal{A}| = \kappa$, se $x_1, \ldots, x_n, y \in \mathcal{A}$ e $y \neq x_1, \ldots, x_n$ então $|y \setminus (x_1 \cup \cdots \cup x_n)| = \omega$ e portanto pode-se aplica 2.15 com $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C} = \omega$, para obter $d \subseteq \omega$ tal que $|d| = \omega$ e $(\forall x \in \mathcal{A})|d \cap x| \leq \omega$; o que mostra que $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \cup \{d\}$. é uma família a.d. que estende $\mathcal{A}$.

89. Lema (2.17). *Seja* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ *uma família a.d. com* $|\mathcal{B}| = \kappa$ *e seja* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. MA($\kappa$) $\Rightarrow$ *existe* $d \subseteq \omega$ *tal que* $(\forall x \in \mathcal{A})|d \cap x| < \omega$ *e* $(\forall y \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A})|d \cap y| = \omega$.

Demonstração Aplique 2.15 com $\mathcal{C} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$. Seja $y \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ e $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathcal{A}$. Então $y \neq x_1, \ldots, x_n$ e já vimos que $|y \setminus (x_1 \cup \cdots \cup x_n)| = \omega$ i.e. $|y \setminus \bigcup F| = \omega$. ■

90. Corolário. MA(κ) $\Rightarrow 2^\omega = 2^\kappa$ *(para* $\omega \leq \kappa < 2^\omega$*).*

Demonstração Sabemos que existe alguma $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ a.d. com $|\mathcal{F}| = 2^\omega$ e podemos escolher $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ com $|\mathcal{B}| = \kappa$ (é claro que $\mathcal{B}$ também é a.d.).

Seja $\varphi \colon \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(\mathcal{B})$ definido por $\varphi(d) = \{x \in \mathcal{B} \colon |d \cap x| < \omega\} \subseteq \mathcal{B}$.

Dado $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$, por 2.17, seja $d \subseteq \omega$ tal que $|d \cap x| < \omega$ para $x \in \mathcal{A}$ e $|d \cap x| = \omega$ para $x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$.

Então $\varphi(d) = \mathcal{A}$, portanto, $\in \varphi = \mathcal{P}(\mathcal{B})$ i.e. φ é sobre $\mathcal{B}$. Logo $|\mathcal{P}(\omega)| \geq |\mathcal{P}(\mathcal{B})|$ i.e. $2^\omega \geq 2^\kappa \geq 2^\omega$ portanto $2^\kappa = 2^\omega$. ■

91. Corolário. MA $\Rightarrow 2^\omega$ *é regular.*

Demonstração Seja $\kappa < 2^\omega$, então por MA, $2^\kappa = 2^\omega$ e, por König, $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$. Logo $\mathrm{cf}(2^\omega) = 2^\omega$.

§3. São equivalentes

(i) MA(κ).

(ii) MA(κ) "restrito" a ordem parciais com cardinalidade $\leq \kappa$.

(iii) MA(κ) "restrito" a ordem parciais que vieram de álgebras de Boole.

(iv) Intersecção de κ abertos densos num compacto Hausdorff c.c.c. é não-vazia.

MA(ω_1) $\rightarrow$ produto qualquer de espaços topológicos c.c.c. é c.c.c..

§4. O Problema de Souslin.

92. Definição. *Uma **reta de Souslin** é uma ordem total $\langle X, <\rangle$ que é c.c.c.ña topologia da ordem (i.e. qualquer família de abertos 2-a-2 disjuntos é enumerável), mas não é separável (i.e. não contém denso enumerável).*

A **hipótese de Souslin** (SH) é a afirmação: *Não existe reta de Souslun.*
Sabe-se:

- MA + $\neg$CH $\Rightarrow$ SH.
- Jensen provou que SH é consistente com ZF + GCH e que $\diamond \Rightarrow \neg$SH, onde $\diamond$ é consistente com ZF + GCH.
- SH é idependente de ZFC + GCH.

93. Lema (4.3). *Se X é uma reta de Souslin então $X \times X$ nào é c.c.c..*

Demonstração Vamos construir por recursão transfinita sobre $\alpha < \omega_1$, $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in X$ tais que $\forall \alpha < \omega_1$

(i) $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$.

(ii) $]a_\alpha, b_\alpha[\neq 0$ e $]b_\alpha, c_\alpha[\neq 0$.

(iii) $]a_\alpha, c_\alpha[\cap \{b_\xi \colon \xi < \alpha\} = 0$.

Seja $W = \{x \in X \colon x$ é ponto isolado$\}$. Se $x \in W$, $\{x\}$ é aberto e $\{\{x\} : x \in W\}$ seria família de abertos 2-a-2 disjuntos, potanto $|W| \leq \omega$.

Seja $\alpha < \omega_1$ e suponhamos $a_\beta, b_\beta, c_\beta$ obtidos para todo $\beta < \alpha$; $\alpha < \omega_1$ então $|\alpha| \leq \omega$ portanto $|\{b_\xi \colon \xi < \alpha\}| \leq \omega$ portanto $|W \cup \{b_\xi \colon \xi < \alpha\}| \leq \omega$ logo $W \cup \{b_\xi \colon \xi < \alpha\}$ não é denso em X i.e. $\overline{W \cup \{b_\xi \colon \xi < \alpha\}} \neq 0$. Como $Z = X \backslash \overline{W \cup \{b_\xi \colon \xi < \alpha\}}$ é aberto não-vazio, existe algum intervalo, $\neq 0$, $]a_\alpha, c_\alpha[\subseteq Z$.

Seja $x \in]a_\alpha, c_\alpha[$, então x não é isolado e portanto $]a_\alpha, c_\alpha[$ é infinito; e podemos escolher $b_\alpha \in]a_\alpha, c_\alpha[$ tal que $]a_\alpha, b_\alpha[\neq 0$ e $]b_\alpha, c_\alpha[\neq 0$.

Sejam agora, para cada $\alpha < \omega_1$, $U_\alpha =]a_\alpha, b_\alpha[\times]b_\alpha, c_\alpha[$ aberto não-vazio de $X \times X$.

Seja $\xi < \alpha$, então $b_\xi \leq a_\alpha$ ou $c_\alpha \leq b_\xi$. No primeiro caso: $]a_\xi, b_\xi[\cap]a_\alpha, b_\alpha[= 0$. Consequentemente $U_\xi \cap U_\alpha = 0$. No segundo caso: $]b_\alpha, c_\alpha[\cap]b_\xi, c_\xi[= 0$ portanto $U_\xi \cap U_\alpha = 0$ e $\{U_\alpha \colon \alpha < \omega_1\}$ é uma família de ω_1 abertos não-vazios 2-a-2 disjuntos. ■

94. Teorema. MA(ω_1) $\Rightarrow$ *$\neg$SH.*

Demonstração MA(ω_1) implicaria que $X \times X$ é c.c.c., se X é c.c.c.. ■
Sabe-se que se $\langle X, <\rangle$ é uma ordem total tal que

(i) não tem mínimo nem máximo,

(ii) é conexa na topologia da ordem,

(iii) é separável na topologia da ordem,

então $\langle X, <\rangle \simeq \langle \mathbb{R}, <\rangle$.

Souslin perguntou em 1920 se (i), (ii) e

(i) X é c.c.c. na topologia da ordem,

também implicaria que $\langle X, <\rangle \simeq \langle \mathbb{R}, <\rangle$.

SH $\Rightarrow$ "pergunta de Souslin tem resposta sim."

$\neg$SH $\Rightarrow$ existe reta de Souslin Y; a partir de Y pode-se construir uma reta de Souslin X que satisfaz (i), (ii) $Rightarrow$ pergunta de Souslin tem resposta não, portanto (SH) $Rightarrow$ "a pergunta de Souslin original."

Seja $\langle X, <\rangle$ uma ordem total.

95. Definição. *$\langle A, B\rangle$ é um* ***corte de Dedekind*** *de X se $A, B \subseteq X$, $0 \neq A$, $0 \neq B$, $A \cap B = 0$, $A \cup B = X$, $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a < b)$.*

Dizemos que $l \in X$ é um ***ponto limite*** *de um corte de Dedekind $\langle A, B\rangle$ se $l = \max A$ ou $l = \min B$.*

$\langle X, <\rangle$ se diz ***densa*** *se $(\forall a, b \in X)(a < b \rightarrow]a, b[\neq 0)$.*

$\langle X, <\rangle$ se diz ***completa*** *se todo corte de Dedekind de X tem ponto limite.*

Temos:

(i) $\langle X, <\rangle$ é densa sse todo corte de Dedekind de X tem no máximo um ponto limite.

(ii) $\langle X, <\rangle$ é completa sse todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente de X tem supremo sse IDEM para ínfimo.

(iii) $\langle X, <\rangle$ é conexa na topologia da ordem sse todo corte de Dedekind de X tem exatamente um ponto limite sse é completa e densa.

96. Teorema (4.4). *Se existe uma reta de Souslin Y então existe uma reta de Souslin X tal que*

(i) X é densa,

(ii) nenhum aberto não-vazio de X é separável.

A construção de X a partir de Y: Seja $\sim$ uma relação definida em $y \times Y$ por $x \sim y \Leftrightarrow$ o intervalo em x e y é separável. Ponha $X = Y/\sim = \{[x]_\sim : x \in Y\}$. Se $I, J \in X$, digamos $I = [x]_\sim$ e $J = [y]_\sim$, com $I < J$ sse $x < y$ nos dá uma relação de ordem nas classes. ∎

No *Kunen, cap. 2, exer. 30*, se existe uma reta de Souslin enão existe uma reta de Souslin que satifaz (i) e (ii) da pergunta de Souslin: começando com uma reta de Souslin Y, pelo Teorema 4.4, seja X que satisfaz (i) e (ii) do Teorema. Joga-se fora o min e o max de X se existirem e toma-se o "completamneto de Dedekind" da reta obtida. ∎

Dia 11/6/97

Árvores

97. Definição. *Uma **árvore** é uma ordem parcial* $\langle T, \leq\rangle$ *tal que* $(\forall x \in T)\, \{y \in T\colon y < x\}$ *é um conjunto bem-ordenado por* $\leq$.

Seja T uma árvore. Para cada $x \in T$ definimos a **áltura** de $x \in T$ por

$$\mathrm{h}(x, T) = \mathrm{type}(\{y \in T\colon y \in x\}),$$

para cada ordinal α definímos o **nível** em T por

$$\mathrm{Lev}_\alpha(T) = \{x \in T\colon\ \mathrm{h}(x, T) = \alpha\}\,,$$

definimos a **altura da árvore** T por

$$\mathrm{h}(T) = \min\{\alpha\colon\ \mathrm{Lev}_\alpha(T) = 0\} = \sup\{\mathrm{h}(x, T) + 1\colon x \in T\}\,.$$

Ponha

$$\begin{aligned}\beta &= \min\{\alpha\colon\ \mathrm{Lev}_\alpha(T) = 0\}\\ \gamma &= \sup\{\mathrm{h})x, T) + 1\colon x \in T\}\,.\end{aligned}$$

Para todo $x \in T$ $\mathrm{h}(x, T) < \mathrm{h}(x, T) + 1 \leq \gamma$, portanto, $x \notin \mathrm{Lev}_\gamma(T)$ i.e. $\mathrm{Lev}_\gamma(T) = 0$ logo $\beta \leq \gamma$. Por outro lado, $(\forall x \in T) x \in \mathrm{Lev}_{\mathrm{h}(x,T)}(T) \neq 0$ portanto $\mathrm{h}(x, T) < \beta$ portanto $\mathrm{h}(x, T) + 1 \leq \beta$ logo $\gamma = \sup\{\mathrm{h}(x, T) + 1\colon x \in T\} \leq \beta$.

Dizemos que $T' \subseteq T$ é uma **subárvore** de T se $(\forall x \in T')(\forall y \in T)(y < x \to y \in T')$. Se T' é subárvore de T e $x \in T'$, então $\mathrm{h}(x, T') = \mathrm{h}(x, T)$.

Exemplo

- T qualquer, $\leq = 0$, $(\forall x \in T)\, \mathrm{h}(x, T) = 0$, $\mathrm{h}(T) = 1$.
- $T = \delta$ com a ordem usual, $(\forall \alpha < \delta)\, \mathrm{h}(\alpha, T) = \alpha$ e $\mathrm{h}(T) = \delta$.
- $T = {}^{<\delta}I = \bigcup\{{}^{\alpha}I\colon \alpha < \delta\}$ com $s \leq t$ sse $s \subseteq t$.

  $s \in {}^{\alpha}I \rightsquigarrow \left\{t \in {}^{<\delta}I\colon t < s\right\} \simeq \alpha$

  $t < s \Rightarrow t = s \restriction \beta$ para algum $\beta < \alpha$, portanto, $\mathrm{h}(s, T) = \alpha$ e $\mathrm{h}(T) = \delta$.

  Dizemos que T é uma **árvore I-ária completa** de altura δ, e no caso $I = 2$ é conhecida como **árvore binária completa**.

Dizemos que $C \subseteq T$ é uma **cadeia** em T se $(\forall x, y \in C)(x \leq y \vee y \leq x)$. Dizemos que $A \subseteq T$ é uma **anticadeia** em T se $(\forall x, y \in A)(x \neq y \to (xnot \leq y \wedge y \not\leq x))$.

Observação Considerando $\mathbb{P} = \langle T, \leq\rangle$, os conceitos de cadeia e anticadeia aqui definidos coincidem com os definidos por ocasião de MA(). HAveria algum problema com $x, y, \in T$ serem incomparáveis em $\langle T, \leq\rangle$ e não serem incompatíveis em $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}\rangle$. Mas isto não acontece pois se x, y são compatíveis em $\mathbb{P}$ então existe $z \in T$ tal que $x \leq z$ e

$y \leq z$ e portanto estaria em $\{t \in T\colon t \leq z\}$ que é bem ordenao e seriam consequentemente comparáveis.

Uma árvore T se diz κ-**árvore** (κ-regular) se $\mathrm{h}(T) = \kappa$ e $(\forall \alpha < \kappa)|\operatorname{Lev}_\alpha(T)| < \kappa$.

Uma árvore T se diz κ-**árvore de Aronszajn** se for umaκ-árvore na qual toda cadeia tem cardinalidade $< \kappa$.

Uma árvore T se diz κ-**árvore de Souslin** se $|T| = \kappa$ e toda cadeia e anticadeia tem cardinalidade $< \kappa$.

Não existe ω-árvore de Aronszajn.

Existe ω_1-árvore de Aronszajn.

Existe ω_1-árvore de Souslin sse existe uma reta de Souslin.

O filtro c.u.b.

Um **filtro** sobre A é uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ tal que

(i) $A \in \mathcal{F}$, $0 \notin \mathcal{F}$.

(ii) $(\forall X, Y \in \mathcal{F}) X \cap Y \in \mathcal{F}$.

(iii) $(\forall X \in \mathcal{F})(\forall Y \subseteq A)(X \subseteq Y \to Y \in \mathcal{F})$.

Um **ideal** sobre A é uma família $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ tal que

(i) $A \notin \mathcal{I}$, $0 \in \mathcal{I}$.

(ii) $(\forall X, Y \in \mathcal{I}) X \cup Y \in \mathcal{I}$.

(iii) $(\forall X \in \mathcal{F})(\forall Y \subseteq A)(Y \subseteq X \to Y \in \mathcal{F})$.

Notação $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A) \rightsquigarrow \mathcal{C}^* = \{A \setminus X\colon X \in \mathcal{C}\}$.

Se $\mathcal{F}$ é um filtro sobre A então $\mathcal{F}^*$ é um ideal sobre A e vice-versa, e $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}$ e $\mathcal{I}^{**} = \mathcal{I}$.

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ se diz um **ultrafiltro** sobre A sse $\mathcal{F}$ 'e um filtro maximal sobre A sse $\mathcal{F}$ é um filtro tal que $(\forall X \subseteq A)(X \in \mathcal{F} \vee A \setminus X \in \mathcal{F})$.

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ tem a **propriedade da intersecção finita** (p.i.f.) se $(\forall n \geq 1) X_1, \dots X_n \in \mathcal{F} \Rightarrow X_1 \cap \cdots \cap X_n \neq 0$ e $\mathcal{F}$ se diz **fechada por intersecções finitas** se $(\forall n \geq 1) X_1, \dots X_n \in \mathcal{F} \Rightarrow X_1 \cap \cdots \cap X_n \in \mathcal{F}$.

(i) Se $\mathcal{F}$ tem p.i.f., então
$$\hat{\mathcal{F}} = \left\{ \bigcap \mathcal{C}\colon 0 \neq \mathcal{C} \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \right\}$$
é fechada por intersecções finitas e $0 \notin \hat{\mathcal{F}}$.

(ii) Se $\mathcal{F}$ é fechada por intersecções finitas e $0 \notin \mathcal{F}$, então
$$\langle \mathcal{F} \rangle = \{X \subseteq A\colon (\exists Y \in \mathcal{F}) Y \subseteq X\}.$$

Os dois itens acima, juntos, implicam que se $\mathcal{F}$ tem p.i.f. então

$$\langle\mathcal{F}\rangle = \{X \subseteq A \colon (\exists 0 \neq \mathcal{C} \in [\mathcal{F}]^{<\omega}) bigcap \mathcal{C} \subseteq X\}$$

será o filtro gerado por $\mathcal{F}$. Reciprocamente, se existe filtro $\hat{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}$, então $\mathcal{F}$ tem p.i.f..

Exemplo Seja A infinito,

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq A \colon |A \setminus X| < \omega\}$$

é um filtro (conhecido como **filtro de Fréchet**).

$$\mathcal{F}^* = \{X \subseteq A \colon |X| < \omega\}$$

é um ideal sobre A. Observe que se $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro sobre A tal que $(\forall a \in A)\, \{a\} \notin \mathcal{U}$, então $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

Um filtro $\mathcal{F}$ sobre A se diz **κ-completo** se $\mathcal{F}$ é fechado por intersecções de $< \kappa$ elementos, i.e. se $0 \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ e $|\mathcal{C}| < \kappa$ então $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$. Em particular, todo filtro é ω-completo.[9]

Seja μ um ordinal limite e seja $C \subseteq \mu$:

- dizemos que C é **fechado em** μ se para todo ordinal limite $\delta < \mu$, se $C \cap \delta$ é ilimitado em δ, então $\delta \in C$ equivale a C ser fechado na topologia da ordem de μ,
- dizemos que C é **ilimitado em** μ se $\sup C = \mu$,
- dizemos que C é **c.u.b. em** μ se C é fechado e ilimitado em μ.

Exemplo Seja $\mu > \omega$ e tome

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{\lambda < \mu \colon \lambda \text{ é ordinal limite}\} \\ \mathcal{LL} &= \{\lambda < \mu \colon \lambda \text{ é ``limite de limites''}\}. \end{aligned}$$

Define-se o **filtro C.u.b.** de μ como sendo

$$\mathrm{C.\,u.\,b.}(\mu) = \{X \subseteq \mu \colon (\exists C \subseteq \mu)(C \text{ é C.u.b. em } \mu \text{ e } C \subseteq X)\}.$$

98. Lema. *Seja μ tal que* $\mathrm{cf}(\mu) > \omega$.

(i) Se $\lambda < \mathrm{cf}(\mu)$ (λ cardinal) e C_α são c.u.b. em μ para $\alpha < \lambda$ então $\bigcap \{C_\alpha \colon \alpha < \lambda\}$ é c.u.b. em μ.

(ii) $\mathrm{C.\,u.\,b.}(\mu)$ *é um filtro* $\mathrm{cf}(\mu)$*-completo.*

Demonstração Ponha $C^* = \bigcap \{C_\alpha \colon \alpha < \lambda\}$.

Seja $\lambda < \mu$ limite e suponhamos que $C^* \cap \delta$ é ilimitado em δ. Então $C_\alpha \cap \delta$ é ilimitado em δ para todo $\alpha < \lambda$ e, portanto, $\delta \in C_\alpha$, logo $\delta \in C^*$ i.e. C^* é fecahdo em μ.

Dado $\xi < \mu$ e dado $\alpha < \lambda$, seja $f_\alpha(\xi) = \min \{\eta \in C_\alpha \colon \xi < \eta\}$ (pois C_α é ilimitado em μ e seja $g(\xi) = \sup \{f_\alpha(\xi) \colon \alpha < \lambda\} < \mu$ (pois $\lambda < \mathrm{cf}(\mu)$).

[9] analogamente para ideais.

Consideremos a sequencia

$$\begin{aligned}
&g^0(\xi) = \xi \\
&g^{n+1}(\xi) = g(g^n(\xi)),\ n < \omega \\
&g^\omega(\xi) = \sup\{g^n(\xi)\colon n < \omega\}\,.
\end{aligned}$$

$g^\omega(\xi) < \mu$ pois $\omega < \mathrm{cf}(\mu)$ e $g^\omega(\xi)$ é ordinal limite pois é sup de uma sequencia crescente.

Mostrando que $C_\alpha \cap g^\omega(\xi)$ é ilimitado em $g^\omega(\xi)$ teremos que $g^\omega(\xi) \in C_\alpha$, pois C_αé fechado, e portanto $g^\omega(\xi) \in \bigcap C_\alpha$.

Seja $\beta < g^\omega(\xi)$ e seja $\beta^* = \max\{\xi, \beta\} < g^\omega(\xi)$. Então $\beta^* < g^n(\xi)$ para algum $n < \omega$ e

$$b^* < g^n(\xi) < f_\alpha(g^n(\xi)) \leq g^{n+1}(\xi) < g^\omega(\xi)$$

i.e. $b^* < f_\alpha(g^n(\xi))$ e $f_\alpha(g^n(\xi)) \in C_\alpha \cap g^\omega(\xi)$ i.e. $C_\alpha \cap g^\omega(\xi)$ é ilimitado em $g^\omega(\xi)$ portanto $g^\omega(\xi) \in C_\alpha$ logo $g^\omega(\xi) \in C^*$. ■

$S \subseteq \mu$ se diz **estacionário** se $S \cap C \neq 0$ para todo $C \subseteq \mu$ c.u.b. ($\leftrightarrow S \notin \mathrm{C.\,u.\,b.}(\mu)^* \Leftrightarrow S \neq \mu \setminus X$ para todo $X \in \mathrm{C.\,u.\,b.}(\mu) \Leftrightarrow S \not\subseteq \mu - C$ para todo C c.u.b. $\Leftrightarrow S \cap C \neq 0$.)

Exemplo Se $\mathrm{cf}(\mu) < \lambda$, λ regular, então $S = \{\alpha < \mu\colon\ \mathrm{cf}(\kappa) = \lambda\}$ é estacionário em μ.

$C = \{\gamma_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{type}\,C\}$: "enumração canônica de C ($|C| \leq \mathrm{cf}(\mu) > \lambda$).

$\lambda < \mathrm{type}\,C$ portanto existe $\gamma_\lambda \in C$

$\underline{\mathrm{cf}(\gamma_\lambda) = \lambda}$: $h\colon\ \mathrm{type}\,C \to C$ isomorfismo

$h(\lambda) = \gamma_\lambda$

$h \restriction \lambda\colon \lambda \to \gamma_\lambda$ é cofinal crescente em γ_λ portanto $\mathrm{cf}(\gamma_\lambda) = \mathrm{cf}(\lambda) = \lambda$; portanto, $\gamma_\lambda \in S$, $\gamma_\lambda \in C$ logo $S \cap C \neq 0$.

$S_0 = \{\alpha < \omega_2\colon\ \mathrm{cf}(\alpha) < \omega\}$ e $S_1 = \{\alpha < \omega_2\colon\ \mathrm{cf}(\alpha) < \omega_1\}$ são estacionários em ω_2 e $S_0 \cap S_1$.

Dia 13/6/97

Dizemos que $S \subseteq \mu$ é**estacionário em** μ se $S \cap C\ neq0$ para todo C c.u.b. em μ.

Exemplo Se $\lambda < \mathrm{cf}(\mu)$, λ regular. $S_\lambda = \{\alpha < \lambda\colon\ \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\}$ é estacionário em μ.

Demonstração Seja C c.u.b. em μ; $C = \{\gamma_\xi\colon \xi < \tau\}$, onde $\tau = \mathrm{type}(C)$[10].

Afirmação: $\mathrm{cf}(\gamma_\lambda) = \lambda$ e, consequentemente, $\gamma_\lambda \in S_\lambda \cap C$. $\tau \simeq C$, portanto, $|\tau| = |C| \geq \mathrm{cf}(\mu) > \lambda$, portanto, $\lambda < \tau$ e está definido $\gamma_\lambda = h(\lambda)$. Vamos mostrar que $h \restriction \lambda\colon \lambda \to \gamma_\lambda$ é cofinal[11].

Seja $\sigma = \sup\{\gamma_\xi\colon \xi < \lambda\} = \sup \mathrm{im}(h \restriction \lambda) \leq \gamma_\lambda$. Observe que $C \cap \sigma$ é ilimitado em σ – pois $\gamma_\xi \in C \cap \sigma$ – e como C é fechado, segue que $\sigma \in C$.

Como $\sigma \in C$ e $\sigma \leq \gamma_\lambda$, então $\sigma = \gamma_\xi$ para algum $\xi \leq \lambda$. Por sua vez, $\sigma > \gamma_\xi$, para todo $\xi < \lambda$, portanto $\sigma = \gamma_\lambda = \sup \mathrm{im}(h \restriction \lambda)$ é cofinal em γ_λ. ■

$$\begin{aligned}
\mu = \omega_2 \rightsquigarrow\, &S_0 = \{\alpha < \omega_2\colon\ \mathrm{cf}(\alpha) = \omega_0\} \\
&S_1 = \{\alpha < \omega_2\colon\ \mathrm{cf}(\alpha) < \omega_1\}
\end{aligned}$$

[10] γ_ξ seria a "enumeração" canônica de C, i.e., $h\colon \tau \to C$, h o isomorfismo de ordem entre C e o seu tipo de ordem, e $\gamma_\xi = h(\xi)$.

[11] se $\xi < \lambda$, $\gamma_\xi = h(\xi) < h(\lambda) = \gamma_\lambda$, i.e., $h \restriction \lambda$ é de fato uma função em γ_λ.

S_0 e S_1 são estacionários em ω_2 e $S_0 \cap S_1 = 0$.

Seja κ fracamente inacessível – i.e., K é rgular e cardinal limite – vimos que $\kappa = \omega_\kappa$, então seja $g\colon \kappa \to \kappa$ definida por $g(\alpha) = (\omega_\alpha)^+$, para todo $\alpha < \kappa$. g é 1-1 e $g(\alpha)$ é um cardinal regular para todo $\alpha < \kappa$, portanto, $\{(\omega_\alpha)^+ \colon \alpha < \kappa\} \simeq \kappa$, i.e., existem κ cardinais regulares menores que κ e por isso teremos κ estacionários – $S_\lambda = \{\alpha < \kappa\colon \operatorname{cf}(\alpha) \leq \lambda\}$, para todo $\lambda < \kappa$ regular – disjuntos.

No caso em que κ é um cardinal sucessor, Ulam provou que também existem κ estacionários em κ os quais são disjuntos; e mais genericamente, para κ regular, dado $S \subseteq \kappa$ estacionário em κ , S pode ser decompsto em κ subconjuntos estacionários de κ os quais são disjuntos.

99. Teorema$^{\mathbf{MA}\kappa}$. *Sejam M_α, para $\alpha < \kappa$, subconjuntos de $\mathbb{R}$, cada um de medida de Lebesgue nula. Então $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ tem medida de Lebesgue nula.*

Dizemos que $M \subseteq \mathbb{R}$ tem medida de Lebesgue nula se dado ε existe $U \subseteq \mathbb{R}$ aberto tal que $M \subseteq U$ e a medida de Lebesgue de U é no máximo ε.

Demonstração Fixemos $\varepsilon > 0$. $\mathbb{P} = \{P \subseteq \mathbb{R}\colon P$ é aberto e $\mu(P) < \varepsilon\}$, onde μ é a medida de Lebesgue. Defina a relação de ordem em $\mathbb{P}$ por

$$p \leq q \Leftrightarrow q \subseteq p$$

.

Vejamos que $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ é c.c.c..

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todas as uniões finitas de elementos de $\mathcal{B}$, onde $\mathcal{B}$ é o conjunto enumerável de todos intervalos abertos com extremos racionais, i.e., $\mathcal{B}$ é uma base enumerável de $\mathbb{R}$ (top. ususal). Então sempre que V é aberto (ou mesmo mensurável) e $\delta > 0$ existe um $C \in \mathcal{C}$ tal que $\mu(C \triangle V) \leq \delta$.

Suponha $A = \{p_\alpha \colon \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{P}$ anti-cadeia. Como $\mu(p_\alpha) < \varepsilon$, existe $\delta > 0$ fixo tal que $X = \{\alpha < \omega_1 \colon \mu(p_\alpha) \leq \varepsilon - 3\delta\}$ é não-enumerável.

Para $\alpha \in X$ escolha $C \in \mathcal{C}$ tal que $\mu(p_\alpha \triangle C_\alpha) \leq \delta$. Se α, β são disjuntos em X então $p_\alpha \perp p_\beta$. Assim, $\mu(p_\alpha \cup p_\beta) \geq \varepsilon$; como $\mu(p_\alpha \cap p_\beta) \leq \varepsilon - 3\delta$ nós temos $\mu(p_\alpha \triangle p_\beta) \geq 3\delta$. Como $\mu(p_\alpha \triangle C_\alpha) \leq \delta$ e $\mu(p_\beta \triangle C_\beta) \leq \delta$ temos $\mu(C_\alpha \triangle C_\beta) \geq \delta$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{C}, \text{ portanto, } calC \text{ não-enumerável.}$$

Para $\alpha < \kappa$ seja $D_\alpha = \{p\colon M_\alpha \subseteq p\}$. D_α é denso em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$. De fato, fixemos $q \in \mathbb{P}$; $\mu(q) < \varepsilon$, assim existe um aberto V com $M_\alpha \subseteq V$ e $\mu(V) < \varepsilon - \mu(q)$.

Então $p = q \cup V$ tem medida $\mu(p) < \varepsilon$, assim $p \in \mathbb{P}$ portanto p é uma extensão de q em D_α. Seja G um filtro tal que $G \cap D_\alpha \neq 0$. Então $M_\alpha \subseteq \bigcup G$. Logo $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_a a \subseteq \bigcup G$. Falta mostrar que $\mu(\bigcup G) \leq \varepsilon$.

Se G é um filtro em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, $\bigcup G$ é aberto; e se $p, q \in G$ eles têm uma extensão comum $r \in G$ e como $r \leq p \vee q$, nós temos $p \vee q \in G$.

$P_1, \ldots, P_n \in G$ então $\bigcup_{i=1}^n P_i$ está em G, portanto $\mu(\bigcup P_i) < \varepsilon$. Assim, por aditividade enumerável de μ, sempre que A é um subconjunto enumerável de G, $\mu(\bigcup A) \leq \varepsilon$.

Vamos mostrar que $\bigcup A = \bigcup G$ para algum $A \subseteq G$ enumerável. Tomemos $A = G \cap \mathcal{B}$, então $\mu(\bigcup G) \leq \varepsilon$.

...

∎

100. Definição. *Sejam $C_\alpha \subseteq \kappa$, para $\alpha < \kappa$. Define-se a* ***intersecção diagonal***

$$\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \{\gamma < \alpha \colon (\forall \alpha < \gamma) \gamma \in C_\alpha\}.$$

101. Teorema. *Se $\kappa > \omega$ regular e C_α c.u.b. em κ para todo $\alpha < \kappa$ então $D = \triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ é c.u.b. em κ.*

Demonstração Vamos provar primeiro que D é fechado. Seja $\delta < \kappa$ orinal limite tal que $D \cap \delta$ é ilimitado em δ. Seja $\alpha < \delta$; vamos mostrar que $C_\alpha \cap \delta$ é ilimitado em δ, daí teremos $\delta \in C_\alpha$ (pois C_α é fechado) e, portanto, $\delta \in D$.

Seja $\beta < \delta$. Como $\cap \delta$ é ilimitado, seja $\gamma \in D \cap \delta$ tal que $\beta^* < \gamma$, onde $\beta^* = \max\{\alpha, \beta\}$. De $\gamma \in D$ temos $\gamma \in C_\xi$, para todo $\xi < \gamma$, em particular $\alpha < \gamma$, portanto, $\gamma \in C_\alpha$.. Logo, $\gamma \in C_\alpha \cap \delta$ e portanto $C_\alpha \cap \delta$ é ilimitado em δ.

Agora, provaremos que D é ilimitado em κ. Dado $\xi < \kappa$, $\bigcap \{C_\alpha \colon \alpha < \xi\}$ é c.u.b. em κ, portanto, seja $g(\xi) = \min \left\{ \eta \in \bigcap_{\alpha<\xi} C_\alpha \colon \xi < \eta \right\}$. Então, $\xi < g(\xi) < \kappa$ e $g(\xi) \in \bigcap \{C_\alpha \colon \alpha < \xi\}$.

Definimos por recursão finita:

$$\begin{cases} g^0(\xi) = \xi \\ g^{n+1}(\xi) = g(g^n(\xi)), \ \forall n < \omega, \end{cases}$$

e seja $\delta = \sup \{g^n(\xi) \colon n < \omega\}$, portanto[12], δ é ordinal limite.

Sejam $\alpha, \beta < \delta$ e $\beta^* = \max\{\alpha, \beta\} (< \delta)$. Pela definição de δ existe $n < \omega$ tal que $\beta^* < g^n(\xi)$.

$$a \leq \beta^* < g^n(\xi) < g^{n+1}(\xi) \begin{cases} < \delta \\ \in \bigcap \{C_\gamma \colon \gamma < g^n(\xi)\}. \end{cases}$$

$\alpha < g^n(\xi)$, portanto, $g^{n+1} \in C_\alpha$ e $g^{n+1}(\xi) < \delta$, portanto, $\beta < g^{n+1}(\xi) \in C_{\alpha \cap \delta}$, portanto, $\delta \in C_\alpha$, portanto, $\delta \in D$. ∎

102. Teorema. *$\kappa > \omega$ regular. $S \subseteq \kappa$ estacionário em κ, $f \colon S \to \kappa$ regressiva – i.e., $(\forall \gamma \in S) f(\gamma) < \gamma$. Então $(\exists \alpha < \kappa) f^{-1}(\{\alpha\})$ é estacionário em κ.*

Demonstração Se não, para cada $\alpha < \kappa$, existe $C_\alpha \subseteq \kappa$ c.u.b. tal que $f^1(\{\alpha\}) \cap C_\alpha = 0$. Seja $D = \triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$. D é c.u.b. em κ, portanto, $D \cap S \neq 0$.

Seja $\gamma \in D \cap S$ e seja $\alpha = f(\gamma) < \gamma$. Então $\gamma \in f^{-1}(\{\alpha\})$ e $\gamma \in D$, portanto, $\gamma \in C_\xi$ para todo $\xi < \gamma$, em particular $\gamma i n C_\alpha$. Logo $\gamma \in f^{-1}(\{\alpha\}) \cap C_\alpha$ contra $f^{-1}(\{\alpha\}) \cap C_\alpha = 0$.
∎

[12] $g^n(\xi) < g(g^n(\xi)) \in \cap \{C_\alpha \colon \alpha < g^n(\xi)\}$