

# Arranjos de Subespaços, Colapso de Complexos Simpliciais e Complexidade Computacional

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Jair Donadelli Júnior e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 12 de março de 1996.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Arnaldo Mandel - IME-USP
- Prof. Dr. Nicolau Corção Saldanha - IMPA-CNPq

## **Agradecimentos**

Ao Yoshi, pela dedicação e paciência incomuns. Seu entusiasmo foi grande fonte de inspiração por todos estes anos.

Ao Arnaldo, pelas dicas e pelo seminário que despertou meu interesse pelo assunto.

Às pessoas que de alguma forma me ajudaram a chegar até aqui. Em especial, aos amigos Lúcia, Ayumi, Claus, Orlando, Juaci, Fábio, Fábio S. e Fran.

Finalmente, aos meus pais pelo carinho e incentivo.

## Abstract

In this dissertation we describe topological methods for investigating the computational complexity of some combinatorial problems. These methods are used to estimate the depth of linear decision trees for the membership problem for the union of a finite number of convex polyhedra. As applications of these results we derive an  $\Omega(n \log(n/k))$  lower bound for the  $k$ -equal problem, an  $\Omega(n \log k)$  lower bound for the  $k$ -distinct problem and an  $\Omega(n \log(n/k))$  lower bound for the  $k$ -divisibility problem. These results were obtained by Björner and Lovász.

We also give an exposition of the topological methods used by Kahn, Saks and Sturtevant and by Yao for studying the complexity of graph properties. Their results state that properties of graphs of prime power order are evasive and that properties of bipartite graphs are evasive, respectively.

## Resumo

Neste trabalho descrevemos algumas aplicações da topologia algébrica em complexidade computacional. Björner e Lovász usaram métodos topológicos para estimar a altura de uma árvore de decisão linear que testa pertinência em uniões finitas de poliedros convexos. Como aplicações eles obtiveram as cotas inferiores  $\Omega(n \log(n/k))$  para o problema dos  $k$ -iguais,  $\Omega(n \log k)$  para o problema dos  $k$ -distintos e  $\Omega(n \log(n/k))$  para o problema da  $k$ -divisibilidade.

Descrevemos também os métodos topológicos usados por Kahn, Saks e Sturtevant para mostrar que propriedades de grafos de ordem potência de primo são evasivas. Estes mesmos métodos foram usados por Yao para mostrar que propriedades de grafos bipartidos são evasivas.

## Sumário

Abstract	iv
Resumo	iv
Introdução	vii
Capítulo 1. Preliminares	1
1.1. Conjuntos parcialmente ordenados	1
1.2. Homologia e cohomologia	4
1.3. Conjuntos parcialmente ordenados e topologia	11
1.4. Árvores de decisão	12
Capítulo 2. Árvores de Decisão Lineares, Arranjos de Subespaços, Funções de Möbius e Cotas Inferiores	15
2.1. Árvores de decisão lineares, uma cota inferior topológica e uma versão combinatória para arranjos de subespaços	15
2.2. A função de Möbius de duas subordens de $\Pi_n$	21
2.3. Aplicações: cotas inferiores para os problemas dos $k$ -iguais, dos $k$ -distintos e $k$ -divisibilidade	29
2.4. Algoritmos para os problemas dos $k$ -iguais, dos $k$ -distintos e $k$ -divisibilidade	34
Capítulo 3. Colapso de Complexos Simpliciais e Evasividade de Propriedades de Grafos	37
3.1. Evasividade	37
3.2. Propriedades de grafos com ordem potência de primo	39
3.3. Propriedades de grafos bipartidos	43
3.4. Propriedades de grafos de ordem 6	43
3.5. Uma implicação do resultado de Kahn, Saks e Sturtevant na conjectura de Aanderaa Rosenberg	46
Considerações Finais	49
Referências Bibliográficas	51



## Introdução

A topologia algébrica tem-se apresentado como uma poderosa ferramenta no tratamento de problemas combinatórios. O exemplo mais conhecido nessa linha é devido a Lovász; ele provou um resultado ligando o número cromático de um grafo à conexidade de um espaço topológico construído a partir desse grafo, demonstrando assim uma conjectura puramente combinatória feita por Kneser [20]. Este resultado foi mais tarde generalizado por Alon, Frankl e Lovász [3] para tratar o número cromático de certos hipergrafos ligados a versões mais gerais da conjectura de Kneser. São conhecidas apenas as demonstrações topológicas destes resultados combinatórios. Uma síntese desses resultados extremamente interessantes está em Lovász [22] e Alon [2]. Inspirado em Alon, Frankl e Lovász [3], Kríž [21] apresentou um método para calcular cotas inferiores do número cromático de hipergrafos  $n$ -uniformes a partir de invariantes topológicos.

Porém, estamos interessados em outra aplicação: a fascinante conexão entre topologia algébrica e complexidade computacional. Determinar cotas inferiores de problemas computacionais sob algum modelo de computação é um problema reconhecidamente difícil e a topologia algébrica tem-se apresentado como uma ferramenta para tratar alguns desses problemas.

Problemas em geometria e otimização combinatória, por exemplo, podem frequentemente ser expressos como problemas de pertinência para conjuntos  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ : dado  $x \in \mathbb{R}^n$  decidir se  $x \in P$ . Por exemplo, decidir se existem três pontos colineares dentre  $n$  pontos dados  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$  ( $1 \leq i \leq n$ ) é o problema de pertinência para o conjunto  $P \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  dado por

$$P = \{(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) : x_i y_j + x_j y_k + x_k y_i - x_j y_i - x_k y_j - x_i y_k = 0 \text{ algum } i < j < k\}.$$

Dois modelos de computação padrões para esse tipo de problema são a árvore de decisão e a árvore de computação.

Temos um conjunto arbitrário  $P$  no  $\mathbb{R}^n$  e queremos saber se um dado ponto  $x$  está em  $P$ . Uma *árvore de decisão algébrica de ordem  $d$*  é uma árvore ternária onde os nós internos são rotulados com polinômios não-nulos  $p_i(x)$  de grau no máximo  $d$  e as folhas tem rótulos “Sim” ou “Não”. Cada nó interno tem três filhos e as arestas são rotuladas com  $<$ ,  $>$ ,  $=$  (um exemplo, para  $d = 1$ , pode ser visto na página 16). Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ , em cada passo a partir da raiz, a resposta para  $p_i(x) \leq 0$  ( $\mathbb{R} \in \{<, >, =\}$ ) diz em qual dos filhos prosseguimos e quando atingimos uma folha lemos a resposta para a pergunta “ $x \in P?$ ”. Esse modelo de computação é bastante poderoso: o problema da mochila,<sup>1</sup> que é  $\mathcal{NP}$ -completo, pode ser resolvido por uma *árvore de decisão linear* (isto é, uma árvore de decisão algébrica de ordem 1) de profundidade polinomial (veja [17]).

Uma cota inferior uniforme para a altura das árvores que resolvem um dado problema determina uma cota inferior para o problema em questão nesse modelo de computação. Um caminho para derivar cotas inferiores é estabelecer ligações entre a complexidade computacional para  $P$  e as propriedades topológicas de  $P$ . Isto em geral depende da contagem das componentes conexas de  $P$  ou  $\mathbb{R}^n \setminus P$ . Este método foi introduzido por Dobkin e Lipton [12], e muitos outros vieram depois, veja, por exemplo, [4, 5, 7, 8, 31].

---

<sup>1</sup>Dados inteiros positivos  $x_1, \dots, x_n$  e  $k$ , queremos decidir se existe  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  tal que  $\sum_{i \in I} x_i = k$ .

Dadas uma árvore  $T$  e uma folha  $w$ , definimos  $L_w$  como o conjunto de pontos do  $\mathbb{R}^n$  que em  $T$  “vão parar em  $w$ ”. Suponha que  $P$  é uma união disjunta de abertos não-vazios  $\{P_i\}_{i \in I}$ . Um argumento simples mostra que, para todo  $i$ , cada  $P_i$  deve conter pelo menos uma componente conexa de  $L_w$ , para alguma folha  $w$  com rótulo “Sim” tal que no raiz  $w$  caminho em  $T$  aparecem somente desigualdades estritas  $p_1(x)R_1 0, \dots, p_k(x)R_k 0$ , onde  $R_i \in \{<, >\}$  e os polinômios  $p_i(x)$  ( $1 \leq i \leq k$ ) são os rótulos dos vértices no raiz  $w$  caminho em  $T$  e têm grau no máximo  $d$ . Definimos como  $L^+$  o conjunto de tais folhas “Sim”. Acima,  $k$  é no máximo a altura  $h_T$  de  $T$ . Denotamos por  $\#S$  o número de componentes conexas de um espaço topológico  $S$  e definimos  $\beta(m, n) = \max\{\#(\mathbb{R}^n \setminus p^{-1}(0)) : p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \text{ e grau}(p) \leq m\}$ .

Se  $D_w = \{x \in \mathbb{R}^n : \prod_i p_i(x) \neq 0\}$  então, para todo  $w \in L^+$ , temos que  $L_w \subset D_w$  e não é difícil ver que  $L_w$  tem no máximo  $\beta(h_T d, n)$  componentes conexas. Isso nos diz que o número de abertos  $|I|$  em  $\{P_i\}_{i \in I}$  é no máximo  $|L^+| \beta(h_T d, n)$ . No caso de árvores de decisão linear  $L_w$  é conexo para todo  $w \in L^+$  e, portanto,  $|I| \leq |L^+|$ , isto é,  $|I| \leq 3^{h_T}$ .

Dessa forma, temos os resultados abaixo; o primeiro de 1979 devido a Dobkin e Lipton e o segundo de 1982 devido a Steele e Yao.

**TEOREMA. [12]** *Qualquer árvore de decisão linear para o problema de pertinência para a união disjunta de uma família  $\{P_i\}_{i \in I}$  de abertos não vazios do  $\mathbb{R}^n$  tem altura pelo menos  $\log_3 |I|$ .*

**TEOREMA. [31]** *Se  $T$  é uma árvore de decisão algébrica de ordem  $d$  para o problema de pertinência para a união disjunta de uma família  $\{P_i\}_{i \in I}$  de abertos não vazios do  $\mathbb{R}^n$ , então a altura  $h_T$  de  $T$  satisfaz  $3^{h_T} \beta(h_T d, n) \geq |I|$ .*

Agora, considere a seguinte pergunta: qual a altura mínima de uma árvore de decisão linear para decidir se entre  $x_1, x_2, \dots, x_n$  existem dois elementos iguais? Essa pergunta é equivalente a decidir se todos os elementos da entrada são diferentes, isto é, na linguagem do teorema de Dobkin e Lipton, decidir se um dado  $x \in \mathbb{R}^n$  pertence a  $P_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{i(1)} > x_{i(2)} > \dots > x_{i(n)}\}$  para alguma permutação  $i$  de  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Portanto, segue imediatamente do resultado de Dobkin e Lipton que a resposta para a pergunta no início deste parágrafo é  $\Omega(\log n!) = \Omega(n \log n)$ .<sup>2</sup>

E para decidir se existem 3 iguais? Essa pergunta parece ser a mais natural em seguida. O leitor pode perceber que generalizações naturais dos  $P_i$ 's que damos no parágrafo anterior não funcionam. Daremos a resposta para essa pergunta (na verdade para uma mais geral, para  $k$ -iguais,  $2 \leq k \leq n$ ) nas seções finais do Capítulo 2.

O resultado de Steele e Yao acima pode ser usado nas aplicações em problemas concretos em combinação com um resultado de Milnor [24], que afirma que  $\beta(m, n) \leq (m+2)(m+1)^{n-1}$ .

Se denotarmos por  $C_d(P)$  a altura mínima para qualquer árvore de decisão algébrica de ordem  $d$  para o problema de pertinência em  $P$ , temos do teorema de Dobkin e Lipton que  $C_1(S) = \Omega(\log \beta_0(P))$ , onde  $\beta_0(P)$  é o número de Betti de dimensão 0 de  $P$ . Do teorema de Steele e Yao e o limitante de Milnor temos  $C_d(P) + n \log C_d(P) = \Omega(\log \beta_0(P))$ .

Esse resultado foi melhorado por Ben-Or em [4] que provou  $C_d(P) = \Omega(\log \beta_0(P))$  e este resultado ainda vale se consideramos *árvores de computação algébrica* ao invés de uma árvore de decisão, isto é, permitimos também fazer certas atribuições, em cada passo, no lugar de só fazermos testes. Sob estas hipóteses, o resultado obtido foi que  $2^{h_T} 3^{n+h_T} \geq |I|$ .

<sup>2</sup>Note que este resultado é ótimo, já que ordenando os  $n$  elementos conseguimos resolver esse problema com  $O(n \log n)$  comparações. Denotamos por  $O(f(n))$  a família de todas as funções  $g(n) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  para as quais existem constantes positivas  $c$  e  $n_0$  tais que  $g(n) \leq cf(n)$  para todo  $n \geq n_0$ . Denotamos por  $\Omega(f(n))$  a família das funções  $g(n)$  como antes tais que  $g(n) \geq cf(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .

Note que se o conjunto onde estamos testando pertinência for conexo os resultados que descrevemos até aqui são triviais. Esse problema foi contornado por Björner, Lovász e Yao em [8], onde provaram que  $C_1(P) = \Omega(\log |\chi(P)|)$ , onde  $\chi(P)$  denota a característica de Euler de  $P$ . Este resultado foi melhorado em recente trabalho de Björner e Lovász [7], onde a cota obtida foi  $C_1(P) = \Omega(\log \sum_i \beta_i(P))$ . É no estudo desse trabalho de Björner e Lovász que nos ocupamos por todo o Capítulo 2 dessa dissertação.

As folhas “Não” de uma árvore de decisão linear  $T$  para  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  decompõem  $\mathbb{R}^n \setminus P$  em células convexas disjuntas abertas no seu fecho afim, portanto, com dimensão bem definida. Se escrevermos  $V_i$  para o espaço vetorial gerado pelas células de dimensão  $i$  e  $\partial_i : V_i \rightarrow V_{i-1}$  para o homomorfismo bordo usual, então  $\dim H_i(\mathbb{R}^n \setminus P) \leq \dim(\ker \partial_i) \leq \dim V_i$ ; este último é o número de células de dimensão  $i$ . Concluimos que o número de folhas “Não” é pelo menos  $\sum_i \beta_i(\mathbb{R}^n \setminus P)$ . Essa idéia, que nos foi apresentada por A. Mandel, “explica” o seguinte resultado devido a Björner e Lovász. Denotamos por  $l^+(T)$  e  $l^-(T)$  o número de folhas “Sim” e folhas “Não” em  $T$ , respectivamente. Ademais,  $l^+(P)$  é o mínimo dos  $l^+(T)$  para toda árvore de decisão linear  $T$  para  $P$ . Definimos  $l^-(P)$  de modo análogo.

TEOREMA. [7] *Para qualquer poliedro fechado  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ,*

$$l^-(P) \geq \sum_{i=0}^n \beta_i(\mathbb{R}^n \setminus P) \quad e \quad l^+(P) \geq 1 + \sum_{i=0}^n \beta_i(\mathbb{R}^n \setminus P).$$

Para nós um *poliedro* é uma união finita de poliedros convexos. Uma pergunta um tanto natural é saber se existe cota superior para  $l^-(P)$  em termos de  $\sum \beta_i(\mathbb{R}^n \setminus P)$  ou em termos de qualquer invariante topológico de  $\mathbb{R}^n \setminus P$ . A resposta é não pois se  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  é um politopo convexo de dimensão  $n$ , então os pontos de  $\mathbb{R}^n \setminus P$  suficientemente próximos do centro de gravidade das faces próprias maximais de  $P$  devem parar em folhas “Não” diferentes em qualquer árvore de decisão linear para  $P$ , isto é,  $l^-(P)$  é pelo menos o número de faces próprias maximais de  $P$ . Por outro lado  $\sum \beta_i(\mathbb{R}^n \setminus P) = 2$  pois politopos convexos de dimensão plena são topologicamente o mesmo.

O leitor que conhece um pouco sobre números de Betti deve estar se perguntando qual a vantagem de se ter essa cota inferior dado que, em geral, não é tarefa fácil computar os números de Betti mesmo no caso de poliedros apresentados combinatoriamente. Felizmente, se um poliedro puder ser representado como uma união de subespaços lineares conseguimos uma “tradução” dessa cota topológica para uma combinatória via a fórmula de Goresky e MacPherson e a teoria das funções de Möbius, esta bastante desenvolvida e estudada.

Se  $\mathcal{A} = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$  é uma família finita de subespaços lineares do  $\mathbb{R}^n$  denotamos por  $V_{\mathcal{A}}$  a união dos elementos dessa família, por  $M_{\mathcal{A}}$  o complemento dessa união e por  $L_{\mathcal{A}}$  o reticulado das intersecções não-vazias de elementos de  $\mathcal{A}$  ordenadas por inclusão reversa. Usamos a fórmula de Goresky e MacPherson (veja Seção 2.1) para escrever os números de Betti de  $M_{\mathcal{A}}$  como a soma (em  $x$ ) de números de Betti do complexo da ordem do intervalo  $(\hat{0}, x)$  contido em  $L_{\mathcal{A}}$ .

A partir disso, teremos uma cota inferior combinatória usando o Teorema de Hall (veja Prop. 1.10) e a definição de função de Möbius  $\mu$  de uma ordem parcial. Apenas para termos uma referência, chegaremos ao resultado que o número de folhas “Não” de uma árvore  $T$  para um arranjo de subespaços  $\mathcal{A}$  é pelo menos  $|\mu(\hat{0}, \hat{1})|$ , onde  $\mu$  é a função de Möbius do reticulado  $L_{\mathcal{A}}$  e  $\hat{0}$  e  $\hat{1}$  são o menor e o maior elemento, respectivamente, desse reticulado.

Como uma aplicação desses resultados considere o seguinte problema.

PROBLEMA ( $k$ -distintos). *Dados  $n$  números reais  $x_1, \dots, x_n$  e um inteiro  $k \geq 2$  decidir se existem  $k$  deles distintos.*



Podemos resolver esse problema com o seguinte algoritmo: processamos a entrada  $x_1, x_2, \dots, x_n$  elemento por elemento mantendo uma lista ordenada  $y_1, y_2, \dots, y_r$  dos  $x_i$ 's distintos que foram encontrados após processar  $x_1, \dots, x_m$ . Se  $r \geq k$  paramos e respondemos “Sim”. Se  $r < k$  fazemos uma busca binária de  $x_{m+1}$  em  $y_1, \dots, y_r$ ; se  $x_{m+1}$  ocorre na lista e se  $m + 1 < n$  processamos  $x_{m+2}$ , se  $m + 1 = n$  paramos e respondemos “Não”; caso  $x_{m+1}$  não ocorra na lista então ele é inserido lá. Essa busca com inserção em  $y_1, \dots, y_r$  pode ser feita com no máximo  $\lceil \log(r + 1) \rceil < \log 2k$  comparações (veja [11, pág. 15, ex. 1.3-5]). Portanto, este algoritmo resolve o problema dos  $k$ -distintos com no máximo  $n \log 2k$  comparações.

Provaremos na Seção 2.3 que esse algoritmo é ótimo a menos de um fator constante. De fato, qualquer árvore de decisão linear para esse problema tem altura  $\Omega(n \log k)$ . Este limitante é obtido aplicando os resultados abstratos a um arranjo  $\mathcal{A}$  de subespaços lineares do  $\mathbb{R}^n$  e estimando a função de Möbius do reticulado  $L_{\mathcal{A}}$  (veja Seções 2.2 e 2.3). Ainda, daremos cotas inferiores para os seguintes problemas.

**PROBLEMA ( $k$ -iguais).** *Dados  $n$  números reais  $x_1, \dots, x_n$  e um inteiro  $k \geq 2$  decidir se existem  $k$  deles iguais.*

**PROBLEMA ( $k$ -divisibilidade).** *Dados  $n$  números reais  $x_1, \dots, x_n$  e um inteiro  $k \geq 2$  decidir se o número de  $x_i$ 's iguais a qualquer número real é divisível por  $k$ .*

Na Seção 2.4 veremos algoritmos ótimos para os problemas dos  $k$ -iguais e  $k$ -divisibilidade.

Em [34], Yao mostrou que qualquer árvore de decisão algébrica de ordem  $d$  ou árvore de computação algébrica para um  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  compacto semi-algébrico deve ter altura  $\Omega(\log |\chi(S)|)$ , estendendo o resultado de Björner, Lovász e Yao [8]. Na versão estendida [36] de [34] Yao mostrou que sob o modelo de árvore de computação algébrica o problema dos  $k$ -iguais tem complexidade  $\Omega(n \log(n/k))$ . Isto é, sob tal modelo mais poderoso de computação esse problema tem a mesma complexidade de que sob árvore de decisão linear. Em [35], ele mostrou que para qualquer compacto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  a altura mínima de uma árvore de decisão algébrica de ordem  $d$  ou árvore de computação algébrica para  $S$  é pelo menos  $\Omega(\log \sum_i \beta_i(S))$  estendendo o resultado de Björner e Lovász [7]. Em trabalho recente, Ben-Or [5] considerou árvores de computação e árvores de decisão sobre corpos arbitrários. Ele obteve resultados paralelos aos de Yao [35] para conjuntos algébricos  $S \subseteq K^n$ , onde  $K$  é um corpo algebricamente fechado de característica  $p > 0$ . Como aplicações Ben-Or obteve as cotas inferiores  $\Omega(n \log(n/k))$  para os  $k$ -iguais e  $\Omega(n \log k)$  para os  $k$ -distintos. Entretanto, esses resultados são consideravelmente mais difíceis.

Agora, veremos alguns resultados que dizem respeito a outra fascinante conexão entre topologia algébrica e complexidade computacional e é dela que nos ocupamos no Capítulo 3 dessa dissertação. Em [18, 33] foram apresentados resultados sobre a complexidade de propriedades invariantes por isomorfismos de grafos.

Considere grafos não-dirigidos sem laços ou arestas múltiplas sobre um conjunto fixo  $V$  de vértices; sem perda de generalidade  $V = [n] = \{1, \dots, n\}$ . A seguir discutiremos sobre de propriedades de grafos invariantes por isomorfismos.

Defina o seguinte jogo entre dois jogadores, o *Construtor* e o *Questionador*: o Construtor conhece um grafo  $G = (V, A)$ , que o Questionador desconhece. O Questionador tem que descobrir se o grafo do Construtor tem uma determinada propriedade o mais eficientemente possível através de sucessivas perguntas do tipo “ $ij \in A$ ?” ( $i, j \in [n]$ ). A cada pergunta do Questionador, o Construtor responde “Sim” ou “Não” com o objetivo de induzir o Questionador a fazer o maior número possível de perguntas. Note que o Construtor pode decidir “no momento” se a resposta é “Sim” ou “Não”, desde que o grafo vai sendo revelado a cada pergunta não há motivo para o Construtor escolher um grafo antes do começo do jogo.

Informalmente a complexidade  $c(P)$  de uma propriedade  $P$  é o número de perguntas feitas por Questionador quando ambos Construtor e Questionador jogam com estratégias ótimas. Uma propriedade é dita *evasiva* se Questionador é forçado a fazer todas as  $\binom{n}{2}$  perguntas, e é *não trivial* se vale para algum mas não para todos os grafos sobre  $V = [n]$ .

Por exemplo, as seguintes propriedades são evasivas:

- (i)  $G$  tem no máximo  $k$  arestas ( $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$ ).
- (ii)  $G$  é uma árvore geradora.
- (iii)  $G$  é uma floresta com  $k$  arestas ( $k < n$ ).
- (iv)  $G$  é acíclico ( $n \geq 3$ ).

Nestes casos uma estratégia evasiva simples para o Construtor é: em determinado momento o grafo construído é  $G_0$  e a pergunta é “ $ij$  é uma aresta do grafo?”; a resposta é “Sim” se e somente se algum supergrafo de  $G_0 \cup \{ij\}$  satisfaz  $P$ . É um exercício simples se convencer que de fato com essa estratégia é preciso fazer todas as  $\binom{n}{2}$  perguntas.

Além das citadas acima, outras propriedades “importantes” foram mostradas serem evasivas (veja [37]):  $G$  é conexo,  $G$  é 2-conexo,  $G$  é planar ( $n > 4$ ),  $G$  é hamiltoniano ( $n$  primo). Para outros resultados veja [9, Cap. 8]. Com isso poderíamos conjecturar que  $c(P) = \Omega(n^2)$ , mas o seguinte exemplo [9, pág. 409] desfaz a nossa conjectura: chame  $G$  de *grafo escorpião* se ele contém um vértice  $b$  de grau  $n - 2$ , o único vértice não adjacente a  $b$  tem grau 1 e é adjacente a um vértice de grau 2. A propriedade “ $G$  é um grafo escorpião” tem complexidade  $\leq 6n$ .

Podemos considerar o grafo  $G$  como um subconjunto do conjunto  $V^{(2)}$  dos 2-subconjuntos de  $V = [n]$ , e podemos identificar uma propriedade  $P$  dos grafos sobre  $V$  com uma família  $\mathcal{P}$  de subconjuntos do conjunto das partes de  $V^{(2)}$ . Assim, dizemos  $G \in \mathcal{P}$  se e somente se  $G$  tem a propriedade  $P$ .

Dizemos que uma propriedade  $\mathcal{P}$  é *monótona* se  $G \in \mathcal{P}$  e  $H \subset G$  então  $H \in \mathcal{P}$ . Em 1973 Aanderaa e Rosenberg fizeram a seguinte conjectura.

CONJECTURA DE AANDERAA ROSENBERG. *Existe uma constante  $\varepsilon > 0$  tal que qualquer propriedade monótona não trivial para grafos sobre  $n$  vértices tem complexidade pelo menos  $\varepsilon n^2$ .*

Inicialmente a conjectura considerava grafos com laços, mas Lipton e Snyder (1974) deram contra-exemplos para a conjectura, todos eles envolvendo laços. A conjectura foi mudada para a forma acima e provada por Rivest e Vuillemin [26] para  $\varepsilon = 1/16$  e depois melhorada por Kleitman e Kwiatkowski [19] para  $\varepsilon = 1/9$ . A demonstração do resultado de Rivest e Vuillemin [26] pode ser encontrada em [9, Teorema 2.6, pág. 414]. Na Seção 3.5 mostramos que qualquer propriedade monótona não-trivial para grafos sobre  $n$  vértices tem complexidade pelo menos  $n^2/4 + o(n^2)$ .<sup>3</sup>

A seguinte conjectura foi atribuída a Karp (veja [18]) e a Best, van Emde Boas e Lenstra (veja [9]).

CONJECTURA DE KARP. *Toda propriedade monótona não trivial sobre grafos é evasiva.*

Do fato de as nossas propriedades serem invariantes por isomorfismo, o grupo  $S_n$  age transitivamente sobre os  $\binom{n}{2}$  elementos de  $V^{(2)}$  preservando o conjunto de grafos tendo determinada propriedade. Note que  $\mathcal{P}$  é um complexo simplicial abstrato sobre  $V^{(2)}$  e então podemos recorrer aos resultados sobre ações de grupos finitos em espaços topológicos.

<sup>3</sup>Usamos a notação  $f(n) = o(g(n))$  para indicar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 0$ .

Podemos generalizar nosso problema da seguinte forma: dado um complexo simplicial  $\Delta$  sobre um conjunto de vértices  $X$ , determinar se um subconjunto  $A \subseteq X$  é uma face de  $\Delta$  fazendo perguntas do tipo “ $x \in A?$ ” ( $x \in X$ ). O complexo  $\Delta$  é *evasivo* se não existe estratégia que decide se  $A$  é uma face de  $\Delta$  em menos que  $n = |X|$  perguntas, e é *não trivial* se é diferente do vazio e de um simplexo.

Em 1984, Kahn, Saks e Sturtevant recorreram a alguns teoremas sobre pontos fixos de ação de grupos em complexos simpliciais acíclicos e provaram que propriedades de grafos de ordem 6 são evasivas (veja Seção 3.4). Eles também provaram o seguinte resultado (veja Seção 3.2) além de uma intrigante conexão: complexos não-evasivos são contraíveis (de fato, eles provaram algo mais forte, veja pág. 41).

TEOREMA. [18] *Se  $n$  é uma potência de primo então toda propriedade não trivial monótona de grafos com  $n$  vértices é evasiva.*

Usando as mesmas técnicas de [18] Yao em 1988 provou o seguinte resultado (veja Seção 3.3).

TEOREMA. [33] *Toda propriedade não trivial monótona de grafos bipartidos é evasiva.*

No Capítulo 1 apresentamos os pré-requisitos para a leitura desse trabalho. Lá aparece um pouco sobre ordens parciais, homologia e cohomologia, um funtor entre ordens parciais e complexos simpliciais e por fim apresentamos árvores de decisão, o modelo de computação que adotamos por todo esse trabalho. Os Capítulos 2 e 3 foram apresentados ao leitor no decorrer dessa introdução. Mais detalhes são dados na introdução de cada capítulo.

## CAPÍTULO 1

### Preliminares

O objetivo desse capítulo é introduzir a linguagem usada no decorrer desse trabalho, apresentar parte dos pré-requisitos e seus resultados básicos, e estabelecer as notações, as quais esperamos não divirjam substancialmente das usadas pelo leitor.

Pedimos desculpas, antecipadamente, pela alta carga de definições encontradas nas páginas desse capítulo; ela se faz necessária pois um grande número de assuntos são envolvidos aqui.

A primeira seção deste capítulo dedicamos a ordens parciais e funções de incidência em ordens parciais; em particular, calculamos a função de Möbius  $\mu_{\Pi_n}(\hat{0}, \hat{1})$ , onde  $\Pi_n$  é o reticulado das partições de  $[n]$ . Como referências para este assunto podemos citar [1] e [30]. A segunda seção é dedicada à homologia e cohomologia e seus resultados básicos que nos serão úteis. As referências aqui são [16, 23, 28].

A terceira seção é dedicada à associação de um espaço topológico a uma ordem parcial. O objetivo é apresentar uma conexão entre funções de Möbius (apresentadas na primeira seção) e característica de Euler. Uma referência para este assunto é [30]. A última seção dedicamos a árvores de decisão, que é o modelo de computação adotado por todo este trabalho.

#### 1.1. Conjuntos parcialmente ordenados

Um *conjunto parcialmente ordenado* (ou *ordem parcial*) é um par  $(P, \leq)$  onde  $P$  é um conjunto ( $P$  será sempre finito) e  $\leq$  uma relação (binária) *de ordem*, isto é, uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva. Dois conjuntos parcialmente ordenados  $P$  e  $Q$  são *isomorfos*,  $P \cong Q$ , se existe uma bijeção  $f : P \rightarrow Q$  tal que  $x \leq y$  em  $P$  se e somente se  $f(x) \leq f(y)$  em  $Q$ .

Dado um conjunto parcialmente ordenado  $(P, \leq)$ , ou simplesmente, uma ordem parcial  $P$  quando a relação de ordem está subentendida, dizemos que dois elementos  $x$  e  $y$  de  $P$  são *comparáveis* se  $y \leq x$  ou  $x \leq y$ , caso contrário são *incomparáveis*. Se quaisquer dois elementos de  $P$  são comparáveis então temos uma *ordem total*. Um subconjunto de  $P$  no qual quaisquer dois elementos são incomparáveis denominamos *antichain*. Por outro lado, se tal subconjunto é totalmente ordenado o denominamos *cadeia*.

Um subconjunto  $Q$  de  $P$  tem uma estrutura de ordem parcial induzida pela ordem de  $P$ :  $x \leq y$  em  $Q$  se e somente se  $x \leq y$  em  $P$ . Assim, nos referimos a  $Q$  como uma *subordem* de  $P$ . Um tipo especial de subordem de  $P$  é o *intervalo fechado*  $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$ .

Se  $x \in Q \subseteq P$  e  $y \in P$  temos as seguintes definições:

- $x$  é *mínimo* de  $Q$  se para todo  $z \in Q$  vale que  $x \leq z$ ,
- $x$  é *máximo* de  $Q$  se para todo  $z \in Q$  vale que  $z \leq x$ ,
- $x$  *cobre*  $y$  em  $P$  se o conjunto  $\{z \in P : y < z < x\}$  é vazio e  $y \leq x$ ,
- $x$  é *minimal* em  $Q$  se para todo  $z \in Q$  vale que  $z \leq x \Rightarrow z = x$ ,
- $x$  é *maximal* em  $Q$  se para todo  $z \in Q$  vale que  $x \leq z \Rightarrow x = z$ .

A função zeta  $\zeta: P \times P \rightarrow \{0, 1\}$  é dada por  $\zeta(x, y) = 1$  para todo  $x \leq y$  em  $P$ , e 0 caso contrário. Defina o produto de duas funções  $\zeta$  como

$$\zeta^2(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \zeta(x, z)\zeta(z, y).$$

Note que  $\zeta^2(x, y)$  é o número de elementos do intervalo  $[x, y]$  e, de um modo geral,

$$\zeta^k(x, y) = \sum_{x \leq z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_k = y} \zeta(x, z_1)\zeta(z_1, z_2) \dots \zeta(z_k, y)$$

conta o número de  $k$ -multicadeias  $x \leq z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_k = y$  de  $x$  para  $y$  em  $P$ . Considere a função  $\zeta \delta$ , onde  $\delta(x, y) = 1$  se  $x = y$  e 0 caso contrário. Então, claramente,

$$(\zeta \delta)(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < y, \\ 0, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Ademais,  $(\zeta \delta)^k(x, y)$  conta o número de  $k$ -cadeias  $x < z_1 < z_2 < \dots < z_k = y$  de  $x$  para  $y$  em  $P$ .

Agora vamos ver o que é a função  $\mu(x, y)$  tal que  $\mu \cdot \zeta = \delta$ , onde o produto é definido a seguir (veja eq. 1). Temos que  $\mu(x, x) = 1$  e, se  $x \neq y$ , então  $(\mu \cdot \zeta)(x, y) = 0$ , isto é,  $\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = 0$  e ficamos com a seguinte definição da função de Möbius  $\mu$  no par  $(x, y)$  de  $P$ :

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y, \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z), & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Quando existe o perigo de confusão, escrevemos  $\mu_P$  para a função de Möbius sobre  $P$ .

EXEMPLO 1.1. Tome  $P_n = (2^{[n]}, \subseteq)$  o conjunto das partes de  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  ordenadas por inclusão. Denotando os dois elementos de  $P_1$  por  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{1}$  temos

$$\mu_{P_1}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mu_{P_1}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = 1 \text{ e } \mu_{P_1}(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = -1.$$

Um cálculo simples mostra que  $\mu_{P \times Q}((x, y), (x', y')) = \mu_P(x, x')\mu_Q(y, y')$  e então para quaisquer  $T \subseteq S$  em  $P_n$  a função de Möbius neste intervalo vale  $\mu_{P_n}(T, S) = (-1)^{S-T}$ .

Para formalizar as idéias que descrevemos acima tome  $K$  um corpo e defina o seguinte conjunto:

$$\mathbf{A}_K(P) = \{f: P \times P \rightarrow K: x \not\leq y \Rightarrow f(x, y) = 0\}.$$

O conjunto  $\mathbf{A}_K(P)$  é um espaço vetorial sobre  $K$  da forma usual. Definimos o produto de dois elementos  $f$  e  $g$  de  $\mathbf{A}_K(P)$  por

$$(f \cdot g)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y). \quad (1)$$

PROPOSIÇÃO 1.2.  $\mathbf{A}_K(P)$  é uma  $K$  álgebra associativa com a função  $\delta$  de Kronecker como identidade à esquerda e à direita.

Essa proposição nos permite chamar  $\mathbf{A}_K(P)$  de álgebra de incidência de  $P$ . A proposição seguinte caracteriza os elementos de  $\mathbf{A}_K(P)$  que têm inversa com respeito ao produto definido na equação 1.

PROPOSIÇÃO 1.3. Um elemento  $f \in \mathbf{A}_K(P)$  possui inversa se e somente se  $f(x, x) \neq 0$  para todo  $x \in P$ . Os elementos de  $\mathbf{A}_K(P)$  que possuem inversa têm uma única inversa  $f^{-1}$  à esquerda e à direita.

Uma classe importante de conjuntos parcialmente ordenados são os chamados *reticulados*. Um conjunto parcialmente ordenado  $P$  é um reticulado se para quaisquer dois de seus elementos  $x$  e  $y$  existem o *supremo*  $x \vee y \in P$  e o *ínfimo*  $x \wedge y \in P$  com as seguintes propriedades:

- (i)  $x \vee y = z$  se  $x, y \leq z$  e para qualquer  $w \in P$  com  $x, y \leq w$  temos  $z \leq w$ ,
- (ii)  $x \wedge y = z$  se  $z \leq x, y$  e para qualquer  $w \in P$  com  $w \leq x, y$  temos  $w \leq z$ .

Note que podemos definir, indutivamente, o supremo e o ínfimo de um subconjunto de  $P$ . Se  $P$  é uma ordem parcial tal que para cada par de elementos existe o supremo (resp., ínfimo) então chamamos  $P$  de  $\vee$  *semi reticulado* (resp.,  $\wedge$  *semi reticulado*).

Daqui por diante, vamos nos referir a um reticulado específico chamado o *reticulado das partições de  $[n]$*   $= \{1, 2, \dots, n\}$ , denotado  $\Pi_n$ . Esse reticulado consiste das partições do conjunto  $[n]$  ordenadas por refinamento, isto é,  $\pi \leq \sigma$  em  $\Pi_n$  se todo bloco de  $\pi$  está contido em um bloco de  $\sigma$ . Por exemplo, se  $n = 8$ ,  $\pi = 123|45|67|8$ ,  $\sigma = 123|458|67$  e  $\tau = 146|257|38$  então  $\pi \leq \sigma$  e  $\sigma$  e  $\tau$  são incomparáveis.

Se um conjunto parcialmente ordenado  $P$  tem um mínimo então ele é denotado por  $\hat{0}$ . Da mesma forma, se  $P$  tem um máximo ele é denotado por  $\hat{1}$ . Um conjunto parcialmente ordenado é *puro* se todas as suas cadeias maximais têm o mesmo comprimento, e é *limitado* se contém um mínimo e um máximo. Um conjunto parcialmente ordenado é *graduado* se é puro, finito e limitado.

Um conjunto parcialmente ordenado graduado  $P$  é de *posto  $n$*  se todas as cadeias maximais têm  $n + 1$  elementos. Neste caso, existe uma única *função posto*  $\rho : P \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$  tal que  $\rho(x) = 0$  se  $x$  é mínimo e  $\rho(y) = \rho(x) + 1$  se  $y$  cobre  $x$  em  $P$ .

Claramente  $\Pi_n$  é graduado de posto  $n - 1$  e o posto de  $\pi \in \Pi_n$  é  $\rho(\pi) = n - b(\pi)$ , com  $b(\pi)$  o número de blocos de  $\pi$ .

Não é difícil provar que se  $\pi \in \Pi_n$ , então  $[\pi, \hat{1}] \cong \Pi_{b(\pi)}$  e se  $\pi = \{B_1, \dots, B_r\}$ , então  $[\hat{0}, \pi] \cong \Pi_{B_1} \times \Pi_{B_2} \times \dots \times \Pi_{B_r}$ . O mais importante isomorfismo de intervalos, por ora, é: se  $\pi \leq \sigma$  em  $\Pi_n$  e  $\sigma = \{B_1, \dots, B_r\}$ , então  $[\pi, \sigma] \cong \Pi_{\lambda_1} \times \dots \times \Pi_{\lambda_r}$ , onde  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) é o número de blocos de  $\pi$  que refinam o bloco  $B_i$  de  $\sigma$ . O fato de  $\mu_{P \times Q} = \mu_P \mu_Q$  junto com esse isomorfismo nos diz que para sabermos o valor da função de Möbius no intervalo  $[\pi, \sigma]$  de  $\Pi_n$  é suficiente saber quanto ela vale no intervalo  $[\hat{0}, \hat{1}]$ . Para isso, vamos usar a seguinte *fórmula de inversão de Möbius* (veja [1, pág. 152]).

PROPOSIÇÃO 1.4. *Sejam  $P$  um conjunto parcialmente ordenado e  $f, g$  funções definidas em  $P$  com valores em  $K$ . Então*

$$g(x) = \sum_{y \geq x} f(y) \quad \text{para todo } x \in P,$$

se e somente se

$$f(x) = \sum_{y \geq x} \mu(x, y)g(y) \quad \text{para todo } x \in P.$$

Vamos agora ao cálculo de  $\mu(\hat{0}, \hat{1}) = \mu_{\Pi_n}(\hat{0}, \hat{1})$ . Seja  $T$  um conjunto finito de cardinalidade  $t$  e defina

$$f(\pi) = \# \left\{ h : [n] \rightarrow T : \bigcup_{b \in \text{im } h} h^{-1}(b) = \pi \right\}.$$

Dessa forma,  $\sum_{\sigma \geq \pi} f(\sigma) = t^{b(\pi)}$  e pela Proposição 1.4 temos que  $f(\pi) = \sum_{\sigma \geq \pi} \mu(\pi, \sigma) t^{b(\sigma)}$ , para todo  $\pi \in \Pi_n$ .

Considere o caso  $\pi = \hat{0}$ . Aqui temos  $f(\hat{0}) = \#\{h : [n] \rightarrow T : h \text{ é injetiva}\}$ , por definição. Então

$$f(\hat{0}) = t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1). \quad (2)$$

Por outro lado,

$$f(\hat{0}) = \sum_{\sigma \in \Pi_n} \mu(\hat{0}, \sigma) t^{b(\sigma)}. \quad (3)$$

Na equação 3 o coeficiente de  $t$  é  $\mu(\hat{0}, \hat{1})$ . Na equação 2, o coeficiente de  $t$  é  $(-1)^{n-1}(n-1)!$ . Então temos o valor de  $\mu(\hat{0}, \hat{1})$  comparando os coeficientes:

$$\mu(\hat{0}, \hat{1}) = (-1)^{n-1}(n-1)!. \quad (4)$$

## 1.2. Homologia e cohomologia

Um *par de espaços*  $(X, A)$  consiste de um espaço topológico  $X$  e um subconjunto  $A \subseteq X$  com a topologia relativa. Uma *função entre pares*  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma função contínua  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(A) \subseteq B$ . Por abuso escrevemos  $X$  para denotar  $(X, \emptyset)$ .

Chamamos uma família  $\mathcal{A}$  de pares de espaços e funções entre pares de espaços de *categoria admissível para uma teoria de homologia* se ela satisfaz as condições (1)–(5) abaixo.

- (1) Se  $(X, A) \in \mathcal{A}$  então todos os pares e inclusões do diagrama abaixo estão em  $\mathcal{A}$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & (X, \emptyset) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ (\emptyset, \emptyset) & \rightarrow & (A, \emptyset) & & (X, A) \rightarrow (X, X) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & (A, A) & & \end{array}$$

- (2) Se  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  está em  $\mathcal{A}$  então  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  estão em  $\mathcal{A}$  juntos com todas as funções que  $f$  define entre os elementos do diagrama acima e os elementos correspondentes no diagrama para o par  $(Y, B)$ .
- (3) Sempre que a composição de duas funções de  $\mathcal{A}$  está definida, ela está em  $\mathcal{A}$ .
- (4) Se  $I = [0, 1]$  e  $(X, A)$  está em  $\mathcal{A}$ , então o produto cartesiano  $(X, A) \times I = (X \times I, A \times I)$  está em  $\mathcal{A}$  e as funções  $\iota_0, \iota_1 : (X, A) \rightarrow (X, A) \times I$  definidas por  $\iota_0(x) = (x, 0)$ ,  $\iota_1(x) = (x, 1)$  estão em  $\mathcal{A}$ .
- (5) A família  $\mathcal{A}$  contém um espaço  $P$  consistindo de um único ponto. Se  $X$  e  $P$  estão em  $\mathcal{A}$  e  $P$  é um ponto, então  $f : P \rightarrow X$  está em  $\mathcal{A}$ .

Os pares e funções de  $\mathcal{A}$  são chamados de *admissíveis*.

EXEMPLO 1.5.  $\mathcal{A}_1$  = todos os pares  $(X, A)$  e todas as funções entre tais pares.

EXEMPLO 1.6.  $\mathcal{A}_c$  = todos os pares  $(X, A)$  com  $X$  compacto e  $A$  fechado, e todas as funções entre tais pares.

Duas funções  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  em uma categoria admissível  $\mathcal{A}$  são *homotópicas* em  $\mathcal{A}$  se existe uma função  $h : (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$  em  $\mathcal{A}$  tal que  $f = h\iota_0$  e  $g = h\iota_1$ . A função  $h$  é chamada *homotopia*.

Uma *teoria de homologia* sobre uma categoria admissível  $\mathcal{A}$  consiste de três tipos de objetos, a saber,

- (i) um  $R$ -módulo  $H_k(X, A)$  chamado *k-ésimo grupo de homologia relativa de  $X$  módulo  $A$*  para todo par  $(X, A)$  em  $\mathcal{A}$  e todo inteiro não-negativo  $k$ , onde  $R$  é um anel comutativo com unidade;
- (ii) para cada função  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  em  $\mathcal{A}$  e cada inteiro não-negativo  $k$ , um homomorfismo  $f_* : H_k(X, A) \rightarrow H_k(Y, B)$ , chamado *homomorfismo induzido pela  $f$* ;
- (iii) para cada par  $(X, A)$  em  $\mathcal{A}$  e cada inteiro não-negativo  $k$ , um homomorfismo  $\partial : H_k(X, A) \rightarrow H_{k-1}(A)$ , chamado *operador bordo*. Por definição  $H_{-1}(A) = 0$ ,

satisfazendo os seguintes axiomas, chamados *axiomas de Eilenberg–Steenrod*:

AXIOMA 1. Se  $f =$  identidade, então  $f_* =$  identidade.

AXIOMA 2.  $(gf)_* = g_*f_*$ .

AXIOMA 3.  $\partial f_* = (f|_A)_*\partial$ , isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} H_k(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H_k(Y, B) \\ \partial \downarrow & & \partial \downarrow \\ H_{k-1}(A) & \xrightarrow{(f|_A)_*} & H_{k-1}(B) \end{array}$$

AXIOMA 4 (axioma da Exatidão). Se  $(X, A)$  é admissível,  $i : A \hookrightarrow X$  e  $j : X \hookrightarrow (X, A)$  são as inclusões, então a seguinte sequência é exata:

$$\cdots \rightarrow H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j_*} H_k(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots \xrightarrow{j_*} H_0(X, A) \rightarrow 0$$

AXIOMA 5 (axioma da Homotopia). Se  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são funções admissíveis homotópicas em  $\mathcal{A}$ , então para todo  $k$  os homomorfismos  $f_*, g_* : H_k(X, A) \rightarrow H_k(Y, B)$  coincidem.

AXIOMA 6 (axioma da Excisão). Se  $U \subset X$  é aberto,  $\bar{U} \subset \text{int}(A)$  e a inclusão  $(X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$  é admissível, então a inclusão induz isomorfismos  $H_k(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_k(X, A)$  para todo  $k$ .

AXIOMA 7 (axioma da Dimensão). Se  $P$  é um espaço admissível consistindo de um único ponto, então  $H_k(P) = 0$  para  $k \neq 0$ .

A consistência dos axiomas acima pode ser verificada pondo  $H_k(X, A) = 0$  para todo  $k$ . Adiante daremos exemplos de teorias não-triviais, mas omitiremos as demonstrações.

Dizemos que os espaços  $X$  e  $Y$  são *homotopicamente equivalentes* se existem  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $fg \sim \text{id}_Y$  ( $\sim$  é notação para homotopia) e  $gf \sim \text{id}_X$ , e, portanto,  $H_k(X) \cong H_k(Y)$  para todo  $k$ . Um espaço é *contraível* se é homotopicamente equivalente a um ponto.

Um subespaço  $A$  de  $X$  é um *retrato* se existe uma função contínua  $r : X \rightarrow A$  tal que a restrição de  $r$  ao subespaço  $A$  é a identidade.

Seja  $i : A \hookrightarrow X$  a inclusão da  $A$  em  $X$ . Se  $A$  é um retrato de  $X$  então  $ri = \text{id}_A$  e, se  $ir \sim \text{id}_X$  dizemos que  $A$  é um *retrato por deformação* de  $X$ . Além disso, dizemos que  $A$  é um *retrato por deformação forte* de  $X$  se alguma homotopia  $h : X \times I \rightarrow X$  entre  $ir$  e  $\text{id}_X$  é tal que  $h(x, t) = x$  para todo  $x \in A$  e  $t \in I$ . Nestes casos  $H_k(X) \cong H_k(A)$  para todo  $k$ .

Uma *teoria de cohomologia* tem os objetos  $H^k(X, A)$  (que é um  $R$ -módulo), o *homomorfismo induzido*  $f^* : H^k(Y, B) \rightarrow H^k(X, A)$  por  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , e o *operador cobordo*  $\delta : H^{k-1}(A) \rightarrow H^k(X, A)$ , satisfazendo os seguintes axiomas.



AXIOMA 1. Se  $f =$  identidade, então  $f^* =$  identidade.

AXIOMA 2.  $(gf)^* = f^*g^*$ .

AXIOMA 3.  $\delta(f|_A)^* = f^*\delta$ .

AXIOMA 4. Se  $i : A \hookrightarrow X$  e  $j : X \hookrightarrow (X, A)$  são as inclusões, então a seguinte sequência é exata:

$$0 \rightarrow H^0(X, A) \rightarrow \cdots \rightarrow H^{k-1}(A) \xrightarrow{\partial} H^k(X, A) \xrightarrow{j^*} H^k(X) \xrightarrow{i^*} H^k(A) \rightarrow \cdots$$

AXIOMA 5. Se as funções admissíveis  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são homotópicas, então  $f^* = g^*$ .

AXIOMA 6. Se  $U \subset X$  é aberto,  $\bar{U} \subset \text{int}(A)$  e a inclusão  $(X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$  é admissível, então isomorfismos  $H^k(X, A) \cong H^k(X \setminus U, A \setminus U)$ , para todo  $k$ , são induzidos pela inclusão.

AXIOMA 7. Se  $P$  é um espaço admissível consistindo de um único ponto, então  $H^k(P) = 0$  para  $k \neq 0$ .

A próxima seção é um preparativo para apresentarmos exemplos não-triviais de teorias de homologia, em particular, são aquelas de que faremos uso neste trabalho.

**1.1.2.1. Complexos de cadeias e sequências exatas.** Um *complexo de cadeias*  $\mathcal{C} = \{C_n, \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma sequência de  $R$ -módulos  $C_n$  e homomorfismos dos  $R$ -módulos  $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ , tal que para todo  $n \in \mathbb{Z}$  vale a relação  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ . Note que esta relação implica que  $\text{im } \partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$  e desta forma o  $n$ ésimo módulo de homologia  $H_n(\mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}$  está bem definido por

$$H_n(\mathcal{C}) = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}.$$

A homologia de  $\mathcal{C}$  é a sequência  $H_*(\mathcal{C}) = H_*(\mathcal{C}; R) = \{H_n(\mathcal{C}; R)\}_n$ .

Uma *aplicação de cadeias* entre dois complexos de cadeias  $f_{\#} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  é uma sequência de homomorfismos  $f_n : C_n \rightarrow C'_n$  tal que o diagrama abaixo é comutativo para todo  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n \\ f_{n+1} \downarrow & & \downarrow f_n \\ C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n \end{array}$$

Associado à aplicação de cadeia  $f_{\#}$  está bem definido um homomorfismo nas homologias  $f_* : H_n(\mathcal{C}) \rightarrow H_n(\mathcal{C}')$  chamado *homomorfismo induzido* pela  $f$ .

Um complexo de cadeias  $\mathcal{C} = \{C_n, \alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tal que  $\text{im } \alpha_{n+1} = \ker \alpha_n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  é chamado *sequência exata*.

Uma sequência de complexos de cadeias e aplicações de cadeias

$$\cdots \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{f_{\#}} \mathcal{C}' \xrightarrow{g_{\#}} \mathcal{C}'' \rightarrow \cdots$$

é *exata* se, para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , a sequência  $\cdots \rightarrow C_n \xrightarrow{f_n} C'_n \xrightarrow{g_n} C''_n \rightarrow \cdots$  é exata.

Uma *sequência exata curta* de complexos de cadeias é uma sequência da forma

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \rightarrow 0.$$

Uma seqüência exata curta induz de maneira natural uma seqüência exata,

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_*} H_n(\mathcal{A}) \xrightarrow{f_*} H_n(\mathcal{B}) \xrightarrow{g_*} H_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{\Delta_*} H_{n-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{f_*} \cdots, \quad (5)$$

nos módulos de homologia. O homomorfismo  $\Delta_*$  é o *homomorfismo conector*. Tal homomorfismo sempre existe nas condições acima e uma referência para o leitor é [28, pág. 182-183].

Suponha  $\mathcal{C} = \{C_n, \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  com  $C_n$  trivial para  $n < 0$  e  $\epsilon : C_0 \rightarrow R$  um epimorfismo tal que  $\epsilon \partial_1 = 0$ .

O *complexo de cadeias  $\mathcal{C}$  aumentado por  $\epsilon$*  é o complexo  $\tilde{\mathcal{C}} = \{\tilde{C}_n, \tilde{\partial}_n\}$ , tal que  $\tilde{C}_n = C_n$  e  $\tilde{\partial}_n = \partial_n$  para todo  $n \neq -1$  e  $\tilde{C}_{-1} = R$  e  $\tilde{\partial}_0 = \epsilon$ .

Denotamos os módulos de homologia de  $\tilde{\mathcal{C}}$  por  $\tilde{H}_n(\mathcal{C})$  e o chamamos de  *$n$ ésimo módulo de homologia reduzido de  $\mathcal{C}$* . De  $R$  ser livre como  $R$ -módulo o homomorfismo  $\epsilon$  cinde e temos

$$H_n(\mathcal{C}) = \begin{cases} \tilde{H}_n(\mathcal{C}), & \text{se } n \geq 1 \\ \tilde{H}_n(\mathcal{C}) \oplus R, & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

**1.1.2.2. Homologia simplicial.** Um *complexo simplicial abstrato* sobre um conjunto (finito) de *vértices*  $V$  é um par  $(V, \Delta)$ , onde  $\Delta$  é uma coleção de subconjuntos de  $V$  satisfazendo as condições abaixo.

- (i) Se  $x \in V$  então  $\{x\} \in \Delta$ , e
- (ii) se  $S \in \Delta$  e  $T \subseteq S$ , então  $T \in \Delta$ .

Um elemento  $S \in \Delta$  é chamado uma *face* de  $\Delta$ , e a *dimensão* de  $S$  é definida como sendo  $|S| - 1$ . A dimensão de  $\Delta$  é definida por  $\dim \Delta = \max\{\dim S : S \in \Delta\}$ .

Se  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  são complexos simpliciais abstratos dizemos que  $f : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  é uma *função simplicial*, se  $f$  está definida nos vértices de  $\Delta_1$  a valores nos vértices de  $\Delta_2$  de forma que para todo  $S \in \Delta_1$ , vale que  $f(S) \in \Delta_2$ . Uma bijeção simplicial cuja inversa é simplicial é um *isomorfismo* de complexos simpliciais. Denote por  $f_i$  o número de faces de  $\Delta$  de dimensão  $i$  e defina a *característica de Euler* de  $\Delta$  por

$$\chi(\Delta) = \sum_i (-1)^i f_i. \quad (6)$$

Um  *$k$  simplexo* é o fecho convexo de um conjunto de  $k+1$  pontos (ou, *vértices*) afim-independentes no  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos apenas *simplexo* quando a *dimensão* é irrelevante. O fecho convexo de um subconjunto do conjunto de vértices de um simplexo é chamado *face* do simplexo.

Uma família de simplexos  $\Delta = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  é um *complexo simplicial geométrico* se valerm as seguintes condições (aqui confundimos de propósito a notação para complexo simplicial abstrato e geométrico; os motivos logo ficarão claros).

- (i) Toda face de qualquer simplexo  $\sigma \in \Delta$  é também um simplexo de  $\Delta$ .
- (ii) Se  $\sigma$  e  $\sigma'$  são simplexos de  $\Delta$ , então a intersecção  $\sigma \cap \sigma'$  é face de  $\sigma$  e  $\sigma'$ .

A união de todos os simplexos de  $\Delta$  é denotada  $\|\Delta\|$ . Definimos a *dimensão* do complexo simplicial geométrico como  $\dim(\Delta) = \max\{\dim \sigma : \sigma \in \Delta\}$ . Cada complexo simplicial geométrico  $\Delta$  determina

um complexo simplicial abstrato, também denotado por  $\Delta$ . A um complexo simplicial abstrato existe associado um único (a menos de homeomorfismos) complexo simplicial geométrico. O espaço topológico  $\|\Delta\|$  é a *realização geométrica* de  $\Delta$ ; daqui em diante omitiremos  $\|\ \ \|$  e diremos somente complexo simplicial.

Agora, considere uma ordem total dos vértices do complexo simplicial  $\Delta$ . Um *k-simplexo orientado* de  $\Delta$  é um *k-simplexo*  $\sigma$  de  $\Delta$  munido com uma das classes de equivalência das ordens totais sobre  $\sigma$  sendo que, duas ordens estão numa mesma classe se diferem por uma permutação par. Denote por  $\sigma = \langle x_0, \dots, x_k \rangle$  o *p-simplexo orientado*  $\sigma = \{x_0, \dots, x_k\}$  munido da ordem  $x_0 < \dots < x_k$ .

Definimos  $C_k(\Delta) = C_k(\Delta; R)$  como o *R*-módulo livremente gerado pelos *k-simplexos orientados* de  $\Delta$  módulo o subgrupo gerado pelos elementos da forma  $\sigma - \varepsilon_p p(\sigma)$ , onde  $p(\sigma)$  é o simplexo ordenado obtido a partir da permutação  $p$  dos vértices de  $\sigma$  e  $\varepsilon_p = \pm 1$ , dependendo de a permutação ser par ou ímpar.

Definimos o *homomorfismo bordo*  $\partial_k : C_k(\Delta) \rightarrow C_{k-1}(\Delta)$  por

$$\partial_k \langle x_0, \dots, x_k \rangle = \sum_i (-1)^i \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k \rangle,$$

e estendemos por linearidade para os demais elementos de  $C_k(\Delta)$ . Note que  $C_k(\Delta) \cong 0$  para  $k > \dim \Delta$  e  $k < 0$ , e que o homomorfismo bordo satisfaz a relação  $\partial_k \partial_{k+1} = 0$ , a qual implica que  $\text{im } \partial_{k+1} \subseteq \text{ker } \partial_k$ . Desta forma temos o *complexo de cadeias orientadas* de  $\Delta$  (sobre *R*),  $\mathcal{C}(\Delta) = \{C_k(\Delta), \partial_k\}_{k \geq 0}$ , e está definido o *k-ésimo módulo de homologia simplicial*  $H_k(\Delta)$  de  $\Delta$

$$H_k(\Delta) = H_k(\mathcal{C}(\Delta)).$$

Se  $f : \Delta \rightarrow \Delta'$  é simplicial (e, portanto, podemos construir  $\|f\| : \|\Delta\| \rightarrow \|\Delta'\|$  contínua e linear em cada simplexo) existe (único) homomorfismo  $f_{\#} : C_k(\Delta) \rightarrow C_k(\Delta')$  definido em cada simplexo por  $f_{\#}(\langle x_0, \dots, x_k \rangle) = \langle f(x_0), \dots, f(x_k) \rangle$  e estendido por linearidade a  $C_k(\Delta)$ . Este homomorfismo induz a outro  $f_* : H_k(\Delta) \rightarrow H_k(\Delta')$  nas homologias.

Sejam  $\Delta$  um complexo simplicial (geométrico) e  $\Gamma \subseteq \Delta$  tal que  $\Gamma$  é um subcomplexo simplicial. A categoria dos pares simpliciais  $(\Delta, \Gamma)$  e aplicações simpliciais entre pares simpliciais é admissível. Definimos  $C_k(\Delta, \Gamma) = C_k(\Delta)/C_k(\Gamma)$  e  $\mathcal{C}(\Delta, \Gamma) = \{C_k(\Delta, \Gamma), \partial_k\}_{k \geq 0}$ , onde  $\partial_k$  é o homomorfismo bordo induzido no quociente (usamos a mesma notação).

O *k-ésimo módulo de homologia simplicial*  $H_k(\Delta, \Gamma)$  de  $\Delta$  módulo  $\Gamma$  é definido por

$$H_k(\Delta, \Gamma) = H_k(\mathcal{C}(\Delta, \Gamma)).$$

Temos ainda que  $f : (\Delta, \Gamma) \rightarrow (\Delta', \Gamma')$  simplicial induz um homomorfismo nas homologias e a sequência exata longa 5 (pág. 7) nos dá o operador bordo  $\partial : H_k(\Delta, \Gamma) \rightarrow H_{k-1}(\Gamma)$  bastando, para isso, considerar a sequência exata curta

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(\Gamma) \xrightarrow{i_{\#}} \mathcal{C}(\Delta) \xrightarrow{p_{\#}} \mathcal{C}(\Delta)/\mathcal{C}(\Gamma) \rightarrow 0.$$

É sabido que um módulo de homologia pode ser decomposto como uma soma direta de um subgrupo livre com um subgrupo de torção (veja [13, pág. 132, Teo. 7.2]). À dimensão da parte livre do *k-ésimo módulo de homologia simplicial* com coeficientes inteiros ( $R = \mathbb{Z}$ ) damos o nome de *k-ésimo número de Betti*  $\beta_k$ . Dessa forma, prova-se que a característica de Euler do complexo simplicial  $\Delta$  (veja eq. 6, pág. 7) satisfaz

$$\chi(\Delta) = \sum_i (-1)^i \beta_i(\Delta).$$

Denotamos por  $\tilde{\beta}_i(\Delta)$  a dimensão da parte livre de  $\tilde{H}_i(\Delta)$  e o chamamos de *i-ésimo número de Betti reduzido*; definimos também a *característica de Euler reduzida*, denotada por  $\tilde{\chi}$ , como sendo a soma alternada dos números de Betti reduzidos.

**1.1.2.3. Homologia singular.** Seja  $\sigma_k$  o  $k$ -simplexo no  $\mathbb{R}^k$  definido como o fecho convexo dos pontos  $\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ , onde  $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , são os vetores canônicos e  $e_0$  a origem. Um ponto em  $\sigma_k$  é univocamente definido por suas coordenadas baricêntricas  $(t_0, \dots, t_k)$ .

Seja  $X$  um espaço topológico. Um  $k$  *simplexo singular* é uma função contínua  $\phi : \sigma_k \rightarrow X$ . Defina  $S_k(X) = S_k(X; R)$  o  $R$ -módulo livre gerado pelos  $k$ -simplexos singulares em  $X$ ; um elemento de  $S_k(X)$  é chamado  $k$  *cadeia singular* e tem a forma  $\sum_{\phi} n_{\phi} \phi$ , com  $n_{\phi} \in R$  e igual a zero a menos para um número finito de  $\phi$ 's.

Defina por  $\partial^i(\phi) = \phi(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{k-1})$  a *i-ésima face* de  $\phi$ , para  $0 \leq i \leq k$ . Segue da definição que a *i-ésima face* é um  $(k-1)$ -simplexo singular. A função  $\partial^i$  se estende de forma única a um homomorfismo  $\partial^i : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$  pondo  $\partial^i(\sum n_{\phi} \phi) = \sum n_{\phi} \partial^i(\phi)$ .

Definimos o *homomorfismo bordo*  $\partial_k : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$  dado por  $\partial_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial^i$ . Como na homologia simplicial, aqui temos  $\partial_k \partial_{k+1} = 0$ . Assim, o *complexo das cadeias singulares* de  $X$  é dado por  $\mathcal{S}(X) = \{S_k(X), \partial_k\}_{k \geq 0}$  e definimos o *k-ésimo módulo de homologia singular*  $H_k(X)$  de  $X$  por

$$H_k(X) = H_k(\mathcal{S}(X)).$$

Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua e  $\phi$  um  $k$ -simplexo singular em  $X$ , defina um  $k$ -simplexo singular  $f_{\#}(\phi)$  em  $Y$  por  $f_{\#}(\phi) = f \circ \phi$ . Estenda  $f_{\#}$  por linearidade a  $f_{\#} : S_k(X) \rightarrow S_k(Y)$  e este induz o homomorfismo  $f_* : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$  nas homologias.

Definindo  $S_k(X, A) = S_k(X)/S_k(A)$  temos, exatamente como no caso simplicial,  $\mathcal{S}(X, A) = \{S_k(X, A), \partial_k\}_{k \geq 0}$  e  $H_k(X, A) = H_k(\mathcal{S}(X, A))$ , o operador bordo  $\partial : H_k(X, A) \rightarrow H_{k-1}(A)$ , e o homomorfismo  $f_*$  nas homologias.

À dimensão da parte livre do  $k$ -ésimo módulo de homologia singular com coeficientes inteiros ( $R = \mathbb{Z}$ ) damos o nome de *k-ésimo número de Betti singular*  $\beta_k$ . Dessa forma define-se a *característica de Euler* do espaço  $S$ , quando a soma está definida, por

$$\chi(S) = \sum_i (-1)^i \beta_i(S).$$

As definições de números de Betti reduzidos e característica de Euler reduzida são análogas ao caso simplicial.

Sejam  $X_1$  e  $X_2$  espaços topológicos,  $i_l : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_l$ ,  $j_l : X_l \hookrightarrow X_1 \cup X_2$  ( $l = 1, 2$ ) as inclusões e a seguinte sequência exata curta

$$0 \rightarrow \mathcal{S}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_{\#}} \mathcal{S}(X_1) \oplus \mathcal{S}(X_2) \xrightarrow{j_{\#}} \mathcal{S}(X_1) + \mathcal{S}(X_2) \rightarrow 0.$$

Se  $X_1$  e  $X_2$  são tais que  $X_1 \cup X_2 = \text{int}_{X_1 \cup X_2}(X_1) \cup \text{int}_{X_1 \cup X_2}(X_2)$ , então  $H_k(\mathcal{S}(X_1) + \mathcal{S}(X_2))$  pode ser substituído por  $H_k(X_1 \cup X_2)$  e temos a sequência abaixo, que é chamada *sequência exata de Mayer-Vietoris* de módulos de homologias singulares.

$$\cdots \xrightarrow{\delta_*} H_k(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} H_k(X_1) \oplus H_k(X_2) \xrightarrow{j_*} H_k(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\delta_*} H_{k-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} \cdots, \quad (7)$$

onde  $i_*(z) = (i_{1*}(z), i_{2*}(z))$  e  $j_*(z_1, z_2) = j_{1*}(z_1) + j_{2*}(z_2)$ , para  $z \in H_k(X_1 \cap X_2)$ ,  $z_1 \in H_k(X_1)$  e  $z_2 \in H_k(X_2)$ .

A exatidão dessa sequência implica a seguinte desigualdade nos números de Betti:

$$\beta_k(X_1 \cup X_2) \leq \beta_k(X_1) + \beta_k(X_2) + \beta_{k-1}(X_1 \cap X_2). \quad (8)$$

**1.1.2.4. Cohomologia singular.** O  $R$  módulo das  $k$  cocadeias singulares de  $X$  é definido por  $S^k(X) = \text{Hom}_R(S_k(X), R)$ , isto é, uma cocadeia singular de dimensão  $k$  é um homomorfismo  $R$ -linear  $c : S_k(X) \rightarrow R$ . Uma  $k$ -cocadeia é univocamente determinada por seus valores sobre os  $k$ -simplexos singulares. Assim,  $S^k(X)$  é isomorfo ao produto direto de  $R$ 's, tantos quantos são os  $k$ -simplexos singulares em  $X$ .

Defina o homomorfismo cobordo  $\delta^k : S^k(X) \rightarrow S^{k+1}(X)$  por  $\delta^k(c) = c\partial_{k+1}$ , onde  $\partial_{k+1}$  é o homomorfismo bordo das cadeias singulares, e o  $k$ ésimo módulo de cohomologia  $H^k(X)$  de  $X$  por

$$H^k(X) = \ker \delta^k / \text{im } \delta^{k-1}.$$

Se  $f : X \rightarrow Y$  é contínua sabemos que existe um homomorfismo induzido  $f_{\#} : S_k(X) \rightarrow S_k(Y)$ . Então definimos o homomorfismo  $f^{\#} : S^k(Y) \rightarrow S^k(X)$  por  $f^{\#}(c) = cf_{\#}$  que, por sua vez, induz um homomorfismo nas cohomologias  $f^* : H^k(Y) \rightarrow H^k(X)$ .

Definimos  $S^k(X, A) = \text{Hom}_R(S_k(X, A), R)$ , e tomamos o homomorfismo cobordo induzido (também denotado por  $\delta^k$ ); assim o  $k$ ésimo módulo de cohomologia de  $X$  módulo  $A$  é dado por  $H^k(X, A) = \ker \delta^k / \text{im } \delta^{k-1}$ .

Note que aqui temos a sequência exata curta de cocadeias

$$0 \rightarrow S^*(X, A) \xrightarrow{p^{\#}} S^*(X) \xrightarrow{i^{\#}} S^*(A) \rightarrow 0$$

induzida pela sequência exata curta de cadeias correspondente, e assim, como no caso das cadeias, existe uma sequência exata longa e um operador cobordo  $\delta : H^k(A) \rightarrow H^{k+1}(X, A)$ .

Agora, vamos dar uma idéia sem entrar em muitos detalhes de como o Teorema de Dualidade de Alexander implica o seguinte resultado. No que segue, poliedro significa uma união finita de poliedros convexos.

**TEOREMA 1.7.** *Se  $P$  é um poliedro fechado no  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), então*

$$\sum_{i=0}^n \beta_i(\mathbb{R}^n \setminus P) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(\hat{P}),$$

onde  $\hat{P} = P \cup \omega$  é a compactificação usual de  $P$ , com  $\omega$  "no infinito".

Sejam  $M$  uma  $n$ -variedade topológica orientada,  $A \subset M$  um subconjunto fechado e  $\mathcal{V}$  a família de todas as vizinhanças abertas  $V$  de  $A$  dirigida por inclusão reversa, isto é,  $V \leq V'$  se e somente se  $V' \subseteq V$ . Então  $\{H^k(V), j_V^{V'}\}$  é um sistema direto de módulos de homologia [13, Cap. 8], onde  $j_V^{V'}$  é o homomorfismo induzido pela inclusão  $i : V' \hookrightarrow V$ . Definimos  $\bar{H}^k(A) = \lim_{\rightarrow} H^k(V)$  ( $V \in \mathcal{V}$ ).

**TEOREMA 1.8 (Dualidade de Alexander).** *Sejam  $M$  uma  $n$  variedade conexa compacta orientada e  $A \subset M$  um fechado. Se  $k$  é um inteiro tal que  $H_k(M) = H_{k+1}(M) = 0$ , então*

$$\bar{H}^{n-k-1}(A) \cong H_k(M \setminus A).$$

Além disso,

- (1) se  $H_1(M; R) = 0$ , então  $\bar{H}^{n-1}(A; R) \cong \tilde{H}_0(M \setminus A; R)$ .  
(2)  $\bar{H}_0(A; R)$  contém um somando direto  $F$  isomorfo a  $R$ . Se  $H_{n-1}(M; R) = 0$  então  $\bar{H}_0(A)/F \cong H_{n-1}(M \setminus A; R)$ .

Uma referência para o teorema acima é [23].

A inclusão  $A \hookrightarrow V$  induz o homomorfismo  $H^k(V) \rightarrow H^k(A)$  e passando ao limite temos o homomorfismo (canônico)  $h: \bar{H}^k(A) \rightarrow H^k(A)$ . Suponha  $A$  fechado e triangulável. Então  $A$  é um retrato absoluto de uma vizinhança; lembrando que a variedade  $M$  é compacta e, portanto, [16, Teorema 26.17.4, pág. 225]  $M$  é retrato absoluto de uma vizinhança temos que [16, Prop. 27.1, pág. 230]  $h$  é um isomorfismo.

É fácil ver que a esfera  $S^n$  satisfaz as hipóteses do Teorema de Dualidade de Alexander, e é somente nela que estamos interessados. Da observação anterior e do Teorema 1.8 temos o resultado que nos interessa.

**COROLÁRIO 1.9.** *Para todo fechado triangulável  $A \subset S^n$  e todo  $k$  ( $1 \leq k \leq n-2$ ) temos  $H^{n-k-1}(A) \cong H_k(S^n \setminus A)$ .*

Usaremos, também, o corolário acima com o fato de que se  $A$  é um espaço topológico tal que  $H_k(A)$  é finitamente gerado para todo  $k$ , então os submódulos livres de  $H_k(A)$  e  $H^k(A)$  são isomorfos (veja [28, Cor. 4, pág. 244]). Portanto, se denotarmos a dimensão da parte livre de  $H^k(A)$  por  $\beta^k(A)$  temos que  $\beta^k(A) = \beta_k(A)$ .

**PROVA.** [Prova do Teorema 1.7] É sabido que se  $A$  é um aberto do  $\mathbb{R}^n$  então a homologia singular de  $A$  em dimensão  $n$  é trivial (veja [32, pág. 128, Lema 5.1]) e, portanto,  $\beta_n(\mathbb{R}^n \setminus P) = 0$ . Temos

$$\sum_{i=0}^n \beta_i(\mathbb{R}^n \setminus P) = \beta_0(\mathbb{R}^n \setminus P) + \beta_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus P) + \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i(\mathbb{R}^n \setminus P).$$

Note que  $\mathbb{R}^n \setminus P = \widehat{\mathbb{R}^n} \setminus \hat{P} \approx S^n \setminus \hat{P}$ , logo aplicamos o Corolário 1.9 e a observação que segue este corolário.

Do item (1) do Teorema 1.8 temos que  $\beta_0(\mathbb{R}^n \setminus P) = \tilde{\beta}_0(\mathbb{R}^n \setminus P) + 1 = \beta_{n-1}(\hat{P}) + 1$ , e de (2) temos que  $\beta_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus P) = \beta_0(\hat{P})$ . Finalmente,

$$\sum_{i=1}^{n-2} \beta_i(\mathbb{R}^n \setminus P) = \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i(\widehat{\mathbb{R}^n} \setminus \hat{P}) = \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i(\hat{P}).$$

□

### 1.3. Conjuntos parcialmente ordenados e topologia

A um conjunto parcialmente ordenado  $P$  associamos um complexo simplicial abstrato chamado *complexo da ordem  $P$*  denotado  $\Delta(P)$ . Este é um complexo simplicial cujos vértices são os elementos de  $P$  e os simplexes são as cadeias  $x_0 < x_1 < \dots < x_k$  em  $P$ . É fácil ver que se  $P$  e  $Q$  são conjuntos parcialmente ordenados e  $f: P \rightarrow Q$  é uma função entre os conjuntos que preserva comparabilidade então existe induzida uma função simplicial  $\Delta(f): \Delta(P) \rightarrow \Delta(Q)$ .

Um complexo simplicial abstrato  $\Delta$  tem naturalmente uma estrutura de ordem parcial dada pela relação de inclusão entre as faces. Denotamos esta ordem parcial por  $P(\Delta)$  e não é difícil ver que  $\|\Delta(P(\Delta))\| \approx \|\Delta\|$  (note que  $\|\Delta(P(\Delta))\|$  é a subdivisão baricêntrica de  $\|\Delta\|$ ).

Denotamos por  $\hat{P}$  o conjunto parcialmente ordenado obtido a partir de  $P$  adicionando um mínimo  $\hat{0}$  e um máximo  $\hat{1}$ .

Temos, da definição, que  $\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) = (\zeta)^{-1}(\hat{0}, \hat{1}) = (\delta + (\zeta \ \delta))^{-1}(\hat{0}, \hat{1})$ . Reescrevendo a última parte dessa igualdade, temos (veja notação na pág. 2)

$$\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) = (\delta \ (\zeta \ \delta) + (\zeta \ \delta)^2 \ \cdots)(\hat{0}, \hat{1}) = c_0 \ c_1 + c_2 \ \cdots,$$

onde  $c_i$  é o número de cadeias  $\hat{0} = x_0 < x_1 < \cdots < x_i = \hat{1}$ .

PROPOSIÇÃO 1.10 (Teorema de Hall). *Se  $P$  é uma ordem parcial, então*

$$\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) = \chi(\Delta(P)) \quad 1 = \tilde{\chi}(\Delta(P)).$$

Se  $\Delta$  é um complexo simplicial e  $S \in \Delta$  uma face, defina a *ligação de  $S$*  por

$$\text{Lg}(S) = \{U \in \Delta : U \cap S = \emptyset \text{ e } U \cup S \in \Delta\}.$$

Sejam  $P$  um conjunto parcialmente ordenado e  $x_1 < x_2 < \cdots < x_r = x$  e  $y = y_1 < y_2 < \cdots < y_t$  cadeias saturadas (isto é,  $y_{i+1}$  cobre  $y_i$  e  $x_{j+1}$  cobre  $x_j$ ) tal que  $x_1$  é minimal e  $y_t$  é maximal e  $x < y$  em  $P$ . Tome  $F = \{x_1, \dots, x, y, \dots, y_t\} \in \Delta(P)$ , então  $\text{Lg}(F)$  é o complexo da ordem  $\Delta(x, y)$  do intervalo aberto  $(x, y) = \{z \in P : x < z < y\}$ . Assim, temos da Proposição 1.10 a igualdade abaixo, que será muito útil no Capítulo 3.

$$\mu(x, y) = \tilde{\chi}(\Delta(x, y)) = \sum_i (1)^i \tilde{\beta}_i(\Delta(x, y)). \quad (9)$$

Quando nos referimos a propriedades topológicas de  $P$  de fato estamos nos referindo a propriedades do complexo da ordem de  $P$ .

#### 1.4. Árvores de decisão

Nessa seção vamos descrever um modelo de computação que usaremos para estudar os problemas que propomos. O esquema de vários algoritmos, em particular os que resolvem nossos problemas, pode ser representado por uma árvore: dada uma entrada, a partir da raiz realizamos certos testes que determinam de que modo caminhamos na árvore. Quando atingimos uma folha temos a saída do problema.

Uma vantagem desse tipo de representação é que ele fornece um dispositivo para determinar limitantes inferiores para complexidade do algoritmo. Uma cota inferior para a altura da árvore indica quantos testes devem ser realizados no pior caso durante a computação. Dessa forma, se conseguimos determinar uma cota inferior para a altura de uma árvore, podemos dizer que o problema não pode ser resolvido em número de passos menor que essa cota.

Como exemplo, considere o problema de ordenar  $n$  números distintos. Os testes realizados são comparações entre pares de elementos da entrada e o resultado do teste determina um dos filhos desse nó, no qual prosseguimos. As folhas são em número de pelo menos  $n!$ , uma para cada permutação da entrada. Podemos ver esse problema como dada uma permutação de  $[n]$  achar a sua inversa. Como a inversa é única temos que existem exatamente  $n!$  folhas numa árvore de decisão para o problema de ordenação. Como

a árvore é binária sua altura é pelo menos  $\log_2 n! = \Omega(n \log n)$ . Assim, qualquer algoritmo baseado em comparações requer pelo menos  $n \log n$  passos, a menos de uma constante multiplicativa.

Formalizando um pouco, seja  $P$  um problema,  $E$  o conjunto de entradas possíveis desse problema e  $S$  o conjunto de saídas (ou respostas) possíveis para esse problema. Uma *árvore de decisão* é uma árvore enraizada cujos nós internos têm  $d$  filhos, as folhas são rotuladas com elementos de  $S$ , as arestas têm rótulos em  $[d] = \{1, \dots, d\}$  e os nós internos são rotulados com elementos de uma família  $F$  de funções definidas em  $E$  que toma valores em  $[d]$ . O valor dessas funções num elemento de  $E$  indica, através da aresta rotulada com o valor da função, em qual dos filhos prosseguimos na execução do algoritmo conforme o modelo de árvore.

Considere agora o problema de computar uma função booleana de  $n$  variáveis. Rotulamos cada nó interno com uma das  $n$  variáveis da função, cada nó interno tem dois filhos e as arestas são rotuladas com 0 e 1 cada uma. As folhas também são rotuladas com 0 e 1 e nelas lemos a resposta para o cômputo da função com as atribuições nas variáveis dadas pelas arestas do único caminho de uma folha até a raiz, atribuindo à variável correspondente ao nó pai da aresta, o valor do rótulo dela.

É um exercício interessante provar a cota inferior: se  $f$  é uma função booleana de  $n$  variáveis não-constante e  $N$  o número de entradas para as quais o valor da  $f$  é 1 e se  $2^k$  é a maior potência de dois que divide  $N$ , então a profundidade de qualquer árvore de decisão que computa  $f$  é pelo menos  $n - k$ . Segue que se  $N$  é ímpar a profundidade de qualquer árvore é  $n$ .

O próximo resultado, generalizando o exercício acima, tem aplicação no Capítulo 3.

**PROPOSIÇÃO 1.11** (Best, van Emde Boas e Lenstra '74). *Sejam  $f$  uma função booleana de  $n$  variáveis e  $\phi_f(t) = \sum f(x_1, \dots, x_n) t^{x_1 + \dots + x_n}$  um polinômio em  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ , onde a soma é sobre todo elemento de  $\{0, 1\}^n$ . Se  $f$  pode ser computada por uma árvore de decisão de altura  $d$ , então  $\phi_f(t)$  é divisível por  $(t + 1)^{n-d}$ .*

**PROVA.** Sejam  $T$  uma árvore para  $f$  e  $w$  uma folha de  $T$  com rótulo 1 e profundidade  $p_w \leq d$ . Denote por  $f_T^{-1}(w)$  o conjunto de entradas que na árvore de decisão  $T$  param na folha  $w$ .

Se  $e_1(w)$  é o número de arestas do raiz  $w$  caminho em  $T$  rotuladas com 1, então temos que  $\binom{n-p_w}{i}$  entradas com quantidade de 1's igual a  $e_1(w) + i$  pertencem a  $f_T^{-1}(w)$ , para todo  $0 \leq i \leq n - p_w$ .

Portanto, a contribuição de cada folha  $w$  de  $T$  para o polinômio  $\phi_f(t)$  é

$$\sum_{i=0}^{n-p_w} \binom{n-p_w}{i} t^{e_1(w)+i} = t^{e_1(w)} \sum_{i=0}^{n-p_w} \binom{n-p_w}{i} t^i = t^{e_1(w)} (1+t)^{n-p_w},$$

que é divisível por  $(t + 1)^{n-d}$ , pois  $p_w \leq d$ . □

Toda árvore de decisão pode ser pensada como um jogo de perguntas entre dois jogadores X e Y. O jogador X pensa em um elemento  $a \in E$  e a tarefa do jogador Y é determinar  $f(a)$  pondo perguntas a X. Estas perguntas não podem ser arbitrárias; Y somente pode perguntar o valor de alguma função teste de  $F$ .

Quantas questões são suficientes para Y computar a resposta? A estratégia de Y corresponde à árvore de decisão e X joga de forma ótima se com suas respostas ele dirige Y a um nó mais longe da raiz, enquanto Y tenta selecionar as questões que o capacitam a decidir tão rápido quanto possível o valor de  $f(a)$ . A complexidade é o número mínimo de testes necessários para Y computar  $f(a)$  supondo que os dois jogam de forma ótima.





## Árvores de Decisão Lineares, Arranjos de Subespaços, Funções de Möbius e Cotas Inferiores

Neste capítulo estudamos, seguindo [7], o problema de pertinência em uma união finita de poliedros convexos no  $\mathbb{R}^n$  com o objetivo de determinar cotas inferiores para a complexidade de alguns problemas computacionais.

Na primeira seção daremos as definições básicas e uma cota inferior para o número de folhas de uma árvore de decisão linear em função da soma dos números de Betti do poliedro. Depois derivamos um análogo combinatório desse resultado, usando a fórmula de Goresky e MacPherson, para o número mínimo de folhas de uma árvore de decisão linear para pertinência num poliedro apresentado como a união dos membros de um arranjo de subespaços lineares.

Na segunda seção estimamos a função de Möbius de duas subordens do reticulado das partições de  $[n]$ , uma com restrição no número de blocos das partições e a outra restringindo o tamanhos dos blocos. O motivo dessas estimativas é sua utilidade na seção seguinte, onde apresentamos aplicações dos resultados abstratos aos problemas concretos dos  $k$ -iguais e  $k$ -distintos. Na última seção apresentamos algoritmos ótimos para esses problemas.

### 2.1. Árvores de decisão lineares, uma cota inferior topológica e uma versão combinatória para arranjos de subespaços

Por todo este capítulo entendemos por *poliedro convexo* o conjunto das soluções de um sistema finito de inequações lineares, por *poliedro* a união de uma família finita de poliedros convexos e tomamos os grupos de homologia e cohomologia com coeficientes inteiros. Também, todos os espaços terão tipo homotópico de complexo simplicial finito e, portanto, a característica de Euler e a soma dos números de Betti estão bem definidos. Lembremos (veja pág. 11) que essa hipótese sobre nossos espaços implica que para qualquer espaço  $S$ , neste capítulo,  $\beta_q(S) = \beta^q(S)$  para todo  $q$  inteiro. Além disso, em qualquer menção ao  $\mathbb{R}^n$  estamos supondo  $n \geq 2$ .

Dados  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  queremos decidir se  $x \in P$ . Nosso modelo de computação para esse problema é a *árvore de decisão linear*: uma árvore ternária onde a cada nó interno  $v$  está associado uma função afim  $l_v(x) = \sum_i a_i x_i + b$  e as arestas que conectam  $v$  a seus filhos são rotuladas com  $<, =, >$ . A cada passo testamos se  $l_v(x) \text{ R } 0$ , onde  $\text{R} \in \{<, =, >\}$ , e seguimos pela aresta apropriada, começando da raiz até chegar a uma folha. As folhas são rotuladas com “Sim” ou “Não” e respondem corretamente à pergunta “ $x \in P$ ?” para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Note que uma árvore de decisão linear reconhece  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  se e somente se  $P$  é um poliedro.

Como exemplo, considere os seguintes subespaços lineares do  $\mathbb{R}^3$ :  $H_0 = \{(x, y, z): z = 0\}$ ,  $H_1 = \{(x, y, z): x = 0\}$ ,  $H_2 = \{(x, y, z): x - y = 0\}$ , e  $H_3 = \{(x, y, z): x + y = 0\}$ . Uma árvore de decisão linear para  $P = H_0 \cap (\bigcup_{i=1}^3 H_i)$  é mostrada na figura 1, onde o nó  $i$  corresponde ao teste  $f_i(w) = \langle c_i, w \rangle$ ,

para  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $w \in \mathbb{R}^3$ , e  $c_0 = (0, 0, 1)$ ,  $c_1 = (1, 0, 0)$ ,  $c_2 = (1, 1, 0)$  e  $c_3 = (1, 1, 0)$ . Claramente,  $\ker f_i = H_i$  ( $0 \leq i \leq 3$ ).

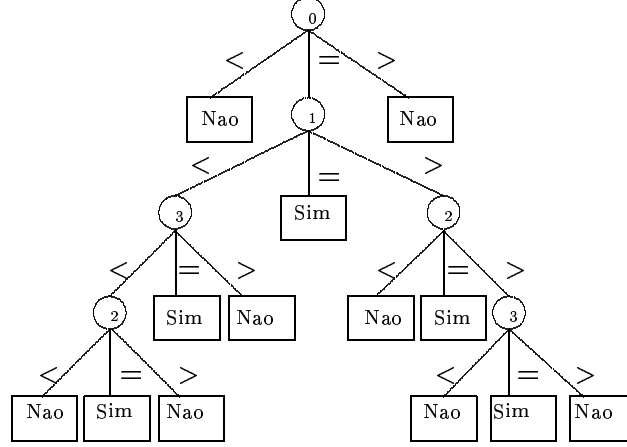


FIGURA 1. Exemplo de uma árvore de decisão linear

Vamos reescrever esse problema tomando  $\Omega$  um subconjunto aberto no  $\mathbb{R}^n$ . Agora, desejamos testar os pontos de  $\Omega$  para pertinência em  $P$ .

Se  $T$  é uma árvore de decisão linear para  $P$  denotamos por  $P_w$  o conjunto de pontos de  $\Omega$  que em  $T$  terminam a computação na folha  $w$ . No nosso exemplo, para  $\Omega = \mathbb{R}^3$  e  $T$  a árvore da figura 1, se  $w$  é a folha do caminho 0, 1, 2, 3, “Sim” então  $P_w$  é a semi-reta  $(\lambda, \lambda, 0)$  para  $\lambda > 0$ ; se  $w$  é a folha do caminho 0, 1, 3, “Sim” então  $P_w$  é a semi-reta  $(\lambda, \lambda, 0)$ , para todo  $\lambda < 0$ ; se  $w$  é a folha do caminho 0, 1, 2, 3, “Nãõ” então  $P_w$  é o aberto de  $(x, y, 0)$  dado por  $x > |y|$ .

Denotamos por  $L^+$  (resp.,  $L^-$ ) o conjunto de folhas “Sim” (resp., “Nãõ”) de  $T$ . Note que a dimensão de  $P_w$  está bem definida pois este é aberto no seu fecho afim. De fato, o fecho afim  $\mathbb{A}_w$  de  $P_w$  é dado pela intersecção dos hiperplanos  $l_u(x) = 0$ , onde  $l_u$  é um teste que resulta em igualdade no raiz  $w$  caminho em  $T$ . Agora, basta notar que  $P_w \subseteq \mathbb{A}_w$  é dado por um sistema linear (finito) de desigualdades estritas.

Chamamos  $P_w$  de *célula correspondente à folha  $w$* ; se  $\dim(P_w) = n$  dizemos  $n$ -célula. Além dessas, temos as seguintes definições para  $T$ ,  $\Omega$  e  $P$  como acima.

- $l_i^+(T) = \#\{w \in L^+ : \dim P_w = i\}$ , cuja soma em  $i$ , para  $0 \leq i \leq n$ , denotamos por  $l^+(T)$ ;
- $l_i^-(T) = \#\{w \in L^- : \dim P_w = i\}$ , cuja soma em  $i$ , para  $0 \leq i \leq n$ , denotamos por  $l^-(T)$ ;

Dados  $P$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  como acima, definimos

- $l_i^+(P; \Omega) = \min\{l_i^+(T) : T \text{ é árvore de decisão linear para } P, \Omega\}$ ,
- $l^+(P; \Omega) = \min\{l^+(T) : T \text{ é árvore de decisão linear para } P, \Omega\}$ ;
- $l_i^-(P; \Omega) = \min\{l_i^-(T) : T \text{ é árvore de decisão linear para } P, \Omega\}$ ,
- $l^-(P; \Omega) = \min\{l^-(T) : T \text{ é árvore de decisão linear para } P, \Omega\}$ .

**2.2.1.1. Uma cota topológica.** Estabelecidas as notações e definições, temos a seguinte cota inferior topológica para o número de folhas de qualquer árvore de decisão linear para um poliedro  $P$ .

TEOREMA 2.1. [7, Björner, Lovász '94] *Sejam  $P$  um poliedro fechado e  $\Omega$  um aberto convexo não vazio, ambos no  $\mathbb{R}^n$ . Então, para todo  $0 \leq i \leq n$ , temos*

$$l_{n-i}^+(P; \Omega) \geq \tilde{\beta}_{i-1}(\Omega \setminus P) \quad e \quad l_{n-i}^-(P; \Omega) \geq \beta_i(\Omega \setminus P).$$

PROVA. Seja  $T$  uma árvore de decisão linear para  $P$  e  $\Omega$ . As provas serão por indução no número de vértices de  $T$  e antes de começarmos, vamos ver algumas definições.

Se  $T$  é uma árvore com mais de um vértice, denotamos por  $r(x)$  o teste feito na raiz de  $T$ . Definimos

$$\begin{aligned} \Omega^{>0} &= \{x \in \Omega : r(x) > 0\}, \\ \Omega^{<0} &= \{x \in \Omega : r(x) < 0\}, \\ \Omega^{=0} &= \{x \in \Omega : r(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Ainda, denotamos por  $T^>$ ,  $T^<$  e  $T^=$  as subárvores de  $T$ , onde  $T^a$ , para  $a \in \{>, <, =\}$ , é a subárvore cuja raiz é adjacente à raiz de  $T$  pela aresta  $a$ .

Como  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : r(x) = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ , a subárvore  $T^=$  é uma árvore de decisão linear para  $P \cap H$  e  $\Omega^{=0}$ , a subárvore  $T^>$  é uma árvore de decisão linear para  $P$  e  $\Omega^{>0}$  e  $T^<$  é uma árvore de decisão linear para  $P$  e  $\Omega^{<0}$ .

Agora, vamos provar  $l_{n-i}^+(T) \geq \tilde{\beta}_{i-1}(\Omega \setminus P)$ , por indução no número de vértices. Se  $T$  tem um único vértice e essa folha tem rótulo “Não” estamos em casa, pois  $\Omega \setminus P = \Omega$  e de  $\Omega$  convexo temos que  $\tilde{\beta}_i(\Omega) = 0$  para todo  $i$ . Suponha que o rótulo é “Sim”. Então  $\Omega \subseteq P$  e

$$l_{n-i}^+(T) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

pois de  $\Omega$  aberto não-vazio temos que  $\dim(\Omega) = n$ . Ainda,

$$\tilde{\beta}_{i-1}(\Omega \setminus P) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

pois  $\Omega \setminus P = \emptyset$  e  $\tilde{H}_{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z}$  e  $\tilde{H}_i(\emptyset) = 0$  se  $i \neq -1$ .

Suponha que  $T$  tem mais de um vértice. Então, de acordo com as definições que estabelecemos no começo desta demonstração, temos

$$\begin{aligned} l_{n-i}^+(T) &= l_{n-i}^+(T^>) + l_{n-i}^+(T^<) + l_{n-i}^+(T^=) \\ &\geq l_{n-i}^+(P; \Omega^{>0}) + l_{n-i}^+(P; \Omega^{<0}) + l_{n-1-i+1}^+(P \cap H; \Omega^{=0}) \\ &\geq \tilde{\beta}_{i-1}(\Omega^{>0} \setminus P) + \tilde{\beta}_{i-1}(\Omega^{<0} \setminus P) + \tilde{\beta}_{i-2}(\Omega^{=0} \setminus P), \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade segue da definição e a segunda por hipótese de indução. Vamos mostrar que

$$\tilde{\beta}_{i-1}(\Omega \setminus P) \leq \tilde{\beta}_{i-1}(\Omega^{>0} \setminus P) + \tilde{\beta}_{i-1}(\Omega^{<0} \setminus P) + \tilde{\beta}_{i-2}(\Omega^{=0} \setminus P), \quad (10)$$

e, portanto, teremos  $l_{n-i}^+(T) \geq \tilde{\beta}_{i-1}(\Omega \setminus P)$ .

Suponha  $\Omega^{=0} \setminus P$  não-vazio e tome, para todo  $x$  em  $\Omega^{=0} \setminus P$ , a bola aberta  $O_x$  de centro  $x$  e tal que  $O_x \subseteq \Omega \setminus P$ .

Ponha  $C = \bigcup O_x$ , onde a união é tomada sobre todo  $x \in \Omega^{=0} \setminus P$ . Dessa forma,  $\Omega^{=0} \setminus P$  é um retrato por deformação forte de  $C$ , com a retração sendo a projeção dos pontos de  $C$  em  $\Omega^{=0} \setminus P$  na direção normal a  $H$ . Ponha  $A^> = (\Omega^{>0} \setminus P) \cup C$  e  $A^< = (\Omega^{<0} \setminus P) \cup C$ .

De  $A^> \cup A^< = \text{int}_{A^> \cup A^<}(A^>) \cup \text{int}_{A^> \cup A^<}(A^<)$  temos a seguinte sequência exata de Mayer-Vietoris (veja pág. 9):

$$\dots \xrightarrow{\delta_*} \tilde{H}_{i-1}(A^> \cap A^<) \xrightarrow{l_*} \tilde{H}_{i-1}(A^>) \oplus \tilde{H}_{i-1}(A^<) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_{i-1}(A^> \cup A^<) \xrightarrow{\delta_*} \tilde{H}_{i-2}(A^> \cap A^<) \xrightarrow{l_*} \dots,$$

donde, pela equação 8 na página 9, temos

$$\tilde{\beta}_{i-1}(A^> \cup A^<) \leq \tilde{\beta}_{i-1}(A^>) + \tilde{\beta}_{i-1}(A^<) + \tilde{\beta}_{i-2}(A^> \cap A^<). \quad (11)$$

Agora, basta notar que  $A^>$  é homotopicamente equivalente a  $\Omega^{>0} \setminus P$ . De fato,  $(\Omega^{>0} \setminus P) \setminus C$  é um retrato por deformação forte de  $A^>$  pela projeção na direção normal a  $H$ ; por outro lado  $(\Omega^{>0} \setminus P) \setminus C$  é um retrato por deformação forte de  $\Omega^{>0} \setminus P$  pela projeção na direção normal a  $H$ . Como equivalência homotópica é uma relação transitiva,  $A^>$  tem o mesmo tipo homotópico de  $\Omega^{>0} \setminus P$ . Da mesma forma  $A^<$  é homotopicamente equivalente a  $\Omega^{<0} \setminus P$ . A equação 10 segue da equação 11 pelas equivalências homotópicas

- (i)  $A^> \cup A^< = (\Omega^{>0} \setminus P) \cup (\Omega^{<0} \setminus P) \cup C = \Omega \setminus P$ ,
- (ii)  $A^> \simeq \Omega^{>0} \setminus P$ ,
- (iii)  $A^< \simeq \Omega^{<0} \setminus P$ ,
- (iv)  $A^> \cap A^< = C \simeq \Omega^{=0} \setminus P$ ,

e do fato de que números de Betti são invariantes por equivalência homotópica.

Para terminarmos esta parte da prova, falta vermos o caso  $\Omega^{=0} \setminus P$  vazio. Neste caso, vale a igualdade  $\tilde{\beta}_{i-1}(\Omega \setminus P) = \tilde{\beta}_{i-1}(\Omega^{>0} \setminus P) + \tilde{\beta}_{i-1}(\Omega^{<0} \setminus P)$ , pois  $\Omega \setminus P$  é união de abertos disjuntos e  $\tilde{\beta}_{-1}(\emptyset) = 1$ . Isso completa a prova no caso das folhas “Sim”.

Para provar a segunda desigualdade,  $l_{n-i}^-(T) \geq \beta_i(\Omega \setminus P)$ , usamos indução no número de vértices como no caso anterior. Se esse número é um e a folha tem rótulo “Sim” não há o que fazer. Se o rótulo da folha for “Não” então  $\Omega \cap P = \emptyset$  e temos de  $\Omega$  aberto que  $l_n^-(T) = 1$  e de  $\Omega$  convexo que  $\beta_0(\Omega) = 1$ .

Supomos, agora, que  $T$  possui mais que um vértice. Como no caso anterior temos

$$\begin{aligned} l_{n-i}^-(T) &= l_{n-i}^-(T^>) + l_{n-i}^-(T^<) + l_{n-i}^-(T^=) \\ &\geq l_{n-i}^-(P; \Omega^{>0}) + l_{n-i}^-(P; \Omega^{<0}) + l_{n-1-i+1}^-(P \cap H; \Omega^{=0}) \\ &\geq \beta_i(\Omega^{>0} \setminus P) + \beta_i(\Omega^{<0} \setminus P) + \beta_{i-1}(\Omega^{=0} \setminus P), \end{aligned}$$

e,

$$\dots \xrightarrow{\delta_*} H_i(A^> \cap A^<) \xrightarrow{l_*} H_i(A^>) \oplus H_i(A^<) \xrightarrow{j_*} H_i(A^> \cup A^<) \xrightarrow{\delta_*} H_{i-1}(A^> \cap A^<) \xrightarrow{l_*} \dots,$$

donde,

$$\beta_i(A^> \cup A^<) \leq \beta_i(A^>) + \beta_i(A^<) + \beta_{i-1}(A^> \cap A^<).$$

Essa última implica, pelas equivalências homotópicas (i) (iv) acima, a desigualdade

$$\beta_i(\Omega \setminus P) \leq \beta_i(\Omega^{>0} \setminus P) + \beta_i(\Omega^{<0} \setminus P) + \beta_{i-1}(\Omega^{=0} \setminus P),$$

e, portanto,  $l_{n-i}^-(T) \geq \beta_i(\Omega \setminus P)$ . □

Escrevendo  $l^+(P)$  para  $l^+(P; \mathbb{R}^n)$  e  $l^-(P)$  para  $l^-(P; \mathbb{R}^n)$ , segue imediatamente do teorema acima que se  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  é um poliedro fechado, então

$$l^+(P) \geq 1 + \sum_i \beta_i(\mathbb{R}^n \setminus P) \quad \text{e} \quad l^-(P) \geq \sum_i \beta_i(\mathbb{R}^n \setminus P).$$

COROLÁRIO 2.2. [7, Björner, Lovász '94] *Para qualquer poliedro fechado  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  e sua compactificação  $\hat{P}$ ,*

$$l^+(P) \geq 1 + \sum_i \beta_i(\hat{P}) \quad e \quad l^-(P) \geq \sum_i \beta_i(\hat{P}).$$

PROVA. Imediato das desigualdades acima e do Teorema 1.7, página 10. □

**2.2.1.2. Uma cota combinatória para arranjos de subespaços.** A partir de agora, vamos traduzir os resultados da Seção 2.2.1.1 para uma forma combinatória.

Um *arranjo*  $\mathcal{A} = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$  é uma família finita de subconjuntos próprios não-vazios do  $\mathbb{R}^n$ . Assumimos que para todos  $i, j \in [m]$  com  $i \neq j$  temos que  $K_i \not\subseteq K_j$ . Para um tal arranjo  $\mathcal{A}$  definimos

$$V_{\mathcal{A}} = \bigcup_{i=1}^m K_i \quad e \quad M_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}^n \setminus V_{\mathcal{A}}.$$

Pomos  $\hat{V}_{\mathcal{A}} = V_{\mathcal{A}} \cup \{\omega\}$  a compactificação usual de  $V_{\mathcal{A}}$  com  $\omega$  “no infinito”. Note que se  $K_i$  é poliedro convexo para todo  $i \in [m]$ , então  $V_{\mathcal{A}}$  e  $M_{\mathcal{A}}$  são poliedros.

Para um arranjo  $\mathcal{A}$  definimos o *semi reticulado das intersecções* de  $\mathcal{A}$ , denotado por  $L_{\mathcal{A}}$ , como o conjunto parcialmente ordenado das intersecções não-vazias de elementos de  $\mathcal{A}$  ordenados por inclusão reversa, isto é, em  $(L_{\mathcal{A}}, \leq)$  temos  $A \leq B$  se e somente se  $B \subseteq A$ . Note que  $L_{\mathcal{A}}$  é um  $\wedge$ -semi-reticulado, com o menor elemento  $\hat{0} = \mathbb{R}^n$ . Se  $\bigcap_i K_i \neq \emptyset$  então  $L_{\mathcal{A}}$  é um reticulado com maior elemento  $\hat{1} = \bigcap_i K_i$ . Seguindo nosso exemplo da página 16, tome o arranjo de hiperplanos  $\mathcal{A}_0 = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ . O reticulado das intersecções  $L_{\mathcal{A}_0}$  do arranjo  $\mathcal{A}_0$  é mostrado na figura 2.

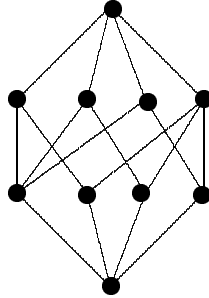


FIGURA 2. Diagrama de Hasse do reticulado  $L_{\mathcal{A}_0}$

Agora, vamos assumir um resultado devido a Goresky e MacPherson (veja [14, pág. 238]), relacionando a topologia de  $M_{\mathcal{A}}$  com a ordem  $L_{\mathcal{A}}$ . Abaixo, denotamos por  $\tilde{H}^i$  grupos de cohomologia singulares reduzidos, por  $\tilde{H}_i$  grupos de homologia simplicial reduzidos, e por  $\Delta(\hat{0}, x)$  o complexo da ordem do intervalo aberto  $(\hat{0}, x) = \{y \in L_{\mathcal{A}} : \hat{0} < y < x\}$  contido em  $L_{\mathcal{A}}$ .

TEOREMA 2.3. [14, Goresky, MacPherson '78] *Seja  $\mathcal{A}$  um arranjo de subespaços afins no  $\mathbb{R}^n$ . Então*

$$\tilde{H}^i(M_{\mathcal{A}}) \cong \bigoplus_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_{\mathcal{A}}}} \tilde{H}_{n - \dim(x) - 2 - i}(\Delta(\hat{0}, x)).$$

NOTA 2.4. A demonstração desse resultado em [14] é baseada em teoria de Morse. Porém, ele também segue da seguinte equivalência homotópica demonstrada, via diagrama de espaços, por Ziegler e Živaljević (veja [38]).

$$\widehat{V}_{\mathcal{A}} \simeq \bigvee_{\substack{x \in L_{\mathcal{A}} \\ x \neq \hat{0}}} (\Delta(\hat{0}, x) * S^{\dim(x)}),$$

onde  $\bigvee$  denota o buquê (“wedge”) e  $*$  denota a junção (“join”) de espaços.

COROLÁRIO 2.5. [7, Björner, Lovász '94] *Se  $\mathcal{A}$  é um arranjo de subespaços afins no  $\mathbb{R}^n$  então*

- (i)  $\tilde{\beta}_i(\widehat{V}_{\mathcal{A}}) = \tilde{\beta}^{n-i-1}(M_{\mathcal{A}}) = \sum_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_{\mathcal{A}}} \tilde{\beta}_{i-\dim(x)-1}(\Delta(\hat{0}, x))$ , e
- (ii)  $\chi(\widehat{V}_{\mathcal{A}}) - 1 = (-1)^{n-1}(\chi(M_{\mathcal{A}}) - 1) = \sum_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_{\mathcal{A}}} (-1)^{\dim(x)+1} \tilde{\chi}(\Delta(\hat{0}, x))$ .

PROVA. A prova de (i) é imediata do Corolário 1.9 (veja pág. 11) e da fórmula de Goresky e MacPherson.

A primeira igualdade de (ii) segue da definição de característica de Euler e do Corolário 1.9:

$$\begin{aligned} \chi(\widehat{V}_{\mathcal{A}}) - 1 &= \sum_i (-1)^i \tilde{\beta}_i(\widehat{V}_{\mathcal{A}}) = \sum_i (-1)^i \tilde{\beta}^{n-i-1}(M_{\mathcal{A}}) \\ &= (-1)^{n-1} \sum_i (-1)^i \tilde{\beta}^i(M_{\mathcal{A}}) = (-1)^{n-1}(\chi(M_{\mathcal{A}}) - 1). \end{aligned}$$

A segunda igualdade segue tomando a soma alternada em  $i$  na igualdade

$$\tilde{\beta}_i(\widehat{V}_{\mathcal{A}}) = \sum_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_{\mathcal{A}}} \tilde{\beta}_{i-\dim(x)-1}(\Delta(\hat{0}, x)).$$

No lado esquerdo teremos  $\chi(\widehat{V}_{\mathcal{A}}) - 1$  e no lado direito vamos ficar com

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_{\mathcal{A}}} (-1)^i \tilde{\beta}_{i-\dim(x)-1}(\Delta(\hat{0}, x)) &= \sum_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_{\mathcal{A}}} (-1)^{\dim(x)+1} \sum_i (-1)^{i-\dim(x)-1} \tilde{\beta}_{i-\dim(x)-1}(\Delta(\hat{0}, x)) \\ &= \sum_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_{\mathcal{A}}} (-1)^{\dim(x)+1} \tilde{\chi}(\Delta(\hat{0}, x)). \end{aligned}$$

□

A vantagem de se expressar os números de Betti de  $\widehat{V}_{\mathcal{A}}$  e  $M_{\mathcal{A}}$  em termos dos números de Betti de conjuntos parcialmente ordenados é que esses invariantes topológicos no primeiro caso são, em geral, difíceis de calcular, mas no segundo caso podemos usar a bem estabelecida teoria das funções de Möbius.

Terminamos esta seção com o seguinte resultado, com cotas inferiores combinatórias para o problema de pertinência.

TEOREMA 2.6. [7, Björner, Lovász '94] *Se  $\mathcal{A}$  é um arranjo de subespaços lineares no  $\mathbb{R}^n$ , então*

$$l^+(V_{\mathcal{A}}) \geq |\mu_{L_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, \hat{1})| \quad e \quad l^-(V_{\mathcal{A}}) \geq |\mu_{L_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, \hat{1})|.$$

PROVA. Dos Corolários 2.2 e 2.5(i) juntos com a equação (Seção 1.3, eq. 9)

$$\mu(x, y) = \sum_i \binom{i}{x} \tilde{\beta}_i(\Delta(x, y)),$$

e escrevendo  $\mu$  para  $\mu_{L_{\mathcal{A}}}$ , temos

$$\begin{aligned} l^-(V_{\mathcal{A}}) &\geq 1 + \sum_i \tilde{\beta}_i(\hat{V}_{\mathcal{A}}) = 1 + \sum_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_{\mathcal{A}}}} \sum_i \tilde{\beta}_{i-\dim(x)-1}(\Delta(\hat{0}, x)) \\ &\geq 1 + \sum_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_{\mathcal{A}}}} |\mu(\hat{0}, x)| = \sum_{x \in L_{\mathcal{A}}} |\mu(\hat{0}, x)| > \sum_{\substack{x < \hat{1} \\ x \in L_{\mathcal{A}}}} |\mu(\hat{0}, x)| \\ &\geq \left| \sum_{\substack{x < \hat{1} \\ x \in L_{\mathcal{A}}}} \mu(\hat{0}, x) \right| = |\mu(\hat{0}, \hat{1})|. \end{aligned}$$

Para a cota inferior do número de folhas “Sim” a demonstração é a mesma.  $\square$

Por fim, registramos que em muitos lugares na literatura, arranjo de subespaços lineares é chamado *central* e arranjos de subespaços afins é chamado *não central*.

## 2.2. A função de Möbius de duas subordens de $\Pi_n$

**2.2.2.1. A subordem  $\Pi_{n,T}$ .** Seja  $T$  um subconjunto dos inteiros positivos tal que  $1 \in T$ . Denotamos por  $\Pi_{n,T}$  a subordem de  $\Pi_n$  formada pelos elementos cujos blocos têm tamanho em  $T$ . Convencionamos que  $\mu_{n,T} = \mu_{\Pi_{n,T}}$ . Convencionamos também que  $\mu_T(n) = \mu_{n,T}(\hat{0}, \hat{1})$  se  $n \in T$ , e que  $\mu_{n,T}(\sigma, \pi) = 0$  se algum de  $\sigma$  ou  $\pi$  não pertence a  $\Pi_{n,T}$ .

Neste momento, motivados pelo problema dos  $k$ -iguais, estamos interessados no caso  $T = \{1, k, k+1, \dots, n\}$  e nosso objetivo nessa seção é provar o Teorema 2.12 (pág. 25). Denotamos a subordem  $\Pi_{n,T}$  para tal  $T$  por  $\Pi_{n,k}$ . Como acima, escrevemos  $\mu_{n,k}$  para  $\mu_{\Pi_{n,k}}$  e escrevemos  $\mu_k(n)$  para  $\mu_{n,k}(\hat{0}, \hat{1})$ . É conveniente estendermos a definição de  $\mu_k(n)$  para quando  $1 \leq n < k$  pondo  $\mu_k(1) = 1$  e  $\mu_k(2) = \mu_k(3) = \dots = \mu_k(k-1) = 0$ .

Na verdade,  $\Pi_{n,k}$  é um reticulado com sup como em  $\Pi_n$  e com inf como em  $\Pi_n$  seguido da quebra de blocos de tamanho menor que  $k$  em blocos unitários.

Definimos para todo  $\pi \in \Pi_n$

$$s_k(\pi) = \sum_{\sigma \leq \pi} \mu_{n,k}(\hat{0}, \sigma),$$

e também,  $s_k(n) = s_k(\hat{1})$  e  $s_k(0) = 1$ .

Definimos o *polinômio* (em  $t$ ) *característico* de  $\Pi_{n,k}$  por

$$\phi_k(n, t) = \sum_{\pi \in \Pi_n} \mu_{n,k}(\hat{0}, \pi) t^{b(\pi)},$$



onde  $b(\pi)$  denota o número de blocos de  $\pi$ . Também definimos  $\phi_k(0, t) = 1$ . Note que se  $n > 0$  temos

$$\phi_k(n, 0) = 0, \quad \frac{d}{dt} \phi_k(n, t) \Big|_{t=0} = \mu_k(n), \quad \phi_k(n, 1) = s_k(n).$$

Ponha  $T^* = \{1, 2, \dots, k-1\}$ .

**PROPOSIÇÃO 2.7.** [7, Björner, Lovász '94] *Se  $\pi \notin \Pi_{n, T^*}$ , isto é, se  $\pi$  tem pelo menos um bloco de tamanho em  $T \setminus \{1\}$ , então  $s_k(\pi) = 0$ .*

**PROVA.** Para  $B \subseteq [n]$ , com  $|B| \geq 2$ , denote por  $(B)$  a partição de  $[n]$  cujo único bloco não-unitário é  $B$ . Escreva  $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_r\} \in \Pi_n$ , onde os  $B_i$ 's são os blocos que compõem a partição  $\pi$ . Suponha  $|B_j| \geq k$  para algum  $j$ .

Temos que vale o seguinte isomorfismo (veja página 3):

$$[\hat{0}, \pi] \cap \Pi_{n, k} \cong \prod_{i=1}^r [\hat{0}, (B_i)] \cap \Pi_{n, k}, \quad \text{onde os intervalos estão em } \Pi_n.$$

À partição  $\sigma \in [\hat{0}, \pi] \cap \Pi_{n, k}$  corresponde, pelo isomorfismo, a  $r$ -upla  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \in \prod_i [\hat{0}, (B_i)] \cap \Pi_{n, k}$ , onde  $\sigma_i$  é o modo pelo qual o bloco  $B_i$  é decomposto em blocos de  $\sigma$ , isto é,  $\sigma_i = \sigma \wedge (B_i)$ .

Logo, ficamos com

$$\begin{aligned} s_k(\pi) &= \sum_{\sigma \leq \pi} \mu_{n, k}(\hat{0}, \sigma) \\ &= \sum_{\sigma \leq \pi} \mu_{n, k}(\hat{0}, \sigma \wedge (B_1)) \mu_{n, k}(\hat{0}, \sigma \wedge (B_2)) \dots \mu_{n, k}(\hat{0}, \sigma \wedge (B_r)) \\ &= \sum_{\sigma_1 \leq (B_1)} \mu_{n, k}(\hat{0}, \sigma_1) \sum_{\sigma_2 \leq (B_2)} \mu_{n, k}(\hat{0}, \sigma_2) \dots \sum_{\sigma_r \leq (B_r)} \mu_{n, k}(\hat{0}, \sigma_r). \end{aligned}$$

Por hipótese,  $|B_j| \geq k$  para algum  $j$ . Logo, pela definição da função de Möbius  $\sum_{\sigma_j \leq (B_j)} \mu_{n, k}(\hat{0}, \sigma_j) = 0$ .  $\square$

Portanto, para todo  $\pi \in \Pi_n$  temos que  $s_k(\pi) = 0$  a menos que todo bloco de  $\pi$  tenha tamanho menor que  $k$ .

**NOTA 2.8.** Temos, ainda, que se  $n \geq k$  então  $s_k(n) = 0$  e se  $n < k$  então  $s_k(n) = s_k(\hat{1}) = \sum \mu_{n, k}(\hat{0}, \sigma) = \mu_{n, k}(\hat{0}, \hat{0}) = 1$ . Neste caso,  $s_k(n)$  é a função característica de  $T^*$ .

**PROPOSIÇÃO 2.9.** [7, Björner, Lovász '94] *Temos a seguinte recursão para  $\phi_k$ :*

$$\phi_k(n, t) = t \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} \mu_k(m) \phi_k(n-m, t).$$

**PROVA.** Sejam  $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_r\} \in \Pi_n$  e  $j \in [r]$  tal que  $n \in B_j$ . Tome  $\pi' = (B_j)$  e  $\pi''$  a partição de  $[n]$  formada pelo bloco  $[n] \setminus B_j$  e pelos blocos unitários dados pelos elementos de  $B_j$ . Note que  $b(\pi) = b(\pi'') + 1$ .

Então  $[\hat{0}, \pi] \cap \Pi_{n,k} \cong ([\hat{0}, \pi'] \cap \Pi_{n,k}) \times ([\hat{0}, \pi''] \cap \Pi_{n,k})$  e  $\mu_{n,k}(\hat{0}, \pi) = \mu_{n,k}(\hat{0}, \pi')\mu_{n,k}(\hat{0}, \pi'')$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} \phi_k(n, t) &= \sum_{\pi} \mu_{n,k}(\hat{0}, \pi) t^{b(\pi)} \\ &= \sum_{\pi} \mu_{n,k}(\hat{0}, \pi') \mu_{n,k}(\hat{0}, \pi'') t^{b(\pi)} \\ &= \sum_{B \subseteq [n], n \in B} \mu_{n,k}(\hat{0}, (B)) t \sum_{\pi: \pi'=(B)} \mu_{n,k}(\hat{0}, \pi'') t^{b(\pi'') - B} \\ &= \sum_{B \subseteq [n], n \in B} \mu_{n,k}(\hat{0}, (B)) t \phi_k(n - |B|, t) \\ &= t \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} \mu_{n,k}(m) \phi_k(n-m, t). \end{aligned}$$

□

Se tomarmos  $t = 1$  na Proposição acima, temos a seguinte recursão para  $s_k(n)$ :

$$s_k(n) = \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} \mu_{n,k}(m) s_k(n-m).$$

Vamos tratar a recorrência da proposição acima com técnicas da teoria das funções geradoras. Uma referência é o livro [15, pág. 364]. Ressaltamos que se  $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x^n/n!)$  e  $g(x) = \sum_{n \geq 0} b_n (x^n/n!)$  são funções geradoras exponenciais para as sequências  $(a_n)_n$  e  $(b_m)_m$  respectivamente, então  $f(x)g(x) = \sum_{n \geq 0} (\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a_h b_{n-h}) (x^n/n!)$  é a função geradora exponencial para a sequência  $(\sum_{h=0}^l \binom{l}{h} a_h b_{l-h})_l$ .

Considere a função geradora exponencial

$$G_k(x, t) = \sum_{n \geq 0} \phi_k(n, t) \frac{x^n}{n!},$$

e suas especializações

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} G_k(x, t) \right|_{t=0} = \sum_{n \geq 1} \mu_k(n) \frac{x^n}{n!}, \\ p_k(x) &= G_k(x, 1) = \sum_{n \geq 0} s_k(n) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Agora, vejamos que a recorrência da Proposição 2.9 é equivalente à equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x} G_k(x, t) = t G_k(x, t) \frac{\partial}{\partial x} F_k(x). \quad (12)$$

De fato,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}G_k(x, t) &= \sum_{n \geq 0} \phi_k(n+1, t) \frac{x^n}{n!}, \\ \frac{\partial}{\partial x}F_k(x) &= \sum_{m \geq 0} \mu_k(m+1) \frac{x^m}{m!}, \\ tG_k(x, t) \frac{\partial}{\partial x}F_k(x) &= \sum_{n \geq 0} \left( t \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} \phi_k(n-h, t) \mu_k(h+1) \right) \frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de  $x^n/n!$  na última equação acima com os de  $\partial G_k/\partial x$ , temos

$$\phi_k(n+1, t) = t \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} \phi_k(n-h, t) \mu_k(h+1),$$

portanto,

$$\phi_k(n, t) = t \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} \phi_k(n-h-1, t) \mu_k(h+1) = t \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} \phi_k(n-h-1, t) \mu_k(h+1),$$

e chegamos à recorrência da Proposição 2.9 fazendo  $h = m-1$ .

Voltando à equação 12, temos

$$\frac{1}{G_k(x, t)} \frac{\partial}{\partial x}G_k(x, t) = t \frac{\partial}{\partial x}F_k(x),$$

que, integrando em  $x$  nos dá  $\log G_k(x, t) = tF_k(x) + c$ . Substituindo  $x = 0$  temos que  $c = 0$  e, portanto,

$$G_k(x, t) = \exp\{tF_k(x)\}.$$

Assim,

$$F_k(x) = \log p_k, \tag{13}$$

e

$$G_k(x, t) = p_k(x)^t.$$

Note que as informações que temos sobre  $s_k(n)$  (veja Nota 2.8) nos permite escrever  $p_k(x) = 1 + \sum_{n=1}^{k-1} x^n/n!$ .

**PROPOSIÇÃO 2.10.** *Se  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$  são as raízes complexas de  $p_k(x) = 1 + \sum_{n=1}^{k-1} x^n/n!$ , então*

$$\mu_k(n) = (n-1)! \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i^{-n}.$$

**PROVA.** Lembramos que  $\log(1/(1-x)) = \sum_{n \geq 1} x^n/n$ . Como  $p_k(x)$  tem termo independente 1 o polinômio pode ser escrito como

$$p_k(x) = \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{x}{\alpha_i}\right).$$

Então, pela equação 13,

$$F_k(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \log \left( 1 - \frac{x}{\alpha_i} \right) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left( \frac{x}{\alpha_i} \right)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i^{-n}.$$

Sabemos, por definição, que  $F_k(x) = \sum_{n \geq 1} \mu_k(n) x^n / n!$ ; comparando os coeficientes de  $x^n$  temos

$$\mu_k(n) = (n-1)! \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i^{-n}.$$

□

NOTA 2.11. No caso  $k = 3$  temos  $p_k(x) = 1 + x + x^2/2$ , que tem raízes  $r_1 = -1 + i$  e  $r_2 = -1 - i$ . Portanto, pela Proposição 2.10,  $\mu_3(n) = (n-1)!((-1+i)^{-n} + (-1-i)^{-n}) = (n-1)!(-1-i)^{-n}(i^n + 1)$ . Assim,  $\mu_3(n) = 0$  se  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .

Para nossas cotas gostaríamos que  $\mu_k(n)$  fosse grande. Isso, infelizmente, nem sempre é verdade como acabamos de ver. Entretanto,  $\mu_k(n)$  é grande o suficiente em média.

TEOREMA 2.12. [7, Björner, Lovász '94] *Para quaisquer  $n, k$  com  $2 \leq k \leq n$  existe  $m$  tal que  $n - k + 2 \leq m \leq n$  e  $|\mu_k(m)| > (m-1)!(k-1)^{-m-1}$ .*

PROVA. Como antes,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$  denotam as raízes de  $p_k(x)$ . Note que  $\min_i |\alpha_i| < k-1$  pois  $\prod_i \alpha_i = \pm(k-1)!$ . Vamos assumir que  $|\alpha_1| < k-1$ . Ponha

$$q(x) = \prod_{i=2}^{k-1} (x - \alpha_i) = \sum_{j=0}^{k-2} b_j x^j. \quad (14)$$

Usando que  $p'_k(\alpha_i) = p_k(\alpha_i) \alpha_i^{k-1} / (k-1)! = \alpha_i^{k-1} / (k-1)!$  e a Proposição 2.10 temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-2} b_j \frac{\mu_k(n-j)}{(n-j-1)!} &= \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i=1}^{k-1} b_j \alpha_i^{-n+j} = \sum_{i=1}^{k-1} q(\alpha_i) \alpha_i^{-n} = q(\alpha_1) \alpha_1^{-n} \\ &= (k-1)! p'_k(\alpha_1) \alpha_1^{-n} = \alpha_1^{-n+k-1}. \end{aligned}$$

Então existe  $0 \leq j \leq k-2$  tal que

$$\left| b_j \frac{\mu_k(n-j)}{(n-j-1)!} \right| > \frac{1}{k-1} |\alpha_1|^{-n+k-1}. \quad (15)$$

Agora, vamos mostrar que  $b_j = (k-1)! \alpha_1^{-j-1} (p_k(\alpha_1) - p_{j+1}(\alpha_1))$ . Escreva  $p_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i$  e note que segue da primeira igualdade da equação 14 o seguinte:

$$q(x) = \frac{1}{x - \alpha_1} \prod_{i=1}^{k-1} (x - \alpha_i) (1 - x/\alpha_i) = (k-1)! \frac{p_k(x)}{x - \alpha_1}. \quad (16)$$

Mas,

$$\frac{p_k(x)}{x - \alpha_1} = a_{k-1} x^{k-2} + \dots + \left( \sum_{i=l+1}^{k-1} \alpha_1^{i-(l+1)} a_i \right) x^l + \dots + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_1^{i-1} a_i;$$

substituindo na equação 16 e comparando os coeficientes de  $x^j$  com os da equação 14 ficamos com

$$b_j = (k-1)! \sum_{i=j+1}^{k-1} \alpha_1^{i-(j+1)} a_i = (k-1)! \alpha_1^{-j-1} (p_k(\alpha_1) - p_{j+1}(\alpha_1)),$$

como queríamos mostrar.

Assim,

$$\begin{aligned} |b_j| &= |\alpha_1|^{-j-1} (k-1)! |p_k(\alpha_1) - p_{j+1}(\alpha_1)| \\ &= |\alpha_1|^{-j-1} |\alpha_1^{k-1} + (k-1)\alpha_1^{k-2} + \dots + (k-1)(k-2)\dots(j+2)\alpha_1^{j+1}| \\ &= |\alpha_1|^{-1} |\alpha_1^{k-j-1} + (k-1)\alpha_1^{k-j-2} + \dots + (k-1)\dots(j+2)\alpha_1|. \end{aligned}$$

Lembrando que  $|\alpha_1| < k-1$ , temos que o módulo de cada termo nessa soma é menor que  $(k-1)^{k-j-1}$ . Logo,

$$|b_j| < (k-1)^{k-j} |\alpha_1|^{-1}.$$

Temos, da equação 15, que

$$|\mu_k(n-j)| > \frac{1}{k-1} (n-j-1)! |\alpha_1|^{-n+k-1} |b_j|^{-1}.$$

De  $|b_j| < (k-1)^{k-j} |\alpha_1|^{-1}$  ficamos com

$$|\mu_k(n-j)| > (n-j-1)! |\alpha_1|^{-n+k} (k-1)^{-k+j-1} > (n-j-1)! (k-1)^{-n+j-1}.$$

Como  $0 \leq j \leq k-2$  temos  $n-k+2 \leq n-j \leq n$  e o teorema segue.  $\square$

Com esse resultado terminamos os cálculos da função de Möbius do reticulado  $\Pi_{n,k}$ .

**2.2.2.2. A subordem  $\Pi_n^k$ .** Agora, passamos a outro reticulado muito mais simples de analisar, motivados, pelo problema dos  $k$ -distintos. O objetivo aqui é demonstrar o Teorema 2.14 (pág. 28). Considere a seguinte subordem de  $\Pi_n$ :

$$\Pi_n^k = \{\pi \in \Pi_n : b(\pi) \leq k\} \cup \{\hat{0}\}, \quad \text{onde } k \geq 1.$$

Se  $k \geq n-1$  então  $\Pi_n^k = \Pi_n$  e  $\mu^k(n) = \mu_n^k(\hat{0}, \hat{1}) = \mu_{\Pi_n^k}(\hat{0}, \hat{1})$ . Sabemos (veja eq. 4, pág. 4), então, que  $\mu^k(n) = (-1)^{n-1} (n-1)!$ . Por isso, assumimos  $n > k$ .

Abaixo, faremos uso dos *números de Stirling do segundo tipo*  $S(n, r)$ , que é o número de partições de  $[n]$  em  $r$  blocos não-vazios. Por definição,

$$\mu^k(n) = \sum_{\pi > \hat{0}} \mu^k(\pi, \hat{1}).$$

Pelo isomorfismo  $[\pi, \hat{1}] \cong \Pi_{b(\pi)}$ , temos a seguinte fórmula para  $\mu^k(n)$ :

$$\mu^k(n) = \sum_{\substack{\pi > \hat{0} \\ \pi \in \Pi_n^k}} \mu_{b(\pi)}^k(\hat{0}, \hat{1}) = \sum_{r=1}^k S(n, r) (-1)^{r-1} (r-1)!.$$

É conhecida a seguinte recorrência para  $S(n, r)$ : dado  $[n]$  para ser particionado em  $r$  blocos, ou colocamos o elemento  $n$  em um bloco unitário (pode ser feito de  $S(n-1, r-1)$  modos diferentes), ou

colocamos  $n$  com um subconjunto de  $[n-1]$ . Esse último pode ser feito de  $rS(n-1, r)$  modos diferentes, pois cada um dos  $S(n-1, r)$  modos de particionar  $[n-1]$  em  $r$  blocos, fornece  $r$  subconjuntos nos quais  $n$  pode ser inserido. Isto é,

$$\begin{aligned} S(n, r) &= S(n-1, r-1) + rS(n-1, r) \quad \text{para } n \geq 1, \\ S(n, 0) &= 0 \quad (n \geq 1); \quad S(0, 0) = 1; \quad S(n, r) = 0 \quad (r > n \geq 0). \end{aligned} \quad (17)$$

PROPOSIÇÃO 2.13. [7, Björner, Lovász '94] *Se  $n > k \geq 1$  então  $\mu^k(n) = (-1)^k k! S(n-1, k)$ .*

PROVA.

$$\begin{aligned} \mu^k(n) &= \sum_{r=1}^k S(n, r) (-1)^{r-1} (r-1)! \\ &= \sum_{r=1}^k (S(n-1, r-1) + rS(n-1, r)) (-1)^{r-1} (r-1)! \\ &= \left( \sum_{r=1}^k S(n-1, r-1) (-1)^{r-1} (r-1)! + \sum_{r=1}^k S(n-1, r) (-1)^{r-1} r (r-1)! \right) \\ &= \left( \sum_{r=1}^k S(n-1, r-1) (-1)^{r-1} (r-1)! + \sum_{r=1}^k S(n-1, r) (-1)^r r! \right) \\ &= \sum_{r=1}^k S(n-1, r-1) (-1)^r (r-1)! + \sum_{r=2}^{k+1} S(n-1, r-1) (-1)^{r-1} (r-1)! \\ &= (-1)^k k! S(n-1, k). \end{aligned}$$

Na última passagem usamos que  $S(n-1, 0) = 0$ . □

Vamos definir o *polinômio característico* de  $\Pi_n^k$  por

$$\phi^k(n, t) = \sum_{\pi \in \Pi_n^k} \mu^k(\hat{0}, \pi) t^{b(\pi)}.$$

Sabemos (veja pág. 4) que  $\sum_{\pi \in \Pi_n} \mu(\hat{0}, \pi) t^{b(\pi)} = t(t-1) \cdots (t-n+1)$ . Então, pela definição de função de Möbius, temos o seguinte valor para o polinômio característico:

$$\begin{aligned} \phi^k(n, t) &= \mu^k(\hat{0}, \hat{0}) t^n + \sum_{b(\pi) \leq k} \mu^k(\hat{0}, \pi) t^{b(\pi)} = t^n \sum_{b(\pi) \leq k} \sum_{\substack{\hat{0} < \sigma \leq \pi \\ b(\pi) \leq k}} \mu(\sigma, \pi) t^{b(\pi)} \\ &= t^n \sum_{b(\sigma) \leq k} \sum_{\substack{b(\pi) \leq k \\ \pi \in [\sigma, \hat{1}]} } \mu(\sigma, \pi) t^{b(\pi)} = t^n \sum_{b(\sigma) \leq k} \sum_{\pi \in \Pi_{b(\sigma)}} \mu(\hat{0}, \pi) t^{b(\pi)} \\ &= t^n \sum_{b(\sigma) \leq k} t(t-1) \cdots (t-b(\sigma)+1) = t^n \sum_{r=1}^k S(n, r) r! \binom{t}{r}. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\phi^k(n, -1) = (-1)^n \sum_{r=1}^k (-1)^r S(n, r) r!.$$

Na  $i$ -ésima iteração recursiva em  $\sum_{r=1}^k (-1)^r S(n, r)r!$  dos números de Stirling, temos

$$\sum_{r=1}^k (-1)^r S(n, r)r! = (-1)^{i+1} \sum_{r=1}^{k-i} (-1)^{r+1} S(n-i, r)r! + (-1)^k \sum_{r=k-i+1}^k r S(n-k+r-1, r)r!.$$

TEOREMA 2.14. [7, Björner, Lovász '94]

$$\phi^k(n, -1) = (-1)^n + (-1)^{k+1} \sum_{r=1}^k r S(n-k+r-1, r)r!.$$

PROVA. Vamos provar por indução em  $i$  a afirmação imediatamente anterior ao teorema. O caso  $i = 1$  é fácil. Suponha que na  $(i-1)$ -ésima iteração, para  $i > 1$ , temos

$$\sum_{r=1}^k (-1)^r S(n, r)r! = (-1)^i \sum_{r=1}^{k-i+1} (-1)^{r+1} S(n-i+1, r)r! + (-1)^k \sum_{r=k-i+2}^k r S(n-k+r-1, r)r!. \quad (18)$$

Então o primeiro termo na soma a direita do igual, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & (-1)^{i+1} \sum_{r=1}^{k-i+1} (-1)^r (S(n-i, r-1) + r S(n-i, r))r! \\ &= (-1)^{i+1} \sum_{r=1}^{k-i+1} ((-1)^r S(n-i, r-1)r! + (-1)^r r S(n-i, r)r!) \\ &= (-1)^{i+1} \left( \sum_{r=1}^{k-i} ((-1)^{r+1} S(n-i, r)(r+1)! + r!(-1)^r r S(n-i, r)) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{k-i+1} (k-i+1) S(n-i, k-i+1)(k-i+1)! \right) \\ &= (-1)^{i+1} \left( \sum_{r=1}^{k-i} S(n-i, r)((-1)^{r+1}(r+1)! + (-1)^r r r!) \right) \\ &\quad + (-1)^k (k-i+1) S(n-i, k-i+1)(k-i+1)! \\ &= (-1)^{i+1} \sum_{r=1}^{k-i} (-1)^{r+1} S(n-i, r)r! \\ &\quad + (-1)^k (k-i+1) S(n-i, k-i+1)(k-i+1)!. \end{aligned}$$

O último termo dessa soma somado ao segundo termo da soma na equação 18 fica

$$(-1)^k \sum_{r=k-i+1}^k r S(n-k+r-1, r)r!.$$

Portanto, reescrevendo a equação 18 ficamos com

$$\sum_{r=1}^k (-1)^r S(n, r)r! = (-1)^{i+1} \sum_{r=1}^{k-i} (-1)^{r+1} S(n-i, r)r! + (-1)^k \sum_{r=k-i+1}^k r S(n-k+r-1, r)r!.$$

Para provar o teorema basta tomar  $i = k$  na equação 18. □

Com esse resultado terminamos esta seção, embora não calculamos explicitamente a função de Möbius neste último caso. Isto porque este último teorema nos dá toda informação de que precisaremos.

### 2.3. Aplicações: cotas inferiores para os problemas dos $k$ -iguais, dos $k$ -distintos e $k$ -divisibilidade

Finalmente, damos nesta seção aplicações das ferramentas desenvolvidas até aqui. Estaremos sempre considerando entradas de tamanho  $n$  para os problemas, a menos de menções contrárias. Em primeiro, considere o seguinte problema.

**PROBLEMA 2.15** ( $k$ -iguais). *Dados  $n$  números reais  $x_1, \dots, x_n$  e um inteiro  $k \geq 2$  decidir se existem  $k$  deles iguais.*

Para responder a essa pergunta vamos fazer antes algumas considerações. Esse problema pode ser formulado da seguinte maneira: dado o ponto  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  decidir se esse ponto pertence ao arranjo  $\mathcal{A}_{n,k}$  dos  $\binom{n}{k}$  subespaços lineares de dimensão  $n - k + 1$  dados pelas equações  $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k}$ , para todo conjunto de índices  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ .

**PROPOSIÇÃO 2.16.** [7, Björner, Lovász '94] *O reticulado das intersecções de  $\mathcal{A}_{n,k}$ , para  $2 \leq k \leq n$ , é isomorfo ao reticulado  $\Pi_{n,k}$ . Se, sob esse isomorfismo, um elemento  $x \in L_{\mathcal{A}_{n,k}}$  corresponde a uma partição em  $\Pi_{n,k}$  com  $j$  blocos, então  $\dim(x) = j$ .*

**PROVA.** Para todo  $\pi$  em  $\Pi_n$  defina

$$B_\pi = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j \text{ se } i \text{ e } j \text{ pertencem ao mesmo bloco de } \pi\}.$$

Dessa forma,  $\dim(B_\pi) = b(\pi)$ . É fácil ver que  $B_\sigma \cap B_\pi = B_{\sigma \vee \pi}$ .

Agora, identificamos o subespaço  $K$  dado por  $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k}$  em  $L_{\mathcal{A}_{n,k}}$  com a partição em  $\Pi_{n,k}$  cujo único bloco não-trivial é  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  e estendemos para todo  $L_{\mathcal{A}_{n,k}}$ .  $\square$

Com os resultados que temos até agora podemos pôr o seguinte.

**COROLÁRIO 2.17.** *Se  $T$  é uma árvore de decisão linear para o problema dos  $k$  iguais então*

- (i)  $l^+(T), l^-(T) \geq |\mu_k(n)|$ , e
- (ii)  $l^+(T), l^-(T) \geq \sum \beta_i(\Delta(\Pi_{n,k}))$ .

Usaremos (i) para estimar uma cota inferior para o problema dos  $k$ -iguais. Cabe registrar aqui que os números de Betti em (ii) foram calculados por Björner e Welker em trabalho recente (veja [7, pág. 694, Prop. 4.9]), entretanto, o resultado que se obtém é o mesmo que obteremos a menos de certas constantes (veja Considerações Finais).

Defina  $l_k^+(n)$  (resp.,  $l_k^-(n)$ ) como o número mínimo de folhas “Sim” (resp., “Não”) em qualquer árvore de decisão linear para o problema dos  $k$ -iguais. Ambas as funções  $l_k^-$  e  $l_k^+$  são monótonas em  $n$ . De fato, tome  $m \leq n$ . Toda árvore de decisão linear  $T$  para  $n$  elementos pode ser usada para obtermos uma árvore de decisão linear para  $m$  elementos, adicionando-se a uma entrada de  $m$  elementos,  $n - m$  novos elementos  $x, x^2, \dots, x^{n-m}$ , com  $x > 1$  suficientemente grande.

Vamos ver se a árvore de decisão linear responde certo o problema dos  $k$ -iguais dentre  $m$  elementos. Se a resposta dada para uma certa entrada foi “Não”, claramente a resposta está certa. O problema é quando a resposta for “Sim”. Neste caso, se os coeficientes dos novos elementos forem zero nos testes da raiz até a folha a decisão foi tomada sobre os elementos velhos da entrada e, portanto, a árvore respondeu certo. Caso contrário, o sinal da função é trivialmente determinada devido a escolha do novos elementos e, portanto, a resposta também foi dada sobre decisões baseadas nos elementos velhos da entrada.



**TEOREMA 2.18.** [7, Björner, Lovász '94] *Toda árvore de decisão linear para o problema dos  $k$  iguais tem tamanho pelo menos  $\max\{\binom{n}{k}, (n/18k)^{n/2}\}$ , e altura pelo menos  $\max\{n-1, (n/2) \log_3(n/18k)\}$ .*

**PROVA.** Seja  $T$  uma árvore de decisão linear para o problema dos  $k$ -iguais. Assumimos que  $T$  não realiza testes desnecessários. Vamos provar as cotas  $\binom{n}{k}$  e  $n-1$  para tamanho e altura, respectivamente.

Para todo subconjunto  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  de índices, considere a entrada  $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = 0$  e as outras coordenadas não-nulas e duas-a-duas distintas. Para dois desses subconjuntos de índices distintos devemos ter duas folhas “Sim” diferentes. De fato, dados dois pontos, um em cada dos subconjuntos distintos, o segmento que os une deve conter uma entrada “Não”; como o conjunto de pontos associados a uma determinada folha é convexo, cada um dos dois pontos devem ir para folhas distintas. Portanto, o número de folhas “Sim” e consequentemente o tamanho da árvore é pelo menos  $\binom{n}{k}$ .

Note que  $M_{\mathcal{A}_{n,k}}$  não pode conter um subespaço afim de dimensão  $k$ : elementos de tal subespaço são da forma  $b + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k$ , para  $b, a_1, a_2, \dots, a_k$  fixos e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  linearmente independentes. Observe que, é fácil escolher os  $\lambda_i$ 's de modo que pelo menos  $k$  entradas sejam iguais a zero; escrevendo  $b = (b_1, \dots, b_n)$  e  $a_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ , para todo  $i \in [k]$ , temos  $x_{j_1} = \dots = x_{j_n} = 0$  resolvendo o sistema linear  $\{b_i + \lambda_1 a_{i,1} + \dots + \lambda_k a_{i,k} = 0\}_i$ , onde  $i = j_1, \dots, j_k$ . Este sistema tem solução pois os  $a_i$ 's são linearmente independentes. Então se considerarmos uma folha “Não” de  $T$ , a célula correspondente não contém um subespaço afim  $k$ -dimensional, portanto, devemos ter pelo menos  $n-k+1$  nós no caminho que leva a tal folha.

Seja  $w$  o pai, em  $T$ , de uma folha “Não” que corresponde a uma  $n$ -célula. Alguma folha  $w'$  descendente de  $w$  deve ter rótulo “Sim”, pois a árvore não faz testes desnecessários. Uma célula correspondente a uma folha “Sim” está contida em  $V_{\mathcal{A}_{n,k}}$ , logo tem dimensão no máximo  $n-k+1$ . Assim, como no raiz  $w$  caminho em  $T$  nenhum teste resulta em igualdade (pois um filho de  $w$  tem dimensão  $n$ ), no  $w-w'$  caminho em  $T$  devem existir pelo menos  $k-1$  testes resultando em igualdade. Estes testes mais os  $n-k$  testes até  $w$  resulta em pelo menos  $n-1$  testes, isto é, a altura de  $T$  é pelo menos  $n-1$ .

Para  $k \geq n/3$ , os máximos do enunciado do teorema ocorrem em  $\binom{n}{k}$  e  $n-1$  e, portanto, ele está provado neste caso. Para o caso geral, vamos assumir  $k < n/2$ . Pelo Teorema 2.12, escolhendo  $m$  com  $n \geq m \geq n-k+2$  temos

$$l_k^-(n) \geq l_k^-(m) \geq |\mu_k(m)| \geq (m-1)!(k-1)^{-m-1}.$$

Usando o fato de  $v!(k-1)^{-v}$  ser não-decrescente em  $v$ , para  $v \geq k-1$ , temos

$$\begin{aligned} l_k^-(n) &\geq (n-k+1)!(k-1)^{-n+k-3} \geq (n-k)!k^{-n+k-3} > \left(\frac{n-k}{3}\right)^{n-k} k^{-n+k-3} > \left(\frac{n-k}{k}\right)^{n-k} 3^{-n+k} k^{-3} \\ &> \left(\frac{n}{2k}\right)^{n/2} 3^{-n} = \left(\frac{n}{18k}\right)^{n/2} \end{aligned}$$

que, portanto, é um limitante inferior para o tamanho da árvore. O resultado na altura segue tomando-se o logaritmo (base 3).  $\square$

Com isso, terminamos e passamos à próxima aplicação. Considere o seguinte problema.

**PROBLEMA 2.19** ( $k$ -distintos). *Dados  $n$  números reais  $x_1, \dots, x_n$  e um inteiro  $k \geq 2$  decidir se existem  $k$  deles distintos.*

Vamos assumir que  $k > 2$ . O caso  $k = 2$  é equivalente a decidir  $k$ -iguais para  $k = n$  e, portanto, o problema tem complexidade linear.

Considere o arranjo  $\mathcal{A}_n^k$  dos  $S(n, k-1)$  subespaços do  $\mathbb{R}^n$  de dimensão  $k-1$  dados por  $x_i = x_j$  se  $i$  e  $j$  estão num mesmo bloco de uma partição de  $[n]$  em  $k-1$  blocos. Então o problema dos  $k$ -distintos é determinar se  $x \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de  $M_{\mathcal{A}_n^k}$ . As cotas inferiores serão obtidas a partir da função de Möbius do reticulado das intersecções não-vazias desse arranjo que, como veremos no resultado abaixo, tem uma descrição combinatória que já conhecemos.

**PROPOSIÇÃO 2.20.** [7, Björner, Lovász '94] *O reticulado das intersecções do arranjo  $\mathcal{A}_n^k$ , para  $2 \leq k \leq n$ , é isomorfo a  $\Pi_n^{k-1}$ . Se, sob esse isomorfismo, um subespaço  $x \in L_{\mathcal{A}_n^k}$  corresponde a uma partição em  $j$  blocos, então  $\dim(x) = j$ .*

**PROVA.** Definimos  $B_\pi$  como na Proposição 2.16. Para todo  $K$  em  $\mathcal{A}_n^k$  temos que  $K = B_\pi$  para algum  $\pi = \{B_1, \dots, B_{k-1}\} \in \Pi_n^{k-1}$ . Assim, identificamos  $K$  com  $\pi = \pi_K$  para todo  $K \in \mathcal{A}_n^k$  e estendemos a identificação para todo o reticulado  $L_{\mathcal{A}_n^k}$ .  $\square$

**LEMA 2.21.** *A característica de Euler de  $M_{\mathcal{A}_n^k}$  satisfaz a seguinte igualdade:*

$$\chi(M_{\mathcal{A}_n^k}) = 1 + (-1)^{n-k} \sum_{r=1}^{k-1} r S(n-k+r, r) r!.$$

**PROVA.** Sabemos do Corolário 2.5 e da Proposição 1.10 que

$$\chi(M_{\mathcal{A}_n^k}) = \sum_{x \in L_{\mathcal{A}_n^k}} (-1)^{n-\dim(x)} \mu_{L_{\mathcal{A}_n^k}}(\hat{0}, x).$$

Usando o isomorfismo da proposição anterior e a definição do polinômio característico  $\phi^{k-1}$  de  $\Pi_n^{k-1}$  temos que

$$\chi(M_{\mathcal{A}_n^k}) = (-1)^n \sum_{x \in \Pi_n^{k-1}} (-1)^{b(x)} \mu^{k-1}(\hat{0}, x) = (-1)^n \phi^{k-1}(n, -1).$$

O resultado segue do Teorema 2.14 que estabelece

$$\phi^{k-1}(n, -1) = (-1)^n + (-1)^k \sum_{r=1}^{k-1} r S(n-k+r, r) r!.$$

$\square$

Agora, vamos usar a fórmula de Goresky e MacPherson (Teo. 2.3)

$$\tilde{H}^i(M_{\mathcal{A}_n^k}) \cong \bigoplus_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_{\mathcal{A}_n^k}}} \tilde{H}_{n-\dim(x)-2-i}(\Delta(\hat{0}, x))$$

para computar a cohomologia de  $M_{\mathcal{A}_n^k}$ . Para tal, lembremos que o reticulado  $\Pi_n$  tem função posto dada por  $\rho(x) = n - b(x)$ , que também podemos escrever (veja Prop. 2.20) como  $\rho(x) = n - \dim(x)$  para todo  $x \neq \hat{0}$  em  $L_{\mathcal{A}_n^k}$ . Lembre que estamos assumindo  $n > k$ .

Se  $(\hat{0}, x)$  é um intervalo de  $L_{\mathcal{A}_n^k}$  então  $\dim \Delta(\hat{0}, x) \leq (n - \dim(x)) - (n - k + 1) - 1 = n - \dim(x) - 2 - (n - k)$ . Portanto,  $\tilde{H}^{n-k}(M_{\mathcal{A}_n^k})$  é livre. Por outro lado, se  $0 < p \leq n - k$  então

$$\tilde{H}^{n-k-p}(M_{\mathcal{A}_n^k}) \cong \bigoplus_{x > \hat{0}} \tilde{H}_{n-\dim(x)-2-(n-k)+p}(\Delta(\hat{0}, x))$$

e segue do limitante superior para  $\dim \Delta(\hat{0}, x)$  que  $\tilde{H}^{n-k-p}(M_{\mathcal{A}_n^k}) = 0$ . Como  $\tilde{H}^i(M_{\mathcal{A}_n^k})$  é finitamente gerado os subgrupos livres de  $\tilde{H}^i(M_{\mathcal{A}_n^k})$  e  $\tilde{H}_i(M_{\mathcal{A}_n^k})$  são isomorfos, portanto,  $M_{\mathcal{A}_n^k}$  só pode ter números de Betti não-nulos em dimensão zero e  $n - k$ .

O caso  $\tilde{\beta}^0(M_{\mathcal{A}_n^k}) = 0$  também pode ser visto considerando-se que os subespaços de  $\mathcal{A}_n^k$  têm dimensão no máximo  $n - 2$  (isto é, não podem ser hiperplanos), portanto,  $M_{\mathcal{A}_n^k}$  é conexo por caminhos, ou seja,  $\beta_0(M_{\mathcal{A}_n^k}) = 1$ . Temos do Lema 2.21 e de

$$\chi(M_{\mathcal{A}_n^k}) = \beta_0(M_{\mathcal{A}_n^k}) + (-1)^{n-k} \beta_{n-k}(M_{\mathcal{A}_n^k})$$

que

$$\sum_i \beta_i(M_{\mathcal{A}_n^k}) = \beta_0(M_{\mathcal{A}_n^k}) + \beta_{n-k}(M_{\mathcal{A}_n^k}) = 1 + \sum_{r=1}^{k-1} r S(n - k + r, r) r!. \quad (19)$$

Daí tiramos um limite inferior para o número de folhas “Não” e o número de folhas “Sim” de uma árvore de decisão linear  $T$  para o problema dos  $k$ -distintos. Cabe, agora, estimarmos tal valor.

**TEOREMA 2.22.** [7, Björner, Lovász '94] *Toda árvore de decisão linear para o problema dos  $k$  distintos tem tamanho pelo menos  $\max\{\binom{n}{k-2}, (k-1)^n 3^{1-k}\}$ , e altura pelo menos  $\max\{n-1, n \log_3(k-1) - k + 1\}$ .*

**PROVA.** Iterando a recursão dos números de Stirling (veja eq. 17, pág. 27)  $n - k$  vezes em  $S(n, k)$  temos uma soma de termos positivos mais o termo  $k^{n-k} S(k, k)$ . Usando a desigualdade  $S(n, k) > k^{n-k}$ , juntamente com a equação 19 temos

$$\begin{aligned} l_k^-(n) &\geq 1 + \sum_{r=1}^{k-1} r S(n - k + r, r) r! > (k-1)! (k-1) S(n-1, k-1) \\ &> (k-1)! (k-1)^{n-k+1} > (k-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

A cota inferior para a altura segue tomando o logaritmo (base 3) do tamanho.

Para a outra parte das cotas, considere  $T$  uma árvore de decisão linear para  $M_{\mathcal{A}_n^k}$ . A uma folha “Não” de  $T$  corresponde uma célula contida em  $V_{\mathcal{A}_n^k}$ , portanto de dimensão no máximo  $k - 1$ . Concluimos que qualquer caminho da raiz a uma folha “Não” tem pelo menos  $n - k + 1$  testes resultando em igualdade.

Também,  $M_{\mathcal{A}_n^k}$  não pode conter um subespaço afim de dimensão  $n - k + 2$ : um elemento desse espaço tem a forma  $b + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n-k+2} a_{n-k+2}$ , com  $b, a_1, \dots, a_{n-k+2}$  fixos e  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k+2}$  linearmente independentes. Observe que, podemos escolher os  $\lambda_i$ 's de forma que pelo menos  $n - k + 2$  entradas sejam iguais e, portanto, tal ponto está em  $V_{\mathcal{A}_n^k}$ . Assim, a cada folha “Sim” está correspondida uma célula não contendo um  $(n - k + 2)$ -subespaço afim, donde concluimos que existem pelo menos  $k - 1$  vértices no caminho que leva a tais folhas em  $T$ .

Seja  $w$  o pai de uma folha “Sim” que corresponde a uma célula  $n$ -dimensional. Como supomos que a árvore não faz testes desnecessários, deve haver uma folha “Não” descendente de  $w$ . Para se chegar a essa folha “Não” pelo menos  $n - k + 1$  teste resultam em igualdade. Do filho “Sim” de  $w$  corresponder a uma célula de dimensão  $n$  concluimos que nenhum teste até  $w$  resulta em igualdade. Então devem existir pelo menos  $(n - k + 1) + k - 1 = n - 1$  testes, isto é, a altura da árvore é pelo menos  $n - 1$ .

Para todo subconjunto de índices  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k+2} \leq n$ , considere uma entrada com  $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_{n-k+2}} = 0$  e todas as outras entradas diferentes de zero e duas-a-duas distintas.

Entradas que correspondem a subconjuntos de índices diferentes devem ir para folhas “Não” diferentes. De fato, o segmento que une dois pontos com subconjuntos de índices diferentes deve conter uma entrada “Sim”, mas as células são convexas. Então, o número de folhas “Não” é pelo menos  $\binom{n}{n-k+2}$ .  $\square$

Assim, concluímos mais uma aplicação e vamos para a última delas. Considere o seguinte problema.

**PROBLEMA 2.23** (*k*-divisibilidade). *Dados  $n$  números reais  $x_1, \dots, x_n$  e um inteiro  $k \geq 2$  decidir se o número de  $x_i$ 's iguais a qualquer número real é divisível por  $k$ .*

Aqui, supomos que  $k$  divide  $n$  e assumimos que  $2 \leq k \leq n/2$ . Denote por  $\mathcal{D}_{n,k}$  o arranjo de todos os subespaços lineares  $B_\pi$ , onde  $\pi$  é uma partição de  $[n]$  em blocos de tamanho divisível por  $k$ . Então *k*-divisibilidade é exatamente o problema de pertinência em  $V_{\mathcal{D}_{n,k}}$ . O reticulado das intersecções desse arranjo tem a seguinte descrição combinatória:

$$\Pi_n^{(k)} = \{\pi \in \Pi_n : \text{todos os blocos de } \pi \text{ têm tamanho divisível por } k\} \cup \{\hat{0}\}.$$

Defina o *conjunto descendente* de uma permutação  $p \in S_n$  por

$$\{i \in [n-1] : p(i) > p(i+1)\}.$$

Stanley (veja [29, Prop. 4.3, pág. 353]) provou o seguinte resultado referente à função de Möbius  $\mu_n^{(k)}$  do reticulado  $\Pi_n^{(k)}$ .

**PROPOSIÇÃO 2.24.**  $|\mu_n^{(k)}(\hat{0}, \hat{1})|$  é o número de permutações de  $[n-1]$  com conjunto descendente  $\{k, 2k, \dots, n-k\}$ .

**LEMA 2.25.** [7, Björner, Lovász '94] Se  $t = n/k$ ,

$$|\mu_n^{(k)}(\hat{0}, \hat{1})| > \frac{\binom{n-t}{t} (t-1)!}{((k-1)!)^t}.$$

**PROVA.** Particione  $\{t, \dots, n-1\}$  em  $t$  blocos  $A_1, A_2, \dots, A_t$  de tamanho  $k-1$ . Considere a permutação que começa com os elementos de  $A_1$  em ordem crescente, seguido por qualquer elemento de  $\{1, \dots, t-1\}$ ; então chegam os elementos de  $A_2$  em ordem crescente, seguido por qualquer outro elemento de  $\{1, \dots, t-1\}$ ; e assim por diante até terminarmos com os elementos de  $A_t$  em ordem crescente. Claramente essa permutação tem o conjunto descendente certo. O número de permutações dessa forma é

$$\frac{\binom{n-t}{t} (t-1)!}{((k-1)!)^t}.$$

$\square$

**COROLÁRIO 2.26.** Se  $T$  é uma árvore de decisão linear para o problema da *k* divisibilidade, então o número de folhas “Sim” de  $T$  bem como o número de folhas “Não” é pelo menos

$$\frac{\binom{n-t}{t} (t-1)!}{((k-1)!)^t},$$

onde  $t = n/k$ .

**PROVA.** Imediato da proposição anterior e o Corolário 2.17.  $\square$

Usando a igualdade de Stirling temos um resultado mais explícito.

TEOREMA 2.27. [7, Björner, Lovász '94] *Toda árvore de decisão linear para o problema da  $k$  divisibilidade tem tamanho pelo menos  $(n/(k + 4 \log k))^n$  e altura pelo menos  $n \log_3(n/(k + 4 \log k))$ .*

## 2.4. Algoritmos para os problemas dos $k$ -iguais, dos $k$ -distintos e $k$ -divisibilidade

Vimos na Introdução um algoritmo ótimo para o problema dos  $k$ -distintos. Resta agora vermos algoritmos ótimos para os demais problemas. Seremos um tanto superficiais nas descrições e análises dos algoritmos; maiores detalhes podem ser encontrados em [11].

Nesta seção usaremos o algoritmo SELEÇÃO que toma como entrada um conjunto de  $n$  números (essa será a entrada para todos algoritmos aqui) e um inteiro  $t$ , com  $1 \leq t \leq n$ , e devolve o elemento da entrada que é maior que  $t - 1$  elementos da entrada. Esse algoritmo tem tempo de execução de pior caso  $O(n)$ .

O algoritmo de partição usado por SELEÇÃO toma como entrada um conjunto  $L$  de  $n$  números reais e  $x \in L$  (o “pivô”); ele devolve um  $j < n$  e uma permutação  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $L$ , tal que todo  $x_i$ , para  $1 \leq i \leq j$ , é menor ou igual a  $x$  e todo  $x_l$ , para  $j + 1 \leq l \leq n$ , é maior ou igual a  $x$ . No algoritmo abaixo chamamos de *lado esquerdo da partição* os  $x_i$  para  $1 \leq i \leq j$ , e *lado direito da partição* os  $x_l$  para  $j + 1 \leq l \leq n$ .

### SELEÇÃO

- (1) Divida os  $n$  elementos da entrada em  $\lceil n/5 \rceil$  grupos de cinco elementos cada (e no máximo um grupo consistindo dos  $n \bmod 5$  elementos restantes).
- (2) Descubra a mediana em cada um dos  $\lceil n/5 \rceil$  ordenando-os por inserção e tomando o elemento do meio (se o grupo tiver um número par de elementos tome a maior das duas medianas).
- (3) Use SELEÇÃO recursivamente para descobrir a mediana  $M$  das  $\lceil n/5 \rceil$  medianas do passo 2.
- (4) Particione a entrada usando  $M$  como pivô. Chame de  $k$  o número de elementos no lado esquerdo da partição.
- (5) Use SELEÇÃO recursivamente para descobrir ou o  $t$ -ésimo maior elemento no lado esquerdo da partição se  $t \leq k$ , ou o  $(t - k)$ -ésimo maior elemento da parte direita da partição.

Para o problema dos  $k$ -iguais vamos assumir que  $n = 2^m k$ . Determinamos a mediana ( $2^{m-1}k$ -ésimo maior elemento) dos  $n$  elementos da entrada. Seguimos determinando a mediana no lado esquerdo e no lado direito ( $2^{m-2}k$ -ésimo maiores elementos), e assim por diante; no  $p$ -ésimo passo esses elementos encontrados separam a entrada em blocos de tamanho  $2^{m-p}k$ . Após  $m$  passos, temos determinado o  $k$ -ésimo,  $2k$ -ésimo,  $\dots$ ,  $2^m k$ -ésimo maiores elementos. Isso é feito em tempo  $O(n)m$ .

Se ocorrem  $k$  elementos da entrada iguais, então um deles deve ser algum desses “maiores elementos” determinados. Comparamos cada um deles (“maiores elementos”) com os  $k$  elementos imediatamente anteriores e com os  $k$  elementos imediatamente posteriores. Se houver  $k$  igualdades em algum momento paramos e respondemos “Sim”; caso contrário respondemos “Não”. Isso é feito com no máximo  $(n/k)2k$  comparações.

Portanto o tempo desse algoritmo é  $O(n)m + (n/(k))2k = O(n \log(n/k))$ .

Para o problema da  $k$ -divisibilidade procedemos como acima e determinamos o  $k$ -ésimo,  $2k$ -ésimo,  $\dots$ ,  $tk$ -ésimo (lembramos que  $t = n/k$ ) maiores elementos em tempo  $O(n \log t)$ . Esses elementos

dividem a entrada em blocos de tamanho  $k$ . Comparamos cada um deles com os  $k$  precedentes. Se cada teste resultar em igualdade então a resposta é “Sim”, caso contrário a resposta é “Não”. O número de comparações é menor que  $n$  e, portanto, o tempo do algoritmo é  $O(n \log(n/k))$ .



## CAPÍTULO 3

# Colapso de Complexos Simpliciais e Evasividade de Propriedades de Grafos

Neste capítulo vamos tratar da complexidade de propriedades monótonas de certas famílias de grafos, a saber, a família dos grafos de ordem potência de primo, a dos grafos bipartidos e a dos grafos de ordem seis. Esse último caso serve para ilustrar a aplicação dos métodos desenvolvidos até então, e mostra a dificuldade de se manusear o problema no caso geral.

A primeira seção é um “aquecimento” e pode ser vista como uma extensão do Capítulo 1; nela apresentamos alguns resultados gerais sobre evasividade. Na segunda seção apresentamos os resultados de Kahn, Saks e Sturtevant [18] a respeito de grafos de ordem potência de primo; na terceira seção apresentamos os resultados de Yao [33] para grafos bipartidos. Na quarta seção mostramos, seguindo [18], que propriedades de grafos de ordem seis são evasivas; esta é a única demonstração conhecida para esse caso “pequeno”.

Na última seção deste capítulo apresentamos uma aplicação do resultado de Kahn, Saks e Sturtevant, sobre propriedades de grafos de ordem potência de primo serem evasivas, na Conjectura de Aanderaa Rosenberg.

Chamamos a atenção do leitor ao fato de que, neste capítulo, estamos considerando grafos sobre um conjunto fixo de vértices e, portanto, identificamos um grafo com o seu conjunto de arestas.

### 3.1. Evasividade

Chamamos de *grafo* um par ordenado de conjuntos  $G = (V(G), A(G))$ , onde  $V(G)$  é um conjunto finito de elementos chamados *vértices* e  $A(G)$  um conjunto de subconjuntos de  $V(G)$  de tamanho dois (ou simplesmente, 2-subconjuntos), cujos elementos são chamados *arestas*. Quando  $G$  está subentendido e não há perigo de confusão denotamos os conjuntos de vértices e arestas por  $V$  e  $A$ , respectivamente.

A *ordem* de um grafo é o número de elementos de  $V$ . O conjunto de todos os 2-subconjuntos de  $V$  é denotado por  $V^{(2)}$ .

Uma propriedade  $P$  de grafos sobre um conjunto  $V$  de vértices fixo (por exemplo planaridade, conexidade, etc.) pode ser identificada com o subconjunto  $\mathcal{P}$  do conjunto das partes de  $V^{(2)}$  correspondentes aos grafos que satisfazem  $P$ . Assim, dizemos que um grafo  $G$  tem a propriedade  $P$  se e somente se  $G \in \mathcal{P}$  (note que aqui identificamos um grafo com seu conjunto de arestas).

O problema de decidir se um grafo tem determinada propriedade é então um caso particular de decidir se um conjunto  $B$  dado pertence a uma determinada família  $\mathcal{P}$  de subconjuntos de um conjunto  $X$ . Vamos assumir que  $|X| = m$  e chamar  $\mathcal{P}$  de *propriedade de conjuntos* ou simplesmente propriedade. Por ora, vamos nos preocupar com propriedades de conjuntos ao invés de propriedades de grafos.



Definimos a árvore de decisão para esse problema pondo o conjunto de entradas  $E$  como o conjunto das partes de  $X$ ; o conjunto de respostas  $S$  é  $\{\text{“Sim”}, \text{“Não”}\}$  e indica ao final da computação se um dado  $B \in E$  pertence ou não à propriedade. A árvore é binária e as arestas que partem de um nó interno têm rótulos “Sim” e “Não”; os nós internos são rotulados com elementos  $x \in X$  e “perguntam” se  $x$  é elemento de  $B$ . A resposta à pergunta de cada nó indica por qual aresta seguir com a computação.

Se  $\mathcal{P}$  é uma propriedade sobre  $X$  denotamos por  $c(\mathcal{P})$  a *complexidade da propriedade*  $\mathcal{P}$ , definida por

$$c(\mathcal{P}) = \min\{p(T) : T \text{ é uma árvore de decisão para } \mathcal{P}\},$$

onde  $p(T)$  é a profundidade da árvore  $T$ . A propriedade é *evasiva* se tem complexidade  $m$ , isto é, todas as perguntas “ $x \in B?$ ” ( $x \in X$ ) precisam ser feitas.

Uma propriedade  $\mathcal{P}$  é *monótona decrescente* se  $G \in \mathcal{P}$  e  $H \subseteq G$  implicam  $H \in \mathcal{P}$ . Definimos propriedade *monótona crescente* pondo  $G \subseteq H$  na definição anterior. Note que se  $\mathcal{P}$  é uma propriedade monótona crescente, a propriedade complementar  $\mathcal{P}^c$  é monótona decrescente e  $c(\mathcal{P}) = c(\mathcal{P}^c)$ . As nossas propriedades são *não triviais*, isto é, pelo menos um e não todos os subconjuntos de  $X$  satisfazem a propriedade.

Daqui em diante consideramos propriedades monótonas decrescentes não-triviais apenas, e usamos o termo *propriedade monótona*.

O *polinômio enumerador* para  $\mathcal{P}$  é definido por  $\phi_{\mathcal{P}}(z) = \sum z^{|G|}$ , onde a soma é sobre todo  $G \in \mathcal{P}$ .

PROPOSIÇÃO 3.1. *Se  $c(\mathcal{P}) = d$  então  $(z + 1)^{m-d}$  divide  $\phi_{\mathcal{P}}(z)$ .*

PROVA. Imediato da Proposição 1.11. □

COROLÁRIO 3.2 (Condição de balanceamento par ímpar). *Se o número de elementos de  $\mathcal{P}$  com cardinalidade par não é igual ao número de elementos de cardinalidade ímpar, então  $\mathcal{P}$  é evasiva.*

PROVA. Seja  $\mathcal{P}$  uma propriedade com  $c(\mathcal{P}) = d$ . Temos que  $\phi(-1) = \sum (-1)^{|G|}$ , onde a soma é sobre todo  $G \in \mathcal{P}$ . Como o número de elementos de  $\mathcal{P}$  com cardinalidade par não é igual ao número de elementos de cardinalidade ímpar, temos  $\phi(-1) \neq 0$ . Segue da Proposição 3.1 que  $0^{m-d}$  divide  $\phi(-1)$ , portanto, devemos ter  $d = m$ . □

Na próxima seção, ações de grupos em espaços topológicos serão uma ferramenta importante e a título de ilustração vamos ver um resultado nessa direção. Antes damos algumas definições.

A *ação* de um grupo  $M$  sobre um conjunto  $S$  é uma função de  $M \times S$  em  $S$  tal que

- (i)  $1_M x = x$  para todo  $x \in S$ ,
- (ii)  $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$  para todo  $x \in S$ .

Denotamos por  $S_m$  o grupo das permutações de  $m$  elementos ou *grupo simétrico de grau  $m$* . Um *grupo de permutações* é um subgrupo de um grupo simétrico. Se  $\Gamma < S_m$  é um grupo de permutações agindo de forma natural sobre  $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$  e  $I \subseteq [m]$  então a *órbita* de  $I$  pela ação de  $\Gamma$  é o conjunto

$$\text{orb}_{\Gamma}(I) = \{\gamma(I) : \gamma \in \Gamma\},$$

onde  $\gamma(\{x_1, x_2, \dots, x_l\}) = \{\gamma(x_1), \gamma(x_2), \dots, \gamma(x_l)\}$ , e o *estabilizador* de  $I$  é o subgrupo

$$\Gamma_I = \{\gamma \in \Gamma: \gamma(I) = I\}.$$

A ação de  $\Gamma$  é *transitiva* em  $[m]$  se para qualquer  $q \in [m]$  temos  $\text{orb}(q) = [m]$ . Uma ação transitiva é *duplamente transitiva* se para todo  $q \in [m]$  temos que  $\Gamma_{\{q\}}$  é transitivo em  $[m] \setminus \{q\}$ .

Se  $\mathcal{P}$  é uma família de subconjuntos de  $X$  dizemos que a ação de  $\Gamma$  *preserva*  $\mathcal{P}$  se dados  $A \in \mathcal{P}$  e  $\gamma \in \Gamma$  temos  $\gamma(A) \in \mathcal{P}$ ; denotamos por  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  o *grupo de permutações de  $X$  que preservam  $\mathcal{P}$* .

**PROPOSIÇÃO 3.3.** [26, Rivest e Vuillemin '76] *Se  $|X| = p^r$  com  $p$  primo e  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $r \geq 1$ ,  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  é transitivo sobre  $X$ ,  $\emptyset \in \mathcal{P}$  e  $X \notin \mathcal{P}$ , então  $\mathcal{P}$  é evasiva.*

**PROVA.** Tome  $G \in \mathcal{P}$ . Como  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  é transitivo sobre  $X$ , cada elemento de  $X$  está contido em exatamente  $c$  conjuntos da órbita de  $G$ , para algum  $c \geq 1$ . Ademais, pondo  $\Gamma = \text{Aut}(\mathcal{P})$ ,

$$|\text{orb}_\Gamma(G)||G| = p^r c,$$

e, portanto, ou  $p$  divide  $|\text{orb}_\Gamma(G)|$ , ou  $p$  divide  $|G|$ . Se  $p$  não divide  $|\text{orb}_\Gamma(G)|$ , então  $|G| = 0$ . De fato, ou  $|G| = 0$  ou  $|G| = p^r$ , mas esta última igualdade não vale pois  $X \notin \mathcal{P}$ .

Se  $\mathcal{P}_i = \{G \in \mathcal{P}: |G| \equiv i \pmod{2}\}$ ,  $i = 0, 1$ , então cada  $\mathcal{P}_i$  consiste de órbitas inteiras. Logo a condição par-ímpar não é balanceada pois, para algum  $i$ , a família  $\mathcal{P}_i$  deve conter uma órbita de tamanho 1 (pois  $\emptyset \in \mathcal{P}$ ), e as outras órbitas em ambas famílias têm tamanho divisível por  $p$ . Segue que  $\mathcal{P}$  é evasiva.  $\square$

Voltando às propriedades de grafos, as que nos interessam são *invariantes por isomorfismo*, isto é, se um grafo  $a$  satisfaz então toda cópia isomorfa desse grafo também a satisfaz. Esse fato distingue as propriedades de grafos de propriedades arbitrárias pois o grupo  $S_n$  age transitivamente nos  $\binom{n}{2}$  elementos de  $V^{(2)}$  preservando os grafos que têm determinada propriedade.

### 3.2. Propriedades de grafos com ordem potência de primo

O fato de as nossas propriedades serem invariantes por isomorfismo e o fato de que  $\mathcal{P}$  é um complexo simplicial abstrato parecem sugerir que podemos recorrer a resultados sobre ações de grupos finitos em espaços topológicos. Deixamos registrado que ação de grupos foi usada por Rivest e Vuillemin (veja Proposição 3.3) para provar a Conjectura de Aanderaa Rosenberg (veja página xi) para  $\varepsilon = 1/16$ .

Neste capítulo, daqui em diante, um complexo simplicial abstrato e uma propriedade monótona são confundidos e usamos a notação  $\Delta$  ou  $\mathcal{P}$  conforme estamos interessados ou não nas propriedades topológicas dessa família de conjuntos.

Chamamos  $\text{Aut}(\Delta)$  de *grupo de automorfismos* de  $\Delta$  e esse grupo também age na realização geométrica  $\|\Delta\|$  de  $\Delta$  como um grupo de homeomorfismos lineares por partes da seguinte forma: dado  $\gamma \in \text{Aut}(\Delta)$  pomos  $\|\gamma\|(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i x_{\gamma(i)}$ .

A seguinte generalização da Conjectura de Karp (veja pág. xi) foi proposta por Kahn, Saks e Sturtevant.

**CONJECTURA 3.4.** [18, Kahn, Saks, Sturtevant '84] *Se  $\Delta$  é um complexo simplicial sobre  $X$  não vazio e não evasivo e  $\text{Aut}(\Delta)$  é transitivo sobre  $X$  então  $\Delta$  é um simplexo.*

Sejam  $\Delta$  um complexo simplicial e  $\Gamma$  um grupo de permutações agindo nos vértices de  $\Delta$ . Definimos o complexo  $\Delta_\Gamma$  da seguinte forma: os vértices de  $\Delta_\Gamma$  são as faces de  $\Delta$  não-vazias  $\Gamma$ -invariantes minimais e se  $A_1, \dots, A_k$  são vértices de  $\Delta_\Gamma$ , então  $\{A_1, \dots, A_k\}$  é uma face de  $\Delta_\Gamma$  se e somente se  $A_1 \cup \dots \cup A_k$  é uma face de  $\Delta$ .

Por exemplo, considere o complexo  $\Delta$  da figura 1.

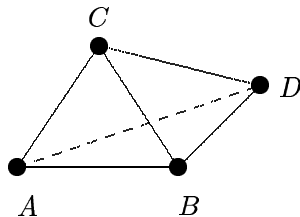


FIGURA 1. Exemplo: 3-simplexo

Suponha que  $\Gamma = \langle (ABC) \rangle$ . Então  $\{A, B, C\}$  e  $\{D\}$  são as faces invariantes minimais pela ação de  $\Gamma$ . O complexo  $\Delta_\Gamma$  tem vértices  $X = \{A, B, C\}$  e  $Y = \{D\}$ , como  $X \cup Y$  é face de  $\Delta$  temos que  $\{X, Y\}$  é face de  $\Delta_\Gamma$ . Note que  $\Delta_\Gamma$  tem representação geométrica com  $X$  sendo o baricentro de  $\|\{A, B, C\}\|$ , com  $Y = D$ , e  $\|\{X, Y\}\|$  o segmento que une esses pontos.

De fato, se representamos um vértice de  $\Delta_\Gamma$  pelo baricentro da face minimal invariante associada a ele temos

$$\|\Delta_\Gamma\| = \|\Delta\|_\Gamma = \{x \in \|\Delta\| : \gamma(x) = x \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\}.$$

Dizemos que um complexo  $\Delta$  é  $\mathbb{Z}$ -acíclico se  $\tilde{H}_i(\Delta; \mathbb{Z}) = 0$  para todo  $i \geq 0$ . Note que se  $\Delta$  é  $\mathbb{Z}$ -acíclico então pelo Teorema do Coeficiente Universal (veja [23], pág. 121, Teo. 6.2) o complexo  $\Delta$  é  $\mathbb{Z}_p$ -acíclico.

Seja  $\mathcal{M}$  a família de todos os grupos  $\Gamma$  contendo subgrupos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  tais que

- (i)  $\Gamma_1 \triangleleft \Gamma_2 \triangleleft \Gamma$ , onde  $\triangleleft$  é notação para subgrupo normal,
- (ii)  $\Gamma_1$  é um  $p$ -grupo,  $\Gamma_2/\Gamma_1$  é cíclico e  $\Gamma/\Gamma_2$  é um  $q$ -grupo, com  $p$  e  $q$  primos.

De acordo com essas definições, vamos assumir o seguinte resultado.

**PROPOSIÇÃO 3.5.** [25, Oliver '75] *Se  $\Gamma \in \mathcal{M}$  age sobre o complexo  $\mathbb{Z}_p$  acíclico  $\Delta$ , então  $\|\Delta\|_\Gamma \neq \emptyset$ .  $\square$*

Com relação à Conjectura 3.4 temos o seguinte resultado.

**TEOREMA 3.6.** [18, Kahn, Saks, Sturtevant '84] *Se  $\Delta$  é um complexo não vazio  $\mathbb{Z}$  acíclico e  $\text{Aut}(\Delta)$  contém um subgrupo vértice transitivo  $\Gamma$  que pertence a  $\mathcal{M}$ , então  $\Delta$  é um simplexo.*

Abaixo, se  $x \in \|\Delta\|$  denotamos por  $\text{supp}(x)$  a face minimal de  $\Delta$  com  $x \in \|\text{supp}(x)\|$ .

**PROVA.** [Teorema 3.6] Seja  $\Gamma$  um membro de  $\mathcal{M}$  e suponha que  $\Gamma$  age transitivamente no conjunto  $X$  de vértices de  $\Delta$ . Pela Proposição 3.5 existe  $x \in \|\Delta\|_\Gamma$ . Considere  $A = \text{supp}(x) \in \Delta$ . Então  $\gamma(A) = A$  para todo  $\gamma \in \Gamma$  e pela transitividade da ação de  $\Gamma$  em  $X$  segue que  $A = X$ , e que, portanto,  $\Delta$  é um simplexo.  $\square$

Veremos agora uma interessante conexão entre topologia e evasividade, mas precisaremos de algumas definições.

Uma *face livre* de  $\Delta$  é uma face não-maximal contida em uma única face maximal. Um *colapso elementar* em  $\Delta$  é a operação de remoção de uma face livre de  $\Delta$  junto com todas as faces que a contém. Dizemos que  $\Delta$  *colapsa* para  $\Delta'$  se existe uma sequência finita de colapsos elementares a partir de  $\Delta$  resultando em  $\Delta'$ . Um complexo é *colapsável* se ele colapsa para um 0-simplexo. Note que se  $\Delta'$  é o resultado de um colapso elementar em  $\Delta$ , então  $\Delta'$  é um retrato por deformação de  $\Delta$ . Isto implica que se um complexo é colapsável então sua realização geométrica é contraível.

Para cada  $x \in X$  existe associado dois complexos sobre  $X \setminus \{x\}$ : o complexo ligação (que já conhecemos da página 12) e o complexo *co estrela*:

$$\begin{aligned} \text{Lg}(x) &= \{A \subseteq X \setminus \{x\} : A \cup \{x\} \in \Delta\}, \\ \text{Co}(x) &= \{A \subseteq X \setminus \{x\} : A \in \Delta\}. \end{aligned}$$

LEMA 3.7. [18, Kahn, Saks, Sturtevant '84] *Se existe  $\{x\} \in \Delta$  tal que  $\text{Lg}(x)$  e  $\text{Co}(x)$  são colapsáveis então  $\Delta$  é colapsável.*

PROVA. Seja  $A_1, A_2, \dots, A_k$  uma sequência de faces livres usadas para o colapso do complexo  $\text{Lg}(x)$ . Para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$  temos que  $A_i \cup \{x\} \in \Delta$  e ainda  $A_i \cup \{x\}$  é livre no complexo resultante da sequência de colapsos  $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$ . Vamos mostrar que  $A_1 \cup \{x\}, A_2 \cup \{x\}, \dots, A_k \cup \{x\}$  é uma sequência de faces livres que nos dá um colapso de  $\Delta$  resultando em  $\text{Co}(x)$  e, portanto,  $\Delta$  é colapsável.

Chame de  $\Sigma$  o resultado dessa sequência de colapsos elementares a partir de  $\Delta$ . Se  $B \in \text{Co}(x)$  então  $B \subseteq X \setminus \{x\}$  e  $B \in \Delta$ ; suponha que  $B \notin \Sigma$ . Então  $A_i \cup \{x\} \subseteq B$  para algum  $i$ , isto é,  $x \in B$ , o que é uma contradição. Portanto,  $B \in \Sigma$ .

Se  $B \in \Sigma$  então, para todo  $i$ ,  $A_i \cup \{x\} \not\subseteq B$ . Se  $x \in B$ , considere  $B' = B \setminus \{x\} \in \text{Lg}(x)$ . Como  $A_1, A_2, \dots, A_k$  é uma sequência de faces livres que resulta no colapso de  $\text{Lg}(x)$ , temos que  $A_i \subseteq B'$  para algum  $i$ , portanto,  $A_i \cup \{x\} \subseteq B$ , o que é uma contradição. Portanto,  $x \notin B$ . Como  $B \in \Delta$ , temos por definição que  $B \in \text{Co}(x)$ . Logo,  $\Sigma = \text{Co}(x)$ .  $\square$

A conexão com a topologia é dada pela seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 3.8. [18, Kahn, Saks, Sturtevant '84] *Um complexo  $\Delta$  não evasivo é colapsável.*

PROVA. Se  $\Delta$  é um complexo não-evasivo sobre  $X$  então existe algum  $x \in X$  tal que “ $x \in A$ ?” é uma primeira pergunta que decide pertinência em  $\Delta$  em menos que  $n = |X|$  perguntas para qualquer entrada  $A \subseteq X$ .

Se a resposta para essa “boa” primeira pergunta é “Sim” então  $A \in \Delta$  se e somente se  $A \setminus \{x\} \in \text{Lg}(x)$ ; caso contrário,  $A \in \Delta$  se e somente se  $A \in \text{Co}(x)$ . Note que não podemos decidir se  $A \setminus \{x\}$  é uma face de  $\text{Lg}(x)$  se não perguntarmos pelos vértices de  $\text{Lg}(x) \setminus \text{Co}(x)$ . Portanto, se  $\text{Lg}(x)$  é evasivo então  $\Delta$  é evasivo. Como  $\text{Co}(x)$  é um complexo sobre  $n - 1$  vértices temos que  $\text{Co}(x)$  é não-evasivo, pois caso contrário teríamos  $\Delta$  evasivo o que contraria a hipótese.

Assim, em ambos os casos existe uma estratégia não-evasiva que decide pertinência nos complexos  $\text{Lg}(x)$  e  $\text{Co}(x)$ . A prova agora segue por indução em  $n = |X|$ .

Para  $n = 1$  a nossa proposição é trivial. Seja  $\Delta$  um complexo não-evasivo sobre  $n \geq 2$  vértices. Então escolhemos  $x \in X$  tal que  $x$  é uma boa primeira pergunta. Como vimos acima  $\text{Lg}(x)$  e  $\text{Co}(x)$  são

complexos não-evasivos sobre menos que  $n$  vértices e, por hipótese de indução, colapsáveis. Portanto, pelo Lema 3.7 acima  $\Delta$  é colapsável.  $\square$

Com essa conexão em mãos podemos provar o principal resultado dessa seção.

**TEOREMA 3.9.** [18, Kahn, Saks, Sturtevant '84] *Se  $n$  é uma potência de primo então toda propriedade não trivial monótona de grafos com  $n$  vértices é evasiva.*

**PROVA.** Seja  $\mathcal{P}$  uma propriedade monótona não-trivial sobre grafos de ordem  $|V| = p^r$ , onde  $p$  é um primo. Identifiquemos  $V$  com o corpo finito com  $p^r$  elementos  $\text{GF}(p^r)$  e consideremos o grupo de transformações lineares

$$\Gamma = \{x \mapsto ax + b : a, b \in \text{GF}(p^r), a \neq 0\}.$$

A ação de  $\Gamma$  sobre  $V$  é duplamente transitiva sobre os elementos de  $\text{GF}(p^r)$ , e, em particular, transitiva nos vértices de  $\Delta = \mathcal{P} \subseteq V^{(2)}$ . Para vermos isso, precisamos provar que para quaisquer dois pares  $\{z_1, w_1\}$  e  $\{z_2, w_2\}$  de elementos de  $\text{GF}(p^r)$  com  $z_1 \neq w_1$  e  $z_2 \neq w_2$  existe  $\gamma \in \Gamma$  que leva o primeiro par no segundo. Basta notar que o sistema

$$\begin{cases} z_2 = az_1 + b \\ w_2 = aw_1 + b \end{cases}$$

tem solução e o elemento de  $\Gamma$  que procuramos é

$$x \mapsto \frac{z_2}{z_1} \frac{w_2}{w_1} x + \frac{z_1 w_2}{z_1} \frac{w_1 z_2}{w_1}.$$

Tomemos o subgrupo das translações

$$\Gamma_1 = \{x \mapsto x + b : b \in \text{GF}(p^r)\}$$

e vejamos que  $\Gamma_1$  é um  $p$ -subgrupo normal de  $\Gamma$ .

Para vermos que é subgrupo normal basta provarmos que  $\gamma\Gamma_1\gamma^{-1} \subseteq \Gamma_1$ . Mas, para todos  $a, b, b' \in \text{GF}(p^r)$  com  $a \neq 0$ ,

$$x \xrightarrow{\gamma^{-1}} a^{-1}x \quad b \xrightarrow{\gamma_1} a^{-1}x + b' \quad b \xrightarrow{\gamma} x \quad ab + ab' + b,$$

onde  $\gamma : x \mapsto ax + b$  e  $\gamma_1 : x \mapsto x + b'$ . Portanto,  $\gamma\Gamma_1\gamma^{-1} \subseteq \Gamma_1$ .

Agora resta mostrar que se  $\gamma(x) = x + b$  ( $x \in \text{GF}(p^r)$ ) é um elemento de  $\Gamma_1$  então  $\gamma^p = \text{id}$ . Mas,  $\gamma^p(x) = x + pb = x$  pois  $\text{GF}(p^r)$  tem característica  $p$ . Ainda,  $\Gamma/\Gamma_1$  é isomorfo ao grupo multiplicativo do corpo  $\text{GF}(p^r)$ :

$$\begin{aligned} \Gamma/\Gamma_1 &\rightarrow \text{GF}(p^r)^* \\ \Gamma_1\gamma &\mapsto a, \end{aligned}$$

onde  $\gamma : x \mapsto ax + b$ , é um isomorfismo. Portanto,  $\Gamma/\Gamma_1$  é cíclico, pois é sabido que  $\text{GF}(p^r)^*$  é cíclico.

Logo,  $\Gamma \in \mathcal{M}$ . Portanto, se supomos que  $\mathcal{P}$  é não-evasiva, então pela Proposição 3.8 temos que  $\mathcal{P}$  é  $\mathbb{Z}$ -acíclico e pelo Teorema 3.6 concluímos que  $\mathcal{P}$  é trivial, um absurdo que prova o teorema.  $\square$

### 3.3. Propriedades de grafos bipartidos

Tome  $V$  e  $W$  os conjuntos de naturais positivos  $[m]$  e  $[n]$ , respectivamente. Por toda esta seção consideramos grafos bipartidos  $G = (V \dot{\cup} W, A)$  com bipartição  $V \dot{\cup} W$  e propriedades monótonas não-triviais de grafos bipartidos. As propriedades também são invariantes por isomorfismos, isto é, invariante sob a ação natural do grupo  $S_m \oplus S_n$  sobre  $V \dot{\cup} W$ .

Denotamos por  $B_D$ , onde  $D \subseteq V$ , o grafo bipartido  $(V \dot{\cup} W, A)$  com  $A = \{(v, w) : v \in D, w \in W\} = D \times W$ . Note que se  $\mathcal{P}$  é uma propriedade monótona não-trivial, então existe um inteiro  $r(\mathcal{P}) \in \{0, \dots, m-1\}$  tal que  $B_D \in \mathcal{P}$  se  $|D| \leq r(\mathcal{P})$  e  $B_D \notin \mathcal{P}$  caso contrário. De fato, temos que se  $B_D \in \mathcal{P}$  e  $D' \subseteq V$  com  $|D| = |D'|$  então  $B_{D'} \in \mathcal{P}$  pois  $\mathcal{P}$  é invariante sob ação do  $S_m \oplus S_n$ . Como  $\mathcal{P}$  é monótona não-trivial para algum inteiro  $0 \leq r < m$  temos que  $B_D \in \mathcal{P}$  se e somente se  $|D| \leq r$ .

Vamos assumir o seguinte resultado.

**PROPOSIÇÃO 3.10.** [25, Oliver '75] *Se  $\Delta$  é um complexo simplicial  $\mathbb{Q}$  acíclico e  $\Gamma$  é cíclico, então  $\chi(\Delta_\Gamma) = 1$ .*

Assim, pomos o resultado principal desta seção.

**TEOREMA 3.11.** [33, Yao '88] *Toda propriedade monótona não trivial de grafos bipartidos é evasiva.*

**PROVA.** Assuma que  $\mathcal{P}$  é uma propriedade monótona não-trivial e não-evasiva de grafos bipartidos. Então  $\Delta = \mathcal{P}$  é racionalmente acíclico (Proposição 3.8 e Teorema do Coeficiente Universal).

Tome  $\Gamma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ , onde  $\sigma_i(r, s) = (r, s + i \pmod n)$ . Então  $\Gamma = 1 \oplus \mathbb{Z}_n < S_m \oplus S_n$  e, portanto,  $\Delta$  é invariante sob a ação de  $\Gamma$ . Assim, pela Proposição 3.10 temos que  $\chi(\Delta_\Gamma) = 1$ .

Agora, vamos olhar para  $\Delta_\Gamma$ . Se  $r(\mathcal{P}) = 0$  então  $\Delta_\Gamma$  é vazio e  $\chi(\Delta_\Gamma) = 0 \neq 1$ , que é uma contradição. Se  $r(\mathcal{P}) \geq 1$ , temos que  $A_1, \dots, A_m$ , onde  $A_i = \{(i, w) : w \in W\}$ , são as faces não-vazias de  $\Delta$  minimalmente invariantes sob a ação de  $\Gamma$ . Ademais,

$$\Delta_\Gamma = \{\{A_i : i \in D\} : D \subseteq V \text{ e } B_D \in \Delta\}.$$

Se  $B_D \in \Delta$  então  $B_D \in \mathcal{P}$  e vimos que isso acontece se e somente se  $|D| \leq r(\mathcal{P})$ . Como uma face de dimensão  $j$  tem cardinalidade  $j+1$  e elas são em número  $\binom{m}{j+1}$ , temos

$$\begin{aligned} \chi(\Delta_\Gamma) &= \sum_{j=0}^{r(\mathcal{P})-1} \binom{m}{j+1} = \sum_{j=0}^{r(\mathcal{P})-1} \binom{m-1}{j} \\ &= 1 + \binom{m-1}{r(\mathcal{P})} \neq 1, \end{aligned}$$

e temos uma contradição da Proposição 3.10. Portanto,  $\mathcal{P}$  é evasiva.  $\square$

### 3.4. Propriedades de grafos de ordem 6

Nessa seção usamos os métodos que vimos anteriormente para provar que propriedades monótonas não-triviais sobre grafos de ordem seis são evasivas. Relembramos que essa é a única demonstração conhecida para esse caso.

Seja  $\Delta$  uma propriedade não-evasiva monótona decrescente de grafos de ordem seis e defina a propriedade *dual*  $\Delta^* = \{A \subseteq V^{(2)} : A^c = V^{(2)} \setminus A \notin \Delta\}$ . Se  $H$  é um grafo de ordem seis dizemos que  $\Delta$  contém  $H$  ou  $H$  pertence a  $\Delta$  se qualquer (equivalentemente, algum) grafo sobre  $V = \{1, 2, \dots, 6\}$  isomorfo a  $H$  é face de  $\Delta$ .

Assuma que  $\Delta$  é diferente do vazio e de um simplexo. Essas hipóteses sobre  $\Delta$  também são válidas para  $\Delta^*$ . A demonstração prossegue considerando ações de subgrupos  $\Gamma$  do grupo  $S_6$  e aplicando as Proposições 3.12 e 3.13 dadas abaixo ao complexo  $\Delta$ .

PROPOSIÇÃO 3.12. [27, Smith '41] *Se  $\Gamma$  é um  $p$  grupo agindo sobre um complexo simplicial  $\mathbb{Z}_p$  acíclico  $\Delta$ , então  $\|\Delta\|_\Gamma$  é  $\mathbb{Z}_p$  acíclico.  $\square$*

PROPOSIÇÃO 3.13. [25, Oliver '75] *Se o grupo  $\Gamma$  age sobre o complexo  $\mathbb{Z}_p$  acíclico  $\Delta$ , e se  $\Gamma$  contém um  $p$  subgrupo normal  $\Gamma_1$  tal que  $\Gamma/\Gamma_1$  é cíclico, então  $\chi(\|\Delta\|_\Gamma) = 1$ .  $\square$*

LEMA 3.14. *Emparelhamentos perfeitos pertencem a  $\Delta$ .*

PROVA. Seja  $\Gamma$  o estabilizador de  $M = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ . Então,  $\Gamma \cong S_3 \times C_2 \times C_2 \times C_2$  e, portanto,  $\Gamma \in \mathcal{M}$  pois podemos tomar  $\Gamma_1 \cong C_2^4$  e  $\Gamma/\Gamma_1 \cong C_3$  e  $\Gamma_2 = \Gamma$ . Pela Proposição 3.13 ( $\Delta$  é acíclico pois estamos assumindo não-evasividade)  $\Delta_\Gamma$  é não-vazio. As possíveis faces de  $\Delta$  fixas pela ação de  $\Gamma$  são as órbitas da ação de  $\Gamma$  mostradas na figura 2. Assim, pelo menos uma órbita está em  $\Delta$ .

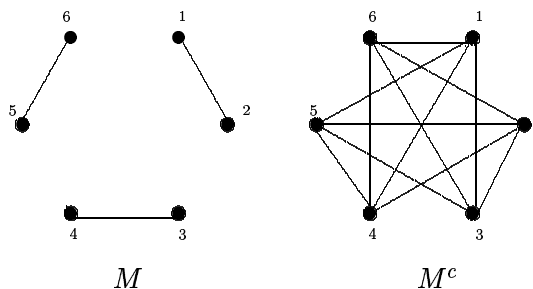


FIGURA 2. As órbitas sob ação do grupo estabilizador de  $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$

Mas se  $M^c \in \Delta$  então  $M \in \Delta$  pois  $M$  é isomorfo ao subgrafo  $M' = \{\{1, 6\}, \{2, 3\}, \{5, 4\}\}$  de  $M^c$ .  $\square$

LEMA 3.15. *Exatamente um de  $2K_3$  e  $K_{3,3}$  pertence a  $\Delta$ .*

PROVA. Tome  $\Gamma = \langle (123), (456), (14)(25)(36) \rangle$ . Então  $\Gamma \cong C_3 \times C_3 \times C_2$  e segue que  $\Gamma \in \mathcal{M}$ . Pela Proposição 3.5 pelo menos uma órbita da ação de  $\Gamma$  (veja figura 3) está em  $\Delta$ . Pela Proposição 3.13 se as duas órbitas estão em  $\Delta$  então a união delas também está (caso contrário,  $\Delta_\Gamma$  é formado por dois vértices o que contraria a Proposição 3.13) e assim teríamos que  $\Delta$  é um simplexo, pois a união das órbitas é o  $K_6$ .  $\square$

Suponha que  $2K_3$  pertença a  $\Delta$  (e, portanto, a  $\Delta^*$ ) e tome o grupo de permutações  $\Gamma = \langle (153624) \rangle$ . Então,  $\Gamma \cong C_6$  e, portanto, pertence a família  $\mathcal{M}$ . Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  as órbitas da ação de  $\Gamma$  (veja figura 4).

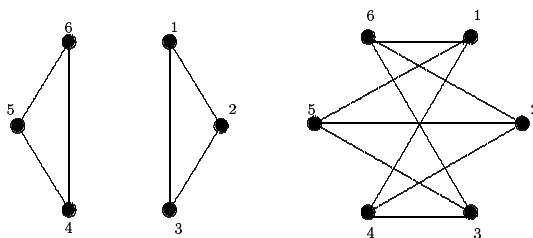


FIGURA 3. As órbitas sob ação do grupo  $\langle(123), (456), (14)(25)(36)\rangle$

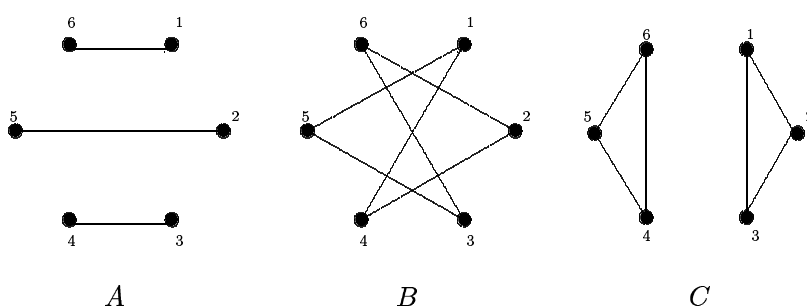


FIGURA 4. As órbitas sob ação do grupo  $\langle(153624)\rangle$

A órbita  $A$  pertence a  $\Delta$  pois emparelhamentos perfeitos pertencem a  $\Delta$ , e  $C$  pertence a  $\Delta$  por hipótese. Portanto, a órbita  $B$  pertence a  $\Delta$ , pois caso contrário a Proposição 3.13 força  $A \cup C$  estar em  $\Delta$  e  $B$  é isomorfo a um subgrafo de  $A \cup C$ . Logo,  $B \in \Delta$ .

Dessa forma temos uma contradição pois tudo o que fizemos vale para  $\Delta^*$ , isto é,  $A, B$  e  $C$  pertencem a  $\Delta^*$  e então  $A^c = B \cup C$ ,  $B^c = A \cup C$  e  $C^c = A \cup B$  não pertencem a  $\Delta$ , o que contradiz a Proposição 3.13, pois neste caso teríamos  $\chi(\Delta_\Gamma) = 3$ . Assim,  $2K_3 \notin \Delta$  e, portanto,  $K_{3,3} \in \Delta$  e  $K_{3,3} \in \Delta^*$ .

LEMA 3.16.  $K_3$  não pode pertencer a ambos  $\Delta$  e  $\Delta^*$ .

PROVA. Tomemos  $\Gamma = \langle(123), (456)\rangle$ . Neste caso,  $\Gamma \cong C_3 \times C_3$  e então  $\Gamma$  pertence a família  $\mathcal{M}$ . Se  $K_3 \in \Delta$  temos que  $D, E$  e  $F$  (veja figura 5) pertencem a  $\Delta$ . Pela Proposição 3.12 temos que  $D \cup E$  (que é isomorfo a  $D \cup F$ ) pertence a  $\Delta$ . Mas então,  $(D \cup E)^c = F = K_3$  não pode pertencer a  $\Delta^*$ .  $\square$

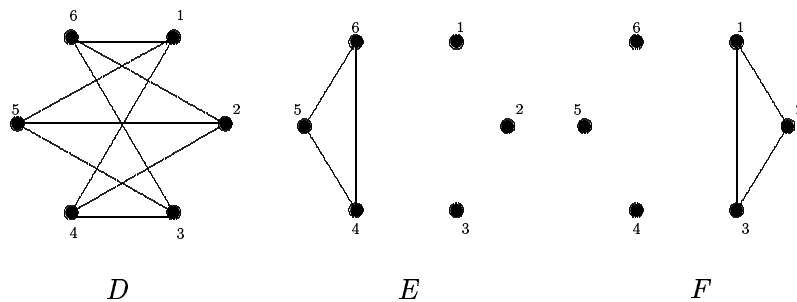


FIGURA 5. As órbitas sob ação do grupo  $\langle(123), (456)\rangle$



Assim, podemos assumir que  $K_3$  não pertence a  $\Delta$ . Agora, tomando o grupo  $\Gamma = \langle (12), (3456), (35) \rangle$ , temos  $\Gamma \cong C_4 \times C_2 \times C_2$  e, portanto,  $\Gamma$  pertence a  $\mathcal{M}$ . As órbitas da ação de  $\Gamma$  estão mostradas na figura 6.

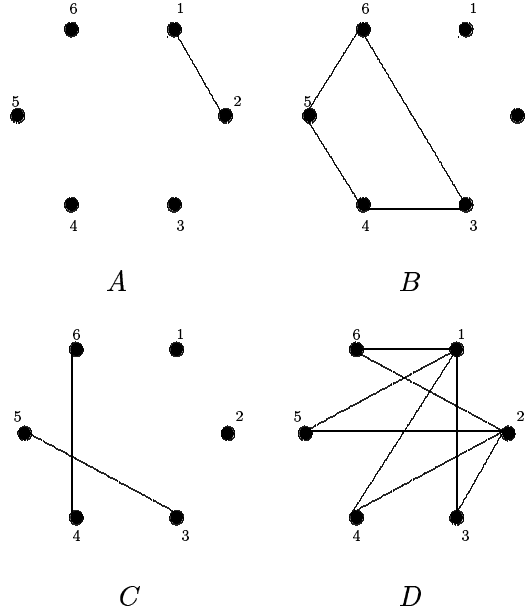


FIGURA 6. As órbitas sob ação do grupo  $\langle (12), (3456), (35) \rangle$

LEMA 3.17. *As faces de  $\Delta_\Gamma$  são  $\{\emptyset\}$ ,  $\{A\}$ ,  $\{B\}$ ,  $\{C\}$ ,  $\{A, B\}$ ,  $\{A, C\}$  (veja figura 6).*

PROVA. Cada um dos grafos listados são subgrafos do  $K_{3,3}$  e, portanto, faces de  $\Delta_\Gamma$ . Por outro lado,  $A \cup D$ ,  $B \cup D$ ,  $C \cup D$  e  $B \cup C$  contêm o  $K_3$  e, portanto, não pertencem a  $\Delta$ . Se  $D \in \Delta_\Gamma$  então  $\chi(\Delta_\Gamma) = 2$  e a Proposição 3.13 implica que um de  $A \cup D$ ,  $B \cup D$  ou  $C \cup D$  pertence a  $\Delta$ . Logo  $D \notin \Delta$ .  $\square$

O vértice  $A$  é fixo pela ação de  $\Gamma$  de modo que  $\Gamma$  age sobre  $\text{Lg}(A, \Delta)$  e os pontos fixos dessa ação são dados por

$$(\text{Lg}(A, \Delta))_\Gamma = \text{Lg}(A, \Delta_\Gamma) = \{C, B\}.$$

Por outro lado,  $\text{Lg}(A, \Delta)$  é não-evasivo (a princípio isso é verdade para algum vértice, mas então é verdade para todos pois  $\text{Aut}(\Delta)$  é transitivo). Então pela Proposição 3.13  $(\text{Lg}(A, \Delta))_\Gamma$  deve ter característica de Euler igual a 1, uma contradição que completa a prova.

### 3.5. Uma implicação do resultado de Kahn, Saks e Sturtevant na conjectura de Aanderaa–Rosenberg

Nesta seção vamos ver uma implicação do resultado de Kahn, Saks e Sturtevant na conjectura de Aanderaa–Rosenberg (pág. xi).

Denotamos por  $K_i$  o grafo completo sobre o conjunto de vértices  $V = [i]$  e por  $K_i \cup K_j$  a união disjunta dos grafos completos  $K_i$  e  $K_j$ . Denotamos por  $E_m$  o grafo  $(V, A)$ , com  $V = [m]$  e  $A = \emptyset$ , e por  $K_1 + G$  o grafo com conjunto de vértices  $\{1\} \cup V(G)$  (união disjunta) e conjunto de arestas  $\{(1, i) : i \in$

$V(G)\} \cup A(G)$ . Ainda,  $c(n)$  denota o mínimo entre as complexidades de todas as propriedades monótonas não-triviais de grafos de ordem  $n$ .

LEMA 3.18. *Qualquer propriedade monótona não trivial de grafos de ordem  $n$  tem complexidade  $c(n) \geq \min\{c(n-1), \lfloor n^2/4 \rfloor\}$ .*

PROVA. Seja  $\mathcal{P}$  uma propriedade monótona não-trivial de grafos de ordem  $n$ . Se  $K_1 + E_{n-1} \in \mathcal{P}$  então  $\mathcal{P}' = \{G' : K_1 + G' \in \mathcal{P}\}$  é uma propriedade monótona não-trivial de grafos de ordem  $n-1$  de complexidade pelo menos  $c(n-1)$ . Da mesma forma, se  $K_1 \cup K_{n-1} \notin \mathcal{P}$  construímos  $\mathcal{P}'$  de complexidade pelo menos  $c(n-1)$ . Em ambos casos,  $c(\mathcal{P}') \leq c(\mathcal{P})$ . Então podemos supor que  $K_1 \cup K_{n-1} \in \mathcal{P}$  e  $K_1 + E_{n-1} \notin \mathcal{P}$ .

Considere o grafo  $K_{V_2} \cup E_{V_1}$  consistindo de um grafo completo sobre um subconjunto  $V_2$  de  $[n]$  com cardinalidade  $\lfloor n/2 \rfloor$  e nenhuma aresta incidindo nos  $\lfloor n/2 \rfloor$  vértices restantes, que denotamos por  $V_1$ . Se  $\Gamma$  é o grupo que deixa esse grafo invariante então  $\Gamma$  pode ser escrito como o produto direto do grupo simétrico sobre os vértices de  $V_1$  com o grupo simétrico sobre os vértices de  $V_2$ . Denote por  $L$  o conjunto de arestas com um extremo em  $V_1$  e o outro em  $V_2$ . Represente uma aresta de  $L$  por  $(i, j)$  com  $i \in V_1$  e  $j \in V_2$ .

Ponha  $\mathcal{P}' = \{H \subseteq L : H \cup K_{V_2} \in \mathcal{P}\}$ . Então  $\mathcal{P}'$  é monótona e não-trivial ( $L \notin \mathcal{P}'$ , caso contrário  $K_1 + E_{n-1} \in \mathcal{P}$ ). Pelo Teorema 3.11 temos que  $\mathcal{P}'$  é evasiva, isto é,  $c(\mathcal{P}') = \lfloor n/2 \rfloor \lfloor n/2 \rfloor = \lfloor n^2/4 \rfloor$ . Também,  $c(\mathcal{P}') \leq c(\mathcal{P})$ . Portanto,  $c(\mathcal{P}) \geq \lfloor n^2/4 \rfloor$ .  $\square$

O Teorema dos Números Primos nos diz que se  $\pi(x)$  é a quantidade de números primos menores ou iguais a  $x$  então  $\pi(x)(\log x/x)$  tende a 1 quando  $x$  cresce indefinidamente (veja [10]). Segue daí que existe uma função real  $f(x) = o(x)$  tal que existe um primo entre  $x$  e  $x + f(x)$ , para todo  $x$ .

TEOREMA 3.19. [18, Kahn, Saks, Sturtevant '84] *Qualquer propriedade monótona não trivial de grafos de ordem  $n$  tem complexidade pelo menos  $n^2/4 + o(n^2)$ .*

PROVA. Temos do lema acima que  $c(n) \geq \min\{c(p), (p+1)^2/4\}$ , onde  $p$  é a maior potência de primo menor que  $n$ . Portanto temos do Teorema 3.9 que  $c(n) \geq \min\{\binom{p}{2}, (p+1)^2/4\} \geq (p+1)^2/4$ . Como  $p = n - o(n)$  temos que

$$c(n) \geq \frac{(n^2 + o(n)^2 - 2o(n)n)}{4} = n^2/4 + o(n^2).$$

$\square$



## Considerações Finais

Como dissemos na Introdução, determinar os recursos mínimos necessários para a computação de um problema é difícil. Os resultados apresentados nessa dissertação têm bastante importância nesse sentido. Eles, juntamente com vários outros, consolidam a topologia algébrica como uma ferramenta importante nessa área.

O nosso objetivo aqui foi apresentar esses resultados de forma clara, reduzindo os pré-requisitos e tentamos chegar da forma “mais rápida” às aplicações. Em vista disso, temos algumas considerações a fazer.

Na Seção 2.1 a fórmula de Goresky e MacPherson poderia ser evitada da forma que descrevemos a seguir. Em [8], Björner, Lovász e Yao provaram que *se  $\mathcal{A}$  é um arranjo de poliedros convexos no  $\mathbb{R}^n$  então  $V_{\mathcal{A}}$  e  $\Delta(L_{\mathcal{A}} \setminus \{\hat{0}\})$  têm o mesmo tipo homotópico*. Eles também provaram que *se  $P$  é um poliedro fechado no  $\mathbb{R}^n$ , então  $l^+(P) \geq |\chi(\hat{P}) - 1|$  e  $l^-(P) \geq |\chi(\hat{P}) - 1| + (-1)^{n-1}$* .

Esses resultados funcionam muito bem juntos se  $V_{\mathcal{A}}$  é um poliedro limitado. Porém, quando  $\mathcal{A}$  é um arranjo de subespaços temos dois problemas: (i) as cotas inferiores envolvem a topologia de  $\widehat{V}_{\mathcal{A}}$  e não a de  $V_{\mathcal{A}}$ ; (ii)  $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$  e, portanto,  $V_{\mathcal{A}}$ , bem como  $\Delta(L_{\mathcal{A}} \setminus \{\hat{0}\})$  e o espaço que apresentaremos abaixo como solução do problema (i) têm tipo homotópico do ponto e, portanto, fornecem informações triviais sobre as cotas.

A solução para (i) é tomar a intersecção de  $V_{\mathcal{A}}$  com um simplexo  $Q$  suficientemente grande, no sentido de encontrar toda intersecção não-vazia de elementos de  $\mathcal{A}$ . Isto torna o problema de pertinência um pouco mais difícil: primeiro testamos pertinência em  $Q$ , então testamos pertinência em  $V_{\mathcal{A}}$ . Observe que a pertinência em  $Q$  pode ser resolvida com uma árvore de decisão linear ótima de  $2^{n+1} - 1$  folhas “Sim”, cada uma correspondendo a uma face aberta de  $Q$ . Para resolver (ii) tomamos a intersecção de  $V_{\mathcal{A}}$  com um hiperplano afim  $H$  disjunto de  $\bigcap \mathcal{A}$  mas encontrando toda outra intersecção de elementos de  $\mathcal{A}$ . Neste caso, qualquer árvore de decisão linear para  $V_{\mathcal{A}}$  produz (restringindo-se as entradas) uma árvore de decisão linear para  $V_{\mathcal{A}} \cap H$  com o mesmo número de folhas “Sim” e o mesmo número de folhas “Não”. O reticulado das intersecções de  $\mathcal{A} \cap H$  é isomorfo a  $L_{\mathcal{A}} \setminus \{\hat{1}\}$  e então temos a cota inferior

$$l^+(V_{\mathcal{A}}) \geq 2^{-n-1} |\chi(\Delta(L_{\mathcal{A}} \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}))|,$$

que, via Teorema de Hall, fornece

$$l^+(V_{\mathcal{A}}) \geq 2^{-n-1} |\mu(\hat{0}, \hat{1}) + 1|.$$

Além disso, usamos a fórmula de Goresky e MacPherson para computar os números de Betti de  $M_{\mathcal{A}_n^k}$  na Seção 2.3; em [7], Björner e Lovász usaram a fórmula de Goresky e MacPherson juntamente com o conceito de descascabilidade (“shellability”) de ordens parciais.

Para alguns resultados recentes de Björner envolvendo descascabilidade e complexidade de computação, veja [6]. Björner mostrou que a homologia de ordens parciais lexicograficamente descascáveis é

dada contando-se certos tipos especiais de cadeias dessa ordem parcial. Na Seção 2.3 dissemos que a homologia de  $V_{\mathcal{A}_{n,k}}$  foi calculada por Björner e Welker. Pois bem, usando esses resultados a cota inferior para o problema dos  $k$ -iguais obtida por Björner e Lovász foi  $l^-(n) > (n/3k)^n$ . Esses números de Betti obtidos por Björner e Welker também foram obtidos por Björner e Wachs (citado em [6]) via descascabilidade lexicográfica.

Ainda nos referindo ao Capítulo 2, o trabalho de Björner e Lovász apresenta o cálculo de  $\mu_T(n)$ , quando  $T^*$  é finito, como  $(n-1)! \sum_i \alpha_i^{-n}$ , onde os  $\alpha_i$  são as raízes de  $1 + \sum_{n \in T^*} s_T(n)x^n/n!$ .

Na Seção 3.5, o Lema 3.18 é essencialmente devido a Kleitman e Kwiatkowski, porém, há uma modificação. Eles provaram que  $c(n) \geq \min\{c(n-1), q(n-q)\}$  onde  $q$  é a potência de primo mais próxima de  $n/2$ . Além disso, eles não dispunham do teorema do Yao sobre grafos bipartidos mas provaram um resultado mais fraco e de forma puramente combinatória (de fato, a idéia da prova é praticamente a mesma de Rivest e Vuillemin, Proposição 3.3): *Sejam  $p$  um primo,  $X = \{(i, j) : 1 \leq i \leq p^r \text{ e } 1 \leq j \leq m\}$  e  $\mathcal{P} \subseteq 2^X$  uma propriedade monótona não trivial invariante sob a ação de um grupo de permutações  $\Gamma$  transitivo no primeiro elemento do par. Se para todo  $j \in [m]$  o subconjunto  $C_j = \{(i, j) : 1 \leq i \leq p^r\}$  está em  $\mathcal{P}$ , então  $\mathcal{P}$  é evasiva.*

## Referências Bibliográficas

- [1] M. Aigner. *Combinatorial Theory*. Springer-Verlag, 1979.
- [2] N. Alon. Non-constructive proofs in combinatorics. In *Proc. of International Congress of Mathematicians*, pages 1421–1490, Kyoto, Japan, 1991.
- [3] N. Alon, P. Frankl, and L. Lovász. The chromatic number of Kneser hypergraphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 298:359–370, 1986.
- [4] M. Ben-Or. Lower bounds for algebraic computation trees. In *Proc. 15th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing*, pages 80–86, 1983.
- [5] M. Ben-Or. Algebraic computation trees in characteristic  $p > 0$ . In *Proc. IEEE Symp. on Foundations of Computer Science*, pages 534–539, 1994.
- [6] A. Björner. Non-pure shellability,  $f$ -vectors, subspace arrangements and complexity. preprint, 1995.
- [7] A. Björner and L. Lovász. Linear decision trees, subspace arrangements, and Möbius functions. *J. Amer. Math. Soc.*, 7:677–706, 1994.
- [8] A. Björner, L. Lovász, and A.C.-C. Yao. Linear decision trees: volume estimates and topological bounds. In *Proc. 24th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing*, pages 170–177, 1992.
- [9] B. Bollobás. *Extremal Graph Theory*. Academic Press, London, 1978.
- [10] K. Chandrasekharan. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer Verlag, Heidelberg, 1969.
- [11] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, and R.L. Rivest. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 1990.
- [12] D.P. Dobkin and R.J. Lipton. On the complexity of computations under varying sets. *J. Comput. System Sci.*, 18:86–91, 1979.
- [13] S. Eilenberg and N. Steenrod. *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1952.
- [14] M. Goresky and R. MacPherson. *Stratified Morse Theory*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [15] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, 1994.
- [16] M.J. Greenberg and J.R. Harper. *Algebraic Topology – A first course*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Massachusetts, 1981.
- [17] F.M. Heide. A polynomial linear search algorithm for the  $n$ -dimensional knapsack problem. *J. Assoc. Comp. Mach.*, 31:668–676, 1984.
- [18] J. Kahn, M. Saks, and D. Sturtevant. A topological approach to evasiveness. *Combinatorica*, 4:297–306, 1984.
- [19] D.J. Kleitman and D.J. Kwiatkowski. Further results on the Aanderaa Rosenberg conjecture. *J. Combinatorial Theory (B)*, 28:85–95, 1980.
- [20] M. Kneser. Aufgabe 300. *Jber. Deutsch. Math. Verein*, 58:677–706, 1955.
- [21] I. Kriz. Equivariant cohomology and lower bounds for chromatic numbers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 333(2):567–577, 1992.
- [22] L. Lovász. Topological and algebraic methods in graph theory. In *Graph Theory and Related Topics*, pages 1–14, New York, 1979. Academic Press.
- [23] W.S. Massey. *Singular Homology Theory*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [24] J. Milnor. On the Betti numbers of real varieties. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15:275–280, 1964.
- [25] R. Oliver. Fixed-point sets of group actions on finite cyclic complexes. *Comment. Math. Helv.*, 50:155–177, 1975.
- [26] R. Rivest and S. Vuillemin. On recognizing graph properties from adjacency matrices. *Theor. Comp. Sci.*, 4:371–384, 1978.
- [27] P.A. Smith. Fixed points theorems for periodic transformations. *Amer. J. of Math.*, 63:1–8, 1941.
- [28] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw Hill, New York, 1966.
- [29] R.P. Stanley. Binomial posets, Möbius inversion, and permutation enumeration. *J. Combinatorial Theory (A)*, 20:336–356, 1976.
- [30] R.P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume 1. Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, CA, 1978.
- [31] J.M. Steele and A.C.-C. Yao. Lower bounds for algebraic decision trees. *J. Algorithms*, 3:1–8, 1982.
- [32] J.W. Vick. *Homology theory*. Academic Press, N.Y., 1973.
- [33] A.C.-C. Yao. Monotone bipartite graph properties are evasive. *SIAM J. Computing*, 17:517–520, 1988.

- [34] A.C.-C. Yao. Algebraic decision trees and Euler characteristics. In *Proc. 33rd Ann. IEEE Symp. on Foundations of Computer Science*, pages 268–277, 1992.
- [35] A.C.-C. Yao. Decision tree complexity and Betti numbers. In *Proc. 26th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing*, pages 615–624, 1994.
- [36] A.C.-C. Yao. Algebraic decision trees and Euler characteristics. *Theoretical Computer Science*, 141:133–150, 1995.
- [37] H.P. Yap. *Some topics in graph theory*, volume 108 of *London Math. Soc. Lecture Note Series*. Cambridge University Press, 1986.
- [38] G.M. Ziegler and R.T. Živaljević. Homotopy types of arrangements via diagrams of spaces. *Math. Ann.*, 295:527–548, 1993.

## Índice

- $C_d(P)$ , viii
- $L_{\mathcal{A}}$ , 19
- $M_{\mathcal{A}}$ , 19
- $O(f(n))$ , viii
- $P_w$ , 16
- $S(n, r)$ , 26
- $S_m$ , 38
- $V^{(2)}$ , 37
- $V_{\mathcal{A}}$ , 19
- $[n]$ , 3
- $\Delta(P)$ , 11
- $\Delta^*$ , 43
- $\Delta_{\Gamma}$ , 39
- $\hat{P}$ , 10
- $\Omega(f(n))$ , viii
- $\Pi_n$ , 3
- $\Pi_{n,k}$ , 21
- $\Pi_n^{(k)}$ , 33
- $\Pi_n^k$ , 26
- $\tilde{\beta}_k$ , 9
- $\tilde{\chi}$ , 9
- $\beta(m, n)$ , viii
- $\beta^k$ , 11
- $\beta_k$ , 8, 9
- $\mathcal{A}$ , 19
- $\mathcal{M}$ , 40
- $\chi$ , 8, 9
- $\delta$ , 2
- $\hat{0}$ , 3
- $\hat{1}$ , 3
- $\mu$ , 2
- $\mu^k(n)$ , 26
- $\mu_k(n)$ , 21
- $\mu_n^{(k)}$ , 33
- $\rho$ , 3
- $\vee$ , 3
- $\wedge$ , 3
- $\zeta$ , 2
- $c(P)$ , 38
- $k$ -distintos
  - algoritmo para o problema dos, x
  - arranjo dos, 31
  - cota inferior, 32
  - problema dos, ix, 30
- $k$ -divisibilidade
  - algoritmo para a, 34
  - arranjo da, 33
  - cota inferior, 34
  - problema da, x, 33
- $k$ -iguais
  - algoritmo para os, 34
  - arranjo dos, 29
  - cota inferior, 29
  - problema dos, x, 29
- $k$ -simplexo, 7
  - orientado, 8
  - singular, 9
- $l^+(P)$ , 18
- $l^-(P)$ , 18
- $\#S$ , viii
- álgebra de incidência, 2
- árvore de decisão, 13
  - algébrica de ordem  $d$ , vii
  - linear, vii, 15
- árvores de computação algébrica, viii
- órbita, 38
- ínfimo, 3
- ação
  - de um grupo, 38
  - duplamente transitiva, 39
  - transitiva, 39
- Aanderaa Rosenberg, conjectura, xi
- algoritmo
  - para o problema da  $k$ -divisibilidade, 34
  - para o problema dos  $k$ -distintos, x
  - para o problema dos  $k$ -iguais, 34
- SELEÇÃO, 34
- antidadeia, 1
- aplicação de cadeias, 6
- arranjo, 19
  - central, 21
  - da  $k$ -divisibilidade, 33
  - dos  $k$ -distintos, 31
  - dos  $k$ -iguais, 29
  - não-central, 21
  - semi-reticulado das intersecções, 19
- Aut, 39
- axiomas de Eilenberg Steenrod, 5
- célula correspondente a uma folha, 16



- cadeia, 1, 2
- cadeia singular, 9
- cadeias saturadas, 12
- característica de Euler, 7-9
  - reduzida, 9
- categoria admissível para uma teoria de homologia, 4
- Co, 41
- co-estrela, 41
- cobre, 2
- colapso elementar, 41
- comparáveis, 1
- complexo
  - co-estrela, 41
  - ligação, 41
- complexo da ordem, 11
- complexo de cadeias, 6
  - $n$ -ésimo módulo de homologia de um, 6
  - a homologia de um, 6
  - aumentado, 7
  - módulo de homologia reduzido de um, 7
  - orientadas, 8
  - sequência exata de, 6
  - singulares, 9
- complexo simplicial
  - abstrato, 7
  - acíclico, 40
  - colapsável, 41
  - dimensão de um, 7
  - evasivo, xii
  - face de um, 7
  - geométrico, 7
  - não-trivial, xii
  - vértices de um, 7
- conjectura
  - de Aanderaa Rosenberg, xi
  - de Karp, xi
- conjunto descendente de uma permutação, 33
- conjunto parcialmente ordenado, 1
  - graduado, 3
  - limitado, 3
  - puro, 3
- cota inferior
  - combinatória, 19, 20
  - de Ben-Or, viii
  - de Björner e Lovász, ix
  - de Björner, Lovász e Yao, ix
  - de Dobkin e Lipton, viii
  - de Steele e Yao, viii
  - para o problema da  $k$ -divisibilidade, 34
  - para o problema dos  $k$ -distintos, 32
  - para o problema dos  $k$ -iguais, 29
  - para ordenação, 12
  - topológica, 16
- dimensão, 7
- Dobkin e Lipton
  - cota inferior de, viii
  - teorema de, viii
- equivalência homotópica, 5
- espaço contraível, 5
- estabilizador, 38
- estratégia simples, xi
- exemplo de uma árvore de decisão linear, 16
- fórmula de Goresky e MacPherson, 19, 20, 31
- fórmula de inversão de Möbius, 3
- face livre, 41
- função
  - de Kronecker, 2
  - de Möbius, 2
  - de Möbius de  $\Pi_{n,k}$ , 24
  - posto de uma ordem parcial, 3
  - simplicial, 7
  - zeta, 2
- funções homotópicas, 4
- grafo, 37
  - arestas de um, 37
  - ordem de um, 37
  - vértices de um, 37
- grafo escorpião, xi
- grupo
  - de automorfismos, 39
  - de permutações, 38
  - simétrico, 38
- grupo de homologia relativa, 5
- homomorfismo
  - bordo, 8, 9
  - cobordo, 10
  - conector, 7
  - induzido, 5, 6
- homotopia, 4
- incomparáveis, 1
- intervalo fechado, 1
- isomorfismo
  - de complexos simpliciais, 7
  - de ordens parciais, 1
- Karp, conjectura de, xi
- Kronecker, função de, 2
- Lg, 12, 41
- ligação, 41
- Möbius
  - fórmula de inversão, 3
- Möbius, função de, 2
- máximo, 2
- módulo das cocadeias singulares, 10
- módulo de cohomologia, 10
  - relativo, 10

- módulo de homologia
  - simplicial, 8
  - simplicial relativo, 8
  - singular, 9
- mínimo, 2
- maximal, 2
- minimal, 2
- mochila, problema da, vii
- monótona, propriedade, xi
- multicadeia, 2
- número de Betti, 8
  - reduzido, 9
  - singular, 9
- números de Stirling do segundo tipo, 26
  - fórmula recursiva, 26
- não-trivial
  - complexo simplicial, xii
  - propriedade, xi
- operador
  - bordo, 5
  - cobordo, 5, 10
- ordem parcial, 1
- ordem total, 1
- par de espaços, 4
- pares e funções admissíveis, 4
- poliedro, 15
  - convexo, 15
- polinômio característico
  - de  $\Pi_{n,k}$ , 21
  - de  $\Pi_n^k$ , 27
- posto
  - de uma ordem parcial, 3
  - função, 3
- problema
  - da  $k$ -divisibilidade, x, 33
  - da mochila, vii
  - dos  $k$ -distintos, ix, 30
  - dos  $k$ -iguais, x, 29
- propriedade
  - ação de grupo que preserva, 39
  - complexidade, 38
  - condição de balanceamento, 38
  - de conjunto, 37
  - dual, 43
  - evasiva, xi, 38
  - invariante por isomorfismo, 39
  - monótona, xi, 38
  - monótona crescente, 38
  - monótona decrescente, 38
  - não-trivial, xi, 38
  - polinômio enumerador, 38
- realização geométrica, 8
- reticulado, 3
  - reticulado das partições de  $[n]$ , 3
  - retrato, 5
    - por deformação, 5
    - por deformação forte, 5
  - semi-reticulado, 3
    - das intersecções de um arranjo, 19
  - sequência exata, 6
    - curta, 6
    - de Mayer Vietoris, 9, 18
  - simplexo, 7
  - Steele e Yao
    - cota inferior de, viii
    - teorema de, viii
  - subordem, 1
  - supp, 40
  - supremo, 3
  - teorema
    - de Dobkin e Lipton, viii
    - de dualidade de Alexander, 10
    - de Goresky e MacPherson, 19, 20, 31
    - de Hall, 12
    - de ponto fixo de Oliver, 40, 43, 44
    - de ponto fixo de Smith, 43
    - de Steele e Yao, viii
  - teoria de cohomologia, 5
  - teoria de homologia, 5
  - zeta, função, 2