

Aplicações do Teorema de Borsuk–Ulam em Combinatória

Sumário

1	Complexos Simpliciais	3
2	O Teorema de Borsuk–Ulam e uma aplicação	5
2.1	Uma demonstração combinatória do Teorema de Borsuk–Ulam	5
3	Equivalências do Teorema de Borsuk–Ulam	8
3.1	O problema do colar	10
4	Generalizações do Teorema de Borsuk–Ulam	12
4.1	\mathbb{Z}_p -espaços, \mathbb{Z}_p -funções, homotopia e conexidade	12
4.2	Produto deletado	15
5	Algumas construções de espaços topológicos e complexos simpliciais	16
5.1	Espaço quociente, buquê e junção de espaços topológicos	16
5.2	Complexos simpliciais abstratos e complexo das cadeias	17
5.3	Junção de complexos simpliciais	18
6	Os Teoremas de Radon e de Tverberg	22
6.1	O Teorema de Tverberg	23
6.2	Teorema de Tverberg Colorido	24
7	O Teorema de Van Kampen–Flores generalizado	25
8	O problema do colar generalizado	27
9	A conjectura de Kneser	30
9.1	O resultado de Lovász	32
9.2	O resultado de Alon, Frankl e Lovász	33

Nesta monografia apresentamos algumas ferramentas da topologia para resolver problemas em combinatória extremal. Essas aplicações usam a técnica de junções e produtos deletados desenvolvida por Sarkaria em conjunto com algum resultado do tipo Borsuk–Ulam. Começamos, na Seção 1, com uma rápida introdução aos complexos simpliciais que são os objetos geométricos básicos aqui.

Na Seção 2 apresentamos o conhecido Teorema de Borsuk–Ulam e, na contra-mão do que se segue, apresentamos uma demonstração combinatória desse teorema geométrico-topológico. Na seção seguinte damos as formulações equivalentes ao Teorema de Borsuk–Ulam. Também apresentamos uma aplicação deste teorema num caso particular do *problema do colar*: dois ladrões desejam dividir

um colar composto de d tipos de pedras preciosas de modo que cada um tenha a mesma quantia de pedras dos diferentes tipos.

O objetivo da Seção 4 é apresentar generalizações do Teorema de Borsuk–Ulam, para isso dedicamos parte dessa seção para introduzir alguns conceitos que são as generalizações daqueles envolvidos no teorema original. Uma dessas generalizações é usada para demonstrar o problema do colar envolvendo k ladrões. Na Seção 8 apresentamos a versão plena do problema do colar. Mas para tanto, ainda precisamos de algumas construções especiais de espaços topológicos. Isso é feito na Seção 5; essa seção também é importante para as aplicações que virão em seguida.

Na Seção 6 apresentamos um conhecido teorema da teoria de convexidade, o Teorema de Radon: *Todo conjunto de $d + 2$ pontos no \mathbb{R}^d pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos de modo que os fechos convexos se encontram.* Nas Seções 6.1 e 6.2 apresentamos generalizações do Teorema de Radon. Aqui, cabe a ressalva que destas três seções, apenas para o resultado da última, não se conhece uma demonstração combinatória para o problema.

Na década de 30, Van Kampen e Flores, independentemente, foram pioneiros em dar-nos exemplos gerais de complexos simpliciais não imersíveis em espaços euclidianos de dimensão duas vezes a dimensão do complexo simplicial. Na Seção 7 veremos esse resultado e uma generalização dele devida a Sarkaria.

Uma das mais belas e, provavelmente, das mais conhecidas aplicações de topologia em combinatória é a demonstração de Lovász para a conjectura de Kneser: *Se os r -subconjuntos de um $(2r + t)$ -conjunto são particionados em $t + 1$ classes, então alguma classe contém um par de conjuntos disjuntos.* Na Seção 9 discutimos esse resultado e uma generalização dele provada por Alon, Frankl e Lovász. Não demonstramos esses resultados, mas demonstramos uma posterior generalização deles devida a Sarkaria.

Usamos a palavra *aplicação* para significar função contínua.

1 Complexos Simpliciais

Dizemos que um conjunto de pontos $\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ é *afim-independente* se não existem $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, $\sum_i \alpha_i = 0$ e $\sum_i \alpha_i v_i = 0$.

Um simplexo de dimensão n , ou n -simplexo, $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$ no \mathbb{R}^d é o fecho convexo de $n+1$ pontos, $\{v_0, \dots, v_n\}$ afim independentes no \mathbb{R}^d chamados *vértices*. Dessa forma, um ponto $a \in \sigma$ é da forma $t_0 v_0 + \dots + t_n v_n$, com $t_i \in [0, 1]$ e $\sum_i t_i = 1$. Uma família de simplexos $\Delta = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ é um *complexo simplicial geométrico* se valem as seguintes condições:

- (i) toda face de qualquer simplexo $\sigma \in \Delta$ é também um simplexo de Δ ;
- (ii) se σ e σ' são simplexos de Δ , então a intersecção $\sigma \cap \sigma'$ é face de σ e σ' .

A união de todos os simplexos de Δ é denotada $\|\Delta\|$. O espaço topológico $\|\Delta\|$ é a *realização geométrica* de Δ ; as vezes omitimos $\|\ \ \|$ e diremos somente complexo simplicial. Definimos a *dimensão* do complexo simplicial geométrico Δ por $\dim(\Delta) = \max\{\dim(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$.

PROPOSIÇÃO 1 *Todo complexo simplicial Δ de dimensão d pode ser imerso no \mathbb{R}^{2d+1} .*

PROVA. Primeiro, note que do fato da matriz de Vandermonde ter determinante não-nulo temos que quaisquer $2(d+1)$ pontos do conjunto $\{(t, t^2, \dots, t^{2d+1}) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{2d+1}$ formam um conjunto afim-independente. Fixe $2(d+1)$ deles, digamos $v_1, \dots, v_{2(d+1)}$. Esses são os vértices de $\|\Delta\|$.

É suficiente provarmos que para todo par de faces $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$

$$(1) \quad \|\sigma_1\| \cap \|\sigma_2\| = \|\sigma_1 \cap \sigma_2\|.$$

Note que a inclusão “ \supseteq ” em (1) é imediata. Vejamos “ \subseteq ”.

Tome

$$x = \sum_{v_i \in \sigma_1} \alpha_i v_i = \sum_{v_j \in \sigma_2} \beta_j v_j \in \|\sigma_1\| \cap \|\sigma_2\|.$$

Portanto,

$$\sum_{v_i \in \sigma_1 \setminus \sigma_2} \alpha_i v_i - \sum_{v_j \in \sigma_2 \setminus \sigma_1} \beta_j v_j + \sum_{v_k \in \sigma_1 \cap \sigma_2} (\alpha_k - \beta_k) v_k = 0,$$

logo, segue da afim-independência dos v_i 's que todos os coeficientes são nulos. Então, $\alpha_k, \beta_k \neq 0$ somente para os vértices $v_k \in \sigma_1 \cap \sigma_2$. ■

Uma *subdivisão* de um simplexo σ é um complexo simplicial $S(\sigma)$ tal que a união de todos os simplexos de $S(\sigma)$ é σ . A subdivisão de um complexo simplicial Δ é um complexo simplicial Δ' tal que

- (i) todo simplexo de Δ' está contido em um único simplexo de Δ ;

(ii) a união de todos os simplexos de Δ' é Δ .

Seja Δ um complexo simplicial de dimensão d . Vamos definir um tipo especial de subdivisão de Δ chamada *subdivisão baricêntrica*. Se $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$ é um simplexo de Δ , o baricentro de σ é o ponto

$$b_\sigma = \frac{1}{n+1}v_0 + \dots + \frac{1}{n+1}v_n,$$

em particular, se σ é um vértice de Δ então $b_\sigma = \sigma$.

A subdivisão baricêntrica do complexo Δ é o complexo $\text{Sd}(\Delta)$ definido por: seus vértices são os baricentros dos simplexos de Δ . Dada uma seqüência $\sigma_0, \dots, \sigma_d$ de simplexos de Δ tal que σ_i é face de σ_{i+1} , para $i = 0, \dots, d-1$, a seqüência correspondente de seus baricentros é o conjunto de vértices de um simplexo de $\text{Sd}(\Delta)$. Somente simplexos obtidos dessa forma são simplexos de $\text{Sd}(\Delta)$.

Defina o *diâmetro* de um complexo simplicial Δ por $\text{diam}(\Delta) = \max_{\sigma \in \Delta} \{\text{diam}(\sigma)\}$, onde $\text{diam}(\sigma)$ é a distância máxima entre dois pontos de σ . O próximo resultado diz que podemos ter o diâmetro de um complexo simplicial arbitrariamente pequeno tomando sucessivas subdivisões baricêntricas.

LEMA 2 *Seja Δ um complexo simplicial de dimensão d . Então*

$$\text{diam}(\text{Sd}(\Delta)) \leq \frac{d}{d+1} \text{diam}(\Delta).$$

PROVA. Seja $\sigma = (v_0, \dots, v_m)$, com $m \leq d$, um simplexo de Δ . Se x e y são dois pontos de σ então

$$(2) \quad \|x - y\| \leq \|y - v_i\|,$$

para algum i , pois se $x = \sum_i t_i v_i$,

$$\|y - x\| = \left\| \sum_i t_i y - t_i v_i \right\| \leq \sum_i t_i \|y - v_i\| \leq (\max_i \|y - v_i\|) \sum_i t_i = \max_i \|y - v_i\|.$$

Pela equação (2) temos $\|y - x\| \leq \|v_i - v_j\|$ para algum $j \in [m]$.

Vamos mostrar que se $b = (1/(m+1))(v_0 + \dots + v_m)$ e $b' = (1/(i+1))(v_0 + \dots + v_i)$ então

$$\|b - b'\| \leq \frac{m}{m+1} \text{diam}(\sigma).$$

Pela equação (2) temos $\|b - b'\| \leq \|b - v_j\|$, para algum j . Então

$$\begin{aligned} \|b - v_j\| &= \left\| \frac{1}{m+1}(v_0 + \dots + v_m) - v_j \right\| = \frac{1}{m+1} \left\| \sum_{i=0}^m (v_i - v_j) \right\| \leq \\ &\frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \|v_i - v_j\| \leq \frac{m}{m+1} \text{diam}(\sigma). \end{aligned}$$

Isso quer dizer que se σ é um m -simplexo de Δ , então $\text{diam}(\text{Sd}(\sigma)) \leq m/(m+1) \text{diam}(\sigma)$, portanto, temos o lema. ■

Se $x \in \Delta$ então $\text{supp}(x)$ é o *suporte* de x e denota o simplexo que contém x em seu interior, minimal com esta propriedade em respeito a inclusão.

2 O Teorema de Borsuk–Ulam e uma aplicação

No que segue denotamos por S^n a esfera de raio 1 e centro na origem do \mathbb{R}^{n+1} . O seguinte teorema, conhecido como Teorema de Borsuk–Ulam, foi conjecturado por Ulam e demonstrado por Borsuk em 1933.

TEOREMA 3 *Se $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação então existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Uma consequência interessante desse teorema é que a esfera S^n não tem subespaço próprio homeomorfo a ela. De fato, se esse não é o caso para algum $U \subset S^n$, tome $x \in S^n \setminus U$ e tome a projeção estereográfica π de $S^n \setminus \{x\}$ no \mathbb{R}^n , com x no pólo norte. Então, o homeomorfismo $U \approx S^n$ e o Teorema de Borsuk–Ulam nos dizem que existe $u \in U$ tal que $\pi|_U(u) = \pi|_U(-u)$, uma contradição pois π é, claramente, injetiva.

2.1 Uma demonstração combinatória do Teorema de Borsuk–Ulam.

Agora, veremos uma demonstração combinatória do Teorema 3 dada por Weiss [18] em 1989. Por toda esta seção estaremos usando a norma $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dessa forma, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\}$ e $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \leq 1\}$.

Suponha que temos o teorema demonstrado para a norma $\|\cdot\|_1$. Para voltarmos a norma usual $\|\cdot\|$, seja $f: (S^n, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e considere a aplicação $h: (S^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow (S^n, \|\cdot\|)$ dada por $h(x) = x/\|x\|$. Então fh é contínua e portanto existe $x \in S^n$ tal que $fh(x) = fh(-x)$, como $h(x), h(-x) \in S^n$ temos o resultado para a norma $\|\cdot\|$.

Um complexo simplicial T é uma *triangulação especial* de B^n se (i) $B^n = \bigcup_{\sigma \in T} \sigma$, (ii) nenhum de seus simplexes pertence a mais de um octante e, (iii) se é simétrica em relação a origem.

Dado X contido num espaço topológico denotamos por ∂X a *fronteira* (ou, *bordo*) de X . Para a demonstração combinatória do Teorema de Borsuk–Ulam vamos usar o seguinte resultado conhecido como Lema de Tucker.

LEMA 4 *Considere uma rotulação dos vértices de uma triangulação especial T de B^n com rótulos em $\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$, digamos $\text{rot}: V(T) \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$, de modo que todo vértice $u \in \partial B^n$ satisfaz $\text{rot}(-u) = -\text{rot}(u)$. Então existe um 1-simplexo (v_0, v_1) em T tal que seus vértices estão rotulados pelo mesmo número com sinais opostos, isto é, $\text{rot}(v_0) = -\text{rot}(v_1)$.*

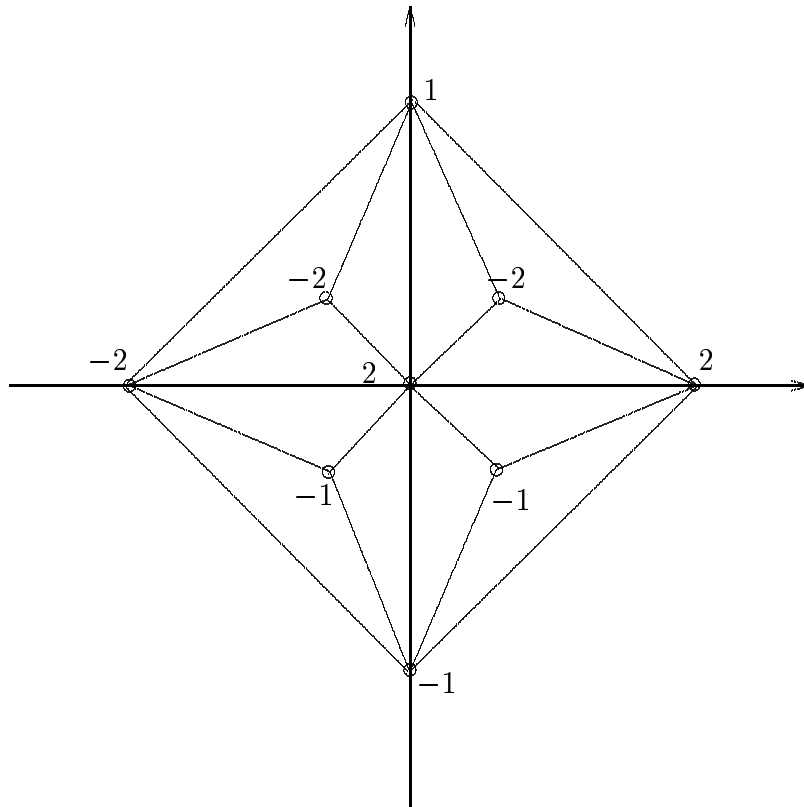


Figura 1: Uma triangulação especial rotulada da bola B^2 .

PROVA. Tome T uma triangulação especial do B^n . Para um simplexo $\sigma \in T$ defina $\text{sinal}(\sigma) = (\text{sinal}(x_1), \dots, \text{sinal}(x_n)) \in \{-1, 0, +1\}$, onde (x_1, \dots, x_n) é um ponto no interior relativo de σ . Note que por (ii) da definição de triangulação especial $\text{sinal}(\sigma)$ está bem definido.

Dizemos que σ é *completamente rotulado* se, para todo $i \in [n]$, quando $(\text{sinal}(\sigma))_i = +1$ algum vértice de σ tem rótulo i e quando $(\text{sinal}(\sigma))_i = -1$ algum vértice de σ tem rótulo $-i$.

Definimos um grafo G onde os vértices são os simplexos de T completamente rotulados e as arestas são definidas por: $\sigma\tau \in E(G)$ se

- (a) $\sigma, \tau \in \partial B^n$ e $\sigma = -\tau$, ou
- (b) σ é um k -simplexo e τ é uma $(k-1)$ -face de σ cujos vértices já têm os rótulos necessários para uma rotulação completa de σ .

Note que o simplexo $\{\mathbf{0}\} = \{(0, \dots, 0)\}$ pertence a dois 1-simplexo em cada eixo coordenado, portanto, se $\text{rot}(\mathbf{0}) = i \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ temos que $\mathbf{0}$ é adjacente (por (b)) em G ao 1-simplexo na direção $|i|$ no sentido $\text{sinal}(i)$; logo, $\mathbf{0}$ tem grau 1 em G . Agora, provaremos que qualquer $\sigma \in V(G)$ tem grau 2 a menos que T contenha uma aresta com rótulos de sinais opostos, o que prova o lema pois o número de vértices de grau ímpar num grafo G é par, isto é, tal aresta existe obrigatoriamente.

Seja $\sigma \in V(G)$ e suponha que $\text{sinal}(\sigma)$ tem k componentes não-nulas. Então, $\dim(\sigma)$ é no máximo k ; note que $\dim(\sigma)$ não é menor que $k-1$ pois não haveria vértices suficientes para uma rotulação completa. Portanto, a dimensão de σ é k ou $k-1$.

Se σ é um $(k-1)$ -simplexo completamente rotulado e $\sigma \notin \partial B^n$ então ele é face de dois k -simplexos completamente rotulados. De fato, σ é um objeto de dimensão $k-1$ num espaço de dimensão k ($\text{sinal}(\sigma)$ tem k componentes não-nulas), portanto, σ está contido num hiperplano afim desse k -espaço; desse modo, σ é face dos dois simplexos completamente rotulados contidos um em cada semi-espaço definido pelo hiperplano. Claramente, nenhuma face de σ tem rótulos suficientes para uma rotulação completa de σ , portanto, por (b) o grau de σ em G é dois. Se $\sigma \in \partial B^n$ então σ é face de um k -simplexo completamente rotulado (o argumento é análogo ao anterior levando em conta que só um dos semi-espaços definidos pelo hiperplano contém um simplexo de T pois σ está na fronteira de B^n). Portanto, σ é adjacente, em G , a tal simplexo e (por (a)) ao simplexo $-\sigma$, isto é, o grau de σ em G é dois.

Se σ é um k -simplexo (isto é, tem $k+1$ vértices) então ele tem os k rótulos obrigatórios para uma rotulação completa mais um rótulo extra. Aqui temos três casos:

- (i) o rótulo extra repete algum dos k obrigatórios;
- (ii) o rótulo extra tem sinal oposto ao de algum dos k rótulos obrigatórios, ou
- (iii) o rótulo extra é diferente dos k rótulos obrigatórios.

No caso (i), σ é adjacente, em G , a duas de suas faces com os rótulos suficientes para a rotulação completa de σ . Note que σ não é face de um $(k+1)$ -simplexo que fica completamente rotulado só com os rótulos de σ , isso só pode ocorrer no caso (iii), onde σ é adjacente à sua face completamente rotulada e ao $(k+1)$ -simplexo que tem σ como face e cuja dimensão a mais é dada pela direção do rótulo extra. Portanto, nos casos (i) e (iii) σ tem grau dois em G .

No caso (ii), temos um 1-simplexo, face de σ , com rótulos de sinais opostos. Como o número de vértices de grau ímpar deve ser par, o caso (ii) necessariamente ocorre, o que prova o lema. ■

Dizemos que uma aplicação $f: S^n \rightarrow X$ é *antípoda* se $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in S^n$. Agora, veremos uma prova do Teorema de Borsuk–Ulam usando o lema acima.

PROVA DO TEOREMA DE BORSUK–ULAM. Seja $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Definimos uma aplicação $g: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde B^n é a bola fechada com o bordo sendo o equador de S^n , isto é, com $\partial B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in S^n : x_n = 0\}$, por $g(x) = f(y) - f(-y)$, onde $y \in S^n$ é tal que sua última coordenada é positiva e a sua projeção ortogonal sobre B^n é x . Claramente, g é uma aplicação antípoda em $\partial B^n = S^{n-1}$. Vamos mostrar que existe x tal que $g(x) = 0$.

Suponha que $g(x) \neq 0$ para todo x em B^n . Do fato de B^n ser compacto sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|g(x)\|_1 \geq \varepsilon$. Ainda mais, sabemos que aplicação definida num compacto é uniformemente contínua, portanto, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x - x'\|_1 < \delta$ então $\|g(x) - g(x')\|_1 < \varepsilon/n$, para quaisquer $x, x' \in B^n$.

Agora, escolha uma triangulação especial T de B^n de modo que o diâmetro de cada simplexo é menor que δ . Isto é possível pois se denotarmos por $\text{Sd}^m(T)$ a m -ésima subdivisão baricêntrica iterada do complexo simplicial T temos, pelo Lema 2, que $\text{diam}(\sigma) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$ para todo $\sigma \in \text{Sd}^m(T)$.

Vamos definir uma rotulação dos vértices de T : ponha $|\text{rot}(x)| = i$ se $g(x)_i = \max\{|g(x)_1|, \dots, |g(x)_n|\}$, onde os g_i 's são as componentes de $g(x) \in \mathbb{R}^n$, e $\text{sinal}(\text{rot}(x)) = \text{sinal}(g(x)_i)$.

Pelo Lema de Tucker (note que as hipóteses do lema estão sendo satisfeitas), existem dois vértices adjacentes em T , digamos x e x' , com $\text{rot}(x) = -\text{rot}(x') = i$. Como $\|g(x)\|_1, \|g(x')\|_1 \geq \varepsilon$ temos, pela rotulação que definimos, que $g_i(x) \geq \varepsilon/n$ e $g_i(x') \leq -\varepsilon/n$, donde tiramos que $\|g(x) - g(x')\|_1 \geq 2\varepsilon/n$, uma contradição pois, pela escolha da triangulação, sabemos que $\|x - x'\|_1 < \delta$ e pela continuidade uniforme de g sabemos que $\|g(x) - g(x')\|_1 < \varepsilon/n$. Portanto, temos que existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. ■

3 Equivalências do Teorema de Borsuk–Ulam

O Teorema de Borsuk–Ulam tem várias formas equivalentes. Abaixo, (iii) foi provado por Borsuk e (iv) por Lyusternik e Shnirelman.

TEOREMA 5 *São equivalentes:*

- (i) Para toda aplicação $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.
- (ii) Para toda aplicação antípoda $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existe $x \in S^n$ tal que $g(x) = 0$.
- (iii) Se $f: S^d \rightarrow S^n$ é aplicação antípoda então $d \leq n$.
- (iv) Para qualquer cobertura aberta A_1, \dots, A_{n+1} do S^n existe pelo menos um $i \in [n+1]$ tal que $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$.
- (v) Para qualquer cobertura fechada B_1, \dots, B_{n+1} do S^n existe pelo menos um $i \in [n+1]$ tal que $B_i \cap (-B_i) \neq \emptyset$.

PROVA.

(i) \Rightarrow (ii). Imediato.

(ii) \Rightarrow (i). Se f é contínua defina $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $g(x) = f(x) - f(-x)$. Claramente, g é contínua antípoda e, portanto, existe $x \in S^n$ tal que $g(x) = 0$, logo $f(x) = f(-x)$.

(v) \Rightarrow (iv). Seja A_1, \dots, A_{n+1} uma cobertura aberta. Para cada $x \in S^n$ existe um aberto V_x contendo x tal que o fecho $\overline{V_x}$ está contido em A_i para algum i .

Considere a cobertura fechada $\{\overline{V_x}\}_{x \in S^n}$ que, por compacidade, possui uma subcobertura finita. Defina B_i como o fechado dado pela união dos fechados da subcobertura finita que estão contidos em A_i . Dessa forma, temos uma cobertura do S^n por $n+1$ fechados B_i 's tal que, para todo i , $B_i \subset A_i$. Sabemos que existe i tal que $B_i \cap (-B_i) \neq \emptyset$, portanto, para tal i temos que $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$.

(iv) \Rightarrow (v). Seja B_1, \dots, B_{n+1} uma cobertura fechada e, para $\varepsilon > 0$, defina os abertos $A_i^\varepsilon = \{x \in S^n: \text{dist}(x, B_i) < \varepsilon\}$. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ temos uma seqüência x_1, x_2, \dots de pontos que pertencem ao mesmo aberto de seus antípodas. Por compacidade, existe uma subseqüência convergente e tal ponto limite pertence a $B_i \cap (-B_i)$.

(ii) \Rightarrow (iii). Suponha que existe $f: S^d \rightarrow S^n$ com $d > n$. Então existe induzida $f: S^{n+1} \rightarrow S^n$ e da hipótese de f ser antípoda temos uma aplicação $f: S^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que não assume o valor 0, uma contradição.

(iii) \Rightarrow (ii). Suponha que $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação antípoda que não assume zero. Defina a função $g: S^n \rightarrow S^{n-1}$ dada por $g(x) = f(x)/\|f(x)\|$. Claramente g é contínua antípoda, uma contradição.

(i) \Rightarrow (v). Seja B_1, \dots, B_{n+1} uma cobertura fechada do S^n . Definimos $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $f(x) = (\text{dist}(x, B_1), \dots, \text{dist}(x, B_n))$. Então sabemos que existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$, isto é, $\text{dist}(x, B_i) = \text{dist}(-x, B_i)$ para todo $i \in [n]$.

Se a j -ésima coordenada de $f(x)$ é zero, então $x \in B_j \cap (-B_j)$. Se todas as coordenadas são não-nulas, então $x \in B_{n+1} \cap (-B_{n+1})$.

(v) \Rightarrow (iii). Note que o bordo de um n -simplexo inscrito na esfera S^{n-1} nos dá uma projecção, do simplexo na esfera, cuja imagem é uma cobertura da esfera

por $n + 1$ fechados com $B_i \cap (-B_i) = \emptyset$ para todo $i \in [n + 1] = \{1, \dots, n + 1\}$. Se existe $f: S^n \rightarrow S^{n-1}$ antípoda então temos que $f^{-1}(B_i)$ é uma cobertura fechada de S^n sem antípodas num mesmo B_i para todo $i \in [n + 1]$. ■

3.1 O problema do colar. O *Problema do colar* pode ser descrito da seguinte forma: dois ladrões desejam dividir um colar composto de d tipos diferentes de pedras preciosas de modo que cada um tenha a mesma quantia de pedras dos diferentes tipos. Estamos supondo que existe um número par de pedras de cada tipo e que o colar é “aberto”, isto é, ele tem duas extremidades. Queremos saber qual o número de cortes suficientes para repartir o colar entre eles (veja fig. 2).

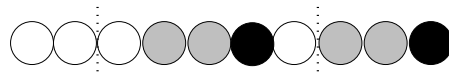


Figura 2: Exemplo de um colar com três tipos de pedras e uma divisão (honestal!) entre os dois ladrões. Um ladrão fica com o segmento do meio e o outro com os dois restantes.

Em 1987, Alon [2] usou o Teorema de Borsuk–Ulam para provar o seguinte.

TEOREMA 6 *Para um colar com d tipos de pedras d cortes são suficientes.*

Antes de demonstrarmos esse teorema note que esse resultado é o melhor possível no sentido que existem configurações onde são necessários d cortes, por exemplo, considere o colar onde primeiro aparecem as pedras do primeiro tipo, depois as do segundo tipo, etc (veja figura 3). Então precisamos (ou melhor, os ladrões precisam) de pelo menos d cortes, um em cada segmento formado pelo mesmo tipo de pedra para dividir o colar.

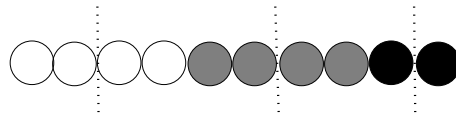


Figura 3: Neste exemplo, o teorema é o melhor possível.

PROVA. Para provarmos que d cortes são suficientes, ponha $n = \sum_{i=1}^d k_i$ o número total de pedras, onde k_i é o número de pedras do i -ésimo tipo. Damos ao problema a seguinte formulação contínua: o colar corresponde ao intervalo $[0, 1]$ da reta e a k -ésima pedra corresponde ao intervalo $[(k - 1)/n, k/n)$ (veja fig. 4).

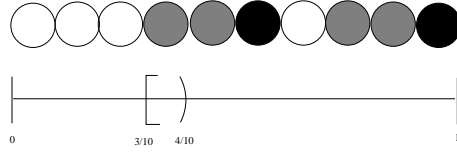


Figura 4: Versão contínua do colar da figura 2.

Definimos a função característica $f_i: [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ para o i -ésimo tipo de pedra por

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \text{ e a } k\text{-ésima pedra é do } i\text{-ésimo tipo,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considere $z_0 = 0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_d \leq 1 = z_{d+1}$ com z_1, \dots, z_d sendo d cortes no colar (de fato, no intervalo $[0, 1]$). Se na divisão do intervalo $[0, 1]$ entre os ladrões temos que o intervalo $[z_{i-1}, z_i]$ fica com o primeiro ladrão então pomos $s_i = +1$, se fica com o segundo pomos $s_i = -1$, para todo $i \in [d+1] = \{1, \dots, d+1\}$. Então, a tal corte associamos um ponto $x = (x_1, \dots, x_{d+1})$ na esfera S^d pondo $x_i^2 = z_i - z_{i-1}$ e $\text{sinal}(x_i) = s_i$, para todo $i \in [d+1]$.

Definimos $g: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ por

$$(3) \quad (x_1, \dots, x_{d+1}) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{d+1} \text{sinal}(x_i) \mu_j[z_{i-1}, z_i] \right)_{j=1}^d,$$

onde $z_i = \sum_{k=1}^i x_k^2$ e μ_j é uma medida sobre $[0, 1]$ dada por $\mu_j(A) = \int_A f_j dx$. Podemos ver a medida μ_j em (3) como o volume ocupado no intervalo $[z_{i-1}, z_i]$ pelas pedras do j -ésimo tipo. Então, para $j \in [d]$, de $\sum \text{sinal}(x_i) \mu_j = 0$ deduzimos que ambos ladrões receberam o mesmo volume de pedra do tipo j .

Não é difícil verificarmos que g é uma aplicação antípoda, portanto, pelo Teorema 5 (ii) sabemos que existe $x \in S^d$ tal que $g(x) = 0$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{d+1} \text{sinal}(x_i) \mu_j[z_{i-1}, z_i] = 0, \text{ para todo } j \in [d],$$

mas isso nos diz que ambos ladrões têm o mesmo volume de cada um dos j tipos de pedras.

Note que esses cortes ainda não resolveram o problema dos ladrões pois podem haver cortes dividindo uma mesma pedra. Para resolvermos este problema vamos nos concentrar em apenas um tipo de pedra.

Do fato de o número de pedras do i -ésimo tipo ser par, metade das pedras (que cabe a cada ladrão) é um número inteiro e, dessa forma, o número de cortes não-inteiros c sobre pedras do i -ésimo tipo é pelo menos dois.

Se $c = 2$ então tais cortes estão em pedras (do i -ésimo tipo) distintas, digamos p_1 e p_2 . Então, $\sum_i \text{vol}^+(p_i) = \sum_i \text{vol}^-(p_i)$, onde $\text{vol}^-(p_i)$ e $\text{vol}^+(p_i)$ é o volume da pedra p_i com cada ladrão, representados por $+$ e $-$. É fácil de vermos que podemos deslocar o corte p_1 de ε de modo que o corte fique inteiro e que um deslocamento de ε do corte p_2 também nos dá um corte inteiro e, ou $\text{vol}^+(p_1) = \text{vol}^-(p_2) = 0$ ou $\text{vol}^-(p_1) = \text{vol}^+(p_2) = 0$.

Se $c \geq 3$ fixe p_1 e p_2 pedras do i -ésimo tipo com divisões não-inteiras e tome c_1 e c_2 dois cortes não-inteiros em p_1 e p_2 . Deslocamos c_1 de ε de modo que se torne um corte inteiro e deslocamos c_2 de ε de modo que $\sum_i \text{vol}^+(p_i) = \sum_i \text{vol}^-(p_i)$ (veja um exemplo na fig. 5), e procedemos por indução. Formalizamos essa prova na Seção 8.

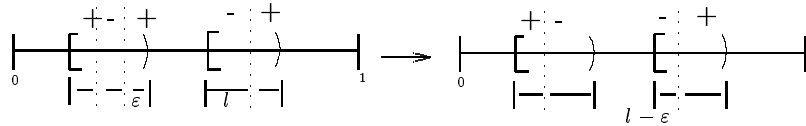


Figura 5: “Arredondamento” dos cortes.

Agora, é fácil ver que podemos “arredondar” os cortes de modo a termos uma divisão inteira entre os ladrões. Assim, prova-se por indução que existe divisão inteira. ■

Observamos que o resultado que de fato foi demonstrado por Alon em [2] é mais geral e diz que se temos um colar com d tipos diferentes de pedras e cada tipo participa do colar com um múltiplo de k então $(k-1)d$ cortes são suficientes para dividir o colar entre k ladrões. Entretanto, a demonstração de tal fato exige uma generalização do teorema de Borsuk–Ulam. Essa demonstração topológica do problema é a única conhecida, até agora, para o problema.

4 Generalizações do Teorema de Borsuk–Ulam

Antes de termos as generalizações do teorema, precisamos de conceitos mais gerais do que aqueles envolvidos no Teorema de Borsuk–Ulam. Na próxima seção damos as generalizações desses conceitos.

4.1 \mathbb{Z}_p -espaços, \mathbb{Z}_p -funções, homotopia e conexidade. Duas funções $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ são *homotópicas* se existe uma deformação contínua de f_0 em f_1 , isto é, existe uma função contínua, chamada *homotopia*,

$$F: X \times I \rightarrow Y,$$

tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$, para todo $x \in X$; e escrevemos $f_0 \sim f_1$. É fácil mostrar que $f \sim g \Rightarrow fh \sim gh$.

Uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ é uma *equivalência homotópica* se ela tem uma *inversa homotópica*, isto é, uma aplicação $g: Y \rightarrow X$, tais que $gf \sim \text{id}_X$ e $fg \sim$

id_Y . Os espaços X e Y são *homotopicamente equivalentes* (ou, *têm o mesmo tipo homotópico*), e escrevemos $X \simeq Y$, se existe uma equivalência homotópica $f: X \rightarrow Y$.

Um espaço X é *contrátil* se a função identidade $\text{id}: X \rightarrow X$ é *homotopicamente trivial*, isto é, a identidade é homotópica a uma função constante $c_0: X \rightarrow X$ com $c_0(x) = x_0$, para todo $x \in X$ e algum $x_0 \in X$ fixo. Por exemplo, todo $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo é homotopicamente trivial, pois se fixamos $x_0 \in C$ temos que $F: C \times I \rightarrow C$ dada por $F(x, t) = tx_0 + (1-t)x$ é a homotopia desejada. Equivalentemente, X é contrátil se é homotopicamente equivalente a um espaço consistindo de um ponto.

Para $k \geq 0$, dizemos que um espaço X é *k-conexo* se para $0 \leq l \leq k$ toda aplicação $f: S^l \rightarrow X$ é homotopicamente trivial. Assim, 0-conexo é equivalente a conexo por caminhos. Um espaço 1-conexo também é chamado *simplesmente conexo*.

TEOREMA 7 *Equivalência homotópica preserva conexidade.*

PROVA. Seja $f: X \rightarrow Y$ uma equivalência homotópica entre os espaços X e Y , e seja g a inversa homotópica de f . Suponha que X é k -conexo.

Para $0 \leq l \leq k$, dada $h: S^l \rightarrow X$ existe $H: S^l \times I \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = h(x)$ e $H(x, 1) = c_0(x)$ onde, $c_0(x) = x_0 \in X$ é uma função constante de S^l para X .

Considere $h': S^l \rightarrow Y$, para $0 \leq l \leq k$; tome a composta $gh': S^l \rightarrow X$. Então, existe $F: S^l \times I \rightarrow X$ tal que $F(x, 0) = gh'(x)$ e $F(x, 1) = c_0(x) = x_0$.

Agora, tome $fF: S^l \times I \rightarrow Y$. Tal aplicação é uma homotopia entre a aplicação composta fgh' e a função constante $c_1: S^l \rightarrow Y$, dada por $c_1(x) = f(x_0) = y_0$. A aplicação composta fgh' é homotópica a aplicação $\text{id}_Y h' = h'$. Portanto, por transitividade da relação de homotopia de funções, h' é homotópica à função constante c_1 , isto é, Y é k -conexo. ■

TEOREMA 8 *A esfera S^n é $(n-1)$ -conexa.* ■

A demonstração desse fato é não-trivial e envolve conceitos não definidos aqui (por exemplo, veja o Teorema de Isomorfismo de Hurewicz – Teo. 5, pág. 398 de [16]), portanto, não demonstraremos esse teorema. Claramente, S^n não é n -conexo.

Um \mathbb{Z}_p -*par* é um par (X, ν) onde X é um espaço topológico e ν uma ação do \mathbb{Z}_p em X , isto é, $\nu: X \rightarrow X$ é um homeomorfismo tal que para todo $x \in X$ temos $\nu^p(x) = x$. Uma função \mathbb{Z}_p -*equivariante* $f: (X, \nu) \rightarrow (Y, \omega)$ é uma aplicação de X para Y tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \nu \downarrow & & \omega \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Um \mathbb{Z}_p -par (X, ν) é um \mathbb{Z}_p -espaço se a \mathbb{Z}_p -ação de ν em X é livre, isto é, para todo $x \in X$ os pontos $x, \nu(x), \dots, \nu^{p-1}(x)$ são 2-a-2 distintos. Uma função \mathbb{Z}_p -equivariante entre \mathbb{Z}_p -espaços é dita \mathbb{Z}_p -função.

Observemos que uma das equivalências do Teorema de Borsuk–Ulam diz que não existe $f: (S^{n+1}, x \mapsto -x) \rightarrow (S^n, x \mapsto -x)$. Uma primeira generalização do Teorema de Borsuk–Ulam é a seguinte.

TEOREMA 9 *Se (X, ν) é um \mathbb{Z}_2 -espaço k -conexo então não existe uma \mathbb{Z}_2 -função $f: (X, \nu) \rightarrow (S^k, x \mapsto -x)$.*

PROVA. Por contradição, assumimos que existe tal f e vamos construir $g: S^{k+1} \rightarrow X$ tal que $fg: S^{k+1} \rightarrow S^k$ é antípoda. Primeiro vamos construir indutivamente uma decomposição equivariante da esfera.

Ponha $M_0^+ = \{x\}$, para algum $x \in S^{k+1}$ arbitrário, e $M_0^- = \{-x\}$. Ponha $L_0 = M_0^+ \cup M_0^- (\approx S^0)$. Tome L_1 uma imersão de S^1 em S^{k+1} de modo que L_0 é o equador de L_1 . Dessa forma, L_i será a imersão de S^i em S^{k+1} de modo que L_{i-1} será seu equador. Então, L_{i-1} divide L_i em dois hemisférios abertos M_i^+ e M_i^- com $M_i^+, M_i^- \approx \text{int}(B^i)$, isto é, homeomorfo ao interior da bola, e $M_i^+ = -M_i^-$.

Os conjuntos M_i^+ e M_i^- , para $0 \leq i \leq k+1$, particionam o S^{k+1} . Em coordenadas, $M_i^+ = \{(x_0, \dots, x_{k+1}) \in S^{k+1} : x_i > 0, x_j = 0 \text{ para todo } j \geq i+1\}$.

Agora, vamos construir uma função $g: S^{k+1} \rightarrow X$ indutivamente. Tome $x_0 \in X$ arbitrário e ponha $g(x) = x_0$, para $x \in M_0^+$ e $g(-x) = \nu(g(x)) = \nu(x_0)$. Assim, g está definida em L_0 . Agora, vamos estender g de L_i para L_{i+1} , para $i \leq k$. Assuma estar definida g contínua sobre L_i tal que $g(-x) = \nu(g(x))$. Sabemos que $L_i \approx S^i$ e que $L_i \cup M_{i+1}^+ \approx B^{i+1}$. De X ser k -conexo temos que $g: L_i \rightarrow X$ pode ser estendida continuamente para $g: L_i \cup M_{i+1}^+ \rightarrow X$. Para $x \in M_{i+1}^-$ defimos $g(x) = \nu(g(-x))$. Assim, obtemos uma função $g: L_{i+1} \rightarrow X$ que é contínua pois, é contínua nos fechados não-disjuntos $L_i \cup M_{i+1}^+$ e $L_i \cup M_{i+1}^-$ cuja união é L_{i+1} .

Falta vermos que g é uma \mathbb{Z}_2 -função. Para isto, note que se $x \in M_{i+1}^+$ então $g(-x) = \nu(g(x))$ por definição, e se $x \in M_{i+1}^-$ então $\nu(g(x)) = \nu^2(g(-x)) = g(-x)$.

Dessa forma, temos g definida sobre $L_{k+1} = S^{k+1}$ e temos $fg: S^{k+1} \rightarrow S^k$ com $fg(-x) = f(\nu(g(x))) = -fg(x)$, uma contradição. ■

Vamos ver uma generalização do Teorema de Borsuk–Ulam (na direção de (iii) do Teorema 5), devida a Dold [10] de 1983. Esse teorema não será demonstrado. A formulação desse teorema envolve o conceito de dimensão de espaços topológicos e, pra nós, tal dimensão se refere a dimensão de um complexo simplicial pois somente aplicaremos este teorema em tal caso ou quando o espaço é uma esfera onde, claramente, sabemos dizer o que é (e qual é) a dimensão.

TEOREMA 10 *Sejam p um inteiro maior ou igual a 2, (X, ν) um \mathbb{Z}_p -espaço k -conexo e (Y, ω) um \mathbb{Z}_p -espaço de dimensão no máximo k . Então não existe \mathbb{Z}_p -função $f: X \rightarrow Y$. ■*

4.2 Produto deletado. Para todo inteiro $p \geq 2$, se X é um espaço topológico o seu *produto deletado p -iterado* é definido por

$$X_{\Delta}^p = X \times \cdots \times X \setminus \{(x, \dots, x) : x \in X\}$$

onde, $X \times \cdots \times X = X^p$. Tal espaço tem uma \mathbb{Z}_p -ação natural dada pela ação do gerador

$$\eta_p: (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto (x_2, \dots, x_p, x_1)$$

que é livre só se p é primo, por exemplo, se $p = 4$ o ponto $(1, 2, 1, 2)$ tem órbita de tamanho 2. Por exemplo, $(\mathbb{R}^d)_{\Delta}^p$ é o espaço de todas as matrizes $d \times p$ cujas colunas não são todas iguais.

Vamos definir uma projeção ortogonal g_1 de $\mathbb{R}^{d \times p}$ sobre o subespaço L de dimensão $d(p-1)$ perpendicular a diagonal $D = \{(x, \dots, x) : x \in \mathbb{R}^d\}$. Em coordenadas, o subespaço L é dado pelo conjunto das $(d \times p)$ -matrizes $\mathbf{X} = (x_{ij})$ tais que

$$\sum_{j=1}^p x_{ij} = 0, \text{ para todo } i \in [d].$$

Isso pode ser visto tomando a base $\{E_i\}_{i=1}^d$ da diagonal D , onde E_i é a $(d \times p)$ -matriz com todas as entradas da i -ésima linha iguais a 1 e todas as outras entradas iguais a zero. Assim, se $\mathbf{X} \in L$ então $\langle \mathbf{X}, E_i \rangle = \sum_j \sum_k x_{kj} (E_i)_{kj} = 0$.

Dessa forma, podemos tomar a projeção dos pontos de $(\mathbb{R}^d)_{\Delta}^p$ em L dada por

$$g_1: (x_{ij}) \mapsto \left(x_{ij} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p x_{ik} \right),$$

portanto, $g_1(x) \in L$.

Tomando a projeção radial dos pontos de $L \setminus \{\mathbf{0}\}$ dada por $g_2: \mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}/\|\mathbf{X}\|$, pomos $g = g_2 g_1: (\mathbb{R}^d)_{\Delta}^p \rightarrow S(d+1, p)$, onde $S(d+1, p)$ denota a esfera de dimensão $d(p-1) - 1$ dada pelo conjunto das $(d \times p)$ -matrizes (x_{ij}) tais que

$$\sum_{j=1}^p x_{ij} = 0, \text{ para todo } i \in [d], \text{ e } \sum_{i,j} x_{ij}^2 = 1.$$

A \mathbb{Z}_p -ação em $S(d+1, p)$ é dada pela ação do gerador $\eta_p(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p) = (\mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p, \mathbf{x}^1)$ onde, $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^d$ denota a i -ésima coluna da $(d \times p)$ -matriz. Claramente, essa ação é livre se p é primo. Dessa forma, provamos

LEMA 11 *Seja $p \geq 2$ um inteiro. Existe uma função \mathbb{Z}_p -equivariante*

$$g: (\mathbb{R}^d)_{\Delta}^p \rightarrow S(d+1, p).$$

Em particular, se p é primo então g é uma \mathbb{Z}_p -função. ■

Lembremos que a primeira das versões do Teorema de Borsuk–Ulam que vimos, diz que para qualquer aplicação f da n -esfera para os reais de dimensão n existe um ponto x da esfera tal que $f(x) = f(-x)$. O teorema abaixo usado, entre outras aplicações, na demonstração da versão generalizada do problema do colar, generaliza o Borsuk–Ulam nesse sentido. Foi provado, em 1981, por Bárány, Shlosman e Szűcs [6].

TEOREMA 12 *Sejam p um primo, (X, ω) um \mathbb{Z}_p -espaço e $f: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação. Se X é $(d(p-1)-1)$ -conexo então existe $x \in X$ tal que $f(x) = f(\omega(x)) = \dots = f(\omega^{p-1}(x))$.*

PROVA. Suponha que não exista tal x satisfazendo a conclusão do teorema. Defina $f_p: X \rightarrow (\mathbb{R}^d)_{\Delta}^p$ dada por $f_p(x) = (f(x), f(\omega(x)), \dots, f(\omega^{p-1}(x)))$. Se g é a aplicação como no Lema 11 então, segue de f_p ser uma \mathbb{Z}_p -função, que $gf_p: X \rightarrow S(d+1, p)$ é uma \mathbb{Z}_p -função de um espaço $(d(p-1)-1)$ -conexo num espaço de dimensão $d(p-1)-1$ que contradiz o Teorema 10. ■

5 Algumas construções de espaços topológicos e complexos simpliciais

5.1 Espaço quociente, buquê e junção de espaços topológicos. Sejam T um espaço topológico e \sim uma relação de equivalência em T . O *espaço quociente* T/\sim é o espaço com a seguinte topologia: $U \subseteq T/\sim$ é aberto se e somente se a união de todas as classes de equivalência de U é aberta em T . De outro modo, a topologia de T/\sim é a menor topologia que faz a projeção $\pi: T \rightarrow T/\sim$ contínua.

Se $\{S_i\}_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos de T defina a relação \sim por: $x \sim y$ se e somente se $x = y$ ou existe $i \in I$ tal que $x, y \in S_i$. Denotamos por $T/S_{i \in I}$ o espaço quociente T/\sim .

Vejamos alguns exemplos.

- (i) Cilindro: $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ e $Q = I^2/\sim = I^2/\{(0, y), (1, y)\}_{y \in [0, 1]}$.
- (ii) Cone: $T_2 = Q$ e $C = T_2/\{(x, 1)\}_{x \in [0, 1]}$.
- (iii) Toro: $T = Q/\{(x, 0), (x, 1)\}_{x \in [0, 1]}$.
- (iv) Garrafa de Klein: $K = Q/\{(x, 0), (1-x, 1)\}_{x \in [0, 1]}$.
- (v) A esfera pode ser obtida por quociente na bola: $B^d/S^{d-1} \approx S^d$.

Sejam (X, x) e (Y, y) espaços topológicos com pontos base x e y em X e Y , respectivamente. O *buquê* de X com Y , denotado por $X \vee Y$, é o espaço quociente $X \uplus Y / \{x, y\}$, onde \uplus denota união disjunta.

Agora, vamos definir a operação *junção* de espaços topológicos. Esta operação é importante pois vamos usá-la por quase todo o resto destas notas. A junção dos espaços topológicos X e Y é dada por

$$X * Y = (X \times Y \times [0, 1]) / \sim,$$

onde, para $z_0, z_1 \in X \times Y \times [0, 1]$ distintos, temos $z_0 \sim z_1$ se z_0 e z_1 pertencem a um único conjunto da família de conjuntos

$$\left\{ \{x\} \times Y \times \{1\} : x \in X \right\} \cup \left\{ X \times \{y\} \times \{0\} : y \in Y \right\}.$$

Note que X e Y podem ser identificados com $X \times Y \times \{1\} / \sim \subset X * Y$ e $X \times Y \times \{0\} / \sim \subset X * Y$, respectivamente. Também, $X \times Y$ pode ser identificado com $X \times Y \times \{1/2\} / \sim \subset X * Y$.

Um elemento de $X * Y$ é uma classe de equivalência sobre o conjunto $\{(x, y, t) : x \in X, y \in Y, t \in [0, 1]\}$ e (x, y, t) é frequentemente escrito como uma *combinação convexa formal* $tx + (1 - t)y$. CUIDADO pois essa soma formal é não-comutativa: $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \equiv (x, y, 1/3)$ enquanto que $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}x \equiv (y, x, 2/3)$. Além disso, para todo $x \in X$ temos que $0x + 1y$ é identificado com $y \in Y \subset X * Y$ e para todo $y \in Y$ temos que $1x + 0y$ é identificado com $x \in X \subset X * Y$. Como exemplo, verifique que $[0, 1] * [0, 1]$ é um tetraedro.

Algumas junções têm nome especial. A junção de um espaço topológico X com um ponto é chamado *cone* de X . A junção de X com a esfera S^0 é a suspensão de X , denotada $\text{susp}(X)$. Note que $\text{susp}(S^d) \approx S^{d+1}$ e $S^n * S^m \approx S^{n+m+1}$.

Sejam X, Y, U e V espaços topológicos, $f: U \rightarrow X$ e $g: V \rightarrow Y$ funções. Definimos $f * g: U * V \rightarrow X * Y$ por

$$f * g(tu + (1 - t)v) = tf(u) + (1 - t)g(v).$$

Os seguintes resultados são facilmente provados.

PROPOSIÇÃO 13 *Para todo inteiro $p \geq 2$, se (U, ω) e (V, ν) são \mathbb{Z}_p -pares então $(U * V, \omega * \nu)$ é um \mathbb{Z}_p -par.* ■

PROPOSIÇÃO 14 *Para todo inteiro $p \geq 2$, se $f: (U, \omega_U) \rightarrow (X, \nu_X)$ e $g: (V, \omega_V) \rightarrow (Y, \nu_Y)$ são funções \mathbb{Z}_p -equivariantes então $f * g: (U * V, \omega_U * \omega_V) \rightarrow (X * Y, \nu_X * \nu_Y)$ é uma função \mathbb{Z}_p -equivariante.* ■

5.2 Complexos simpliciais abstratos e complexo das cadeias de uma ordem parcial. Note que um complexo simplicial fica definido (a menos de homeomorfismo) pelo seguinte sistema de conjuntos chamado *complexo simplicial abstrato*, que denotamos por (V, K) , onde V é um conjunto cujos elementos

são chamados vértices, e que aqui será sempre finito, e K é uma família de subconjuntos não-vazios de V que satisfaz:

- (i) $v \in V \Rightarrow \{v\} \in K$,
- (ii) $A \subseteq B \in K \Rightarrow A \in K$.

A *dimensão* de um simplexo $A \in K$ é $\dim(A) = |A| - 1$ e a *dimensão do complexo simplicial* K é $\max\{\dim(A) : A \in K\}$. O q -*esqueleto*, para $1 \leq q \leq \dim(K)$, de K é definido por $K^q = (V, K^q) = \{B \in K : \dim(B) \leq q\}$. Com essa definição, denotamos o conjunto de vértices de K por K^0 . Para o q -esqueleto de σ^n usamos a notação σ_q^n .

Uma realização geométrica trivial de um complexo simplicial abstrato (V, K) pode ser feita associando-se a cada $v \in V$ um vetor canônico e_v no $\mathbb{R}^{|V|}$ e para cada $A \in K$ tomamos o fecho convexo $\|\sigma_A\| = \text{conv}(e_v : v \in A)$. Dessa forma, temos o complexo simplicial geométrico $\Delta = \{\sigma_A : A \in K\}$. Assim, cada complexo simplicial geométrico Δ determina um complexo simplicial abstrato e a um complexo simplicial abstrato existe associado um único (a menos de homeomorfismos) complexo simplicial geométrico. O espaço topológico $\|\Delta\|$ é a *realização geométrica* do complexo simplicial abstrato (V, K) .

A seguir vamos definir o conceito de conjunto parcialmente ordenado e veremos a partir daí como se define o conceito subdivisão baricêntrica de um complexo simplicial abstrato.

Um *conjunto parcialmente ordenado* (ou *ordem parcial*) é um par (P, \leq) onde P é um conjunto (P será sempre finito) e \leq uma relação (binária) *de ordem*, isto é, uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva.

A um conjunto parcialmente ordenado P associamos um complexo simplicial abstrato chamado *complexo das cadeias de P* , denotado $cc(P)$. Este é um complexo simplicial cujos vértices são os elementos de P e os simplexos são as cadeias $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k$ em P . É fácil ver que se P e Q são conjuntos parcialmente ordenados e $f : P \rightarrow Q$ é uma função entre os conjuntos que preserva comparabilidade então existe induzida uma função simplicial $cc(f) : cc(P) \rightarrow cc(Q)$.

Um complexo simplicial abstrato Δ tem naturalmente uma estrutura de ordem parcial dada pela relação de inclusão entre as faces não-vazias. Denotamos esta ordem parcial por $\text{poset}(\Delta)$ e não é difícil ver que $\|cc(\text{poset}(\Delta))\| \approx \|\Delta\|$ (note que $\|cc(\text{poset}(\Delta))\| \approx \|\text{Sd}(\Delta)\| \approx \|\Delta\|$).

5.3 Junção de complexos simpliciais. Sejam Δ_1 e Δ_2 complexos simpliciais abstratos. Vamos assumir que os conjuntos de vértices Δ_1^0 e Δ_2^0 são disjuntos. A *junção abstrata* dos complexos simpliciais Δ_1 e Δ_2 é dada por

$$\Delta_1 * \Delta_2 = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{\sigma_1 \cup \sigma_2 : \sigma_1 \in \Delta_1, \sigma_2 \in \Delta_2\}.$$

Note que $\|\Delta_1 * \Delta_2\| \approx \|\Delta_1\| * \|\Delta_2\|$.

Se Δ é um complexo simplicial denotamos por Δ^{*p} a *junção iterada p -vezes* (ou simplesmente *p -junção*) de Δ . O complexo simplicial Δ^{*p} tem conjunto de

vértices $\Delta^0 \times \{1, \dots, p\}$ e as suas faces são dadas pelos conjuntos não-vazios da forma

$$\{(v, 1): v \in \sigma_1\} \cup \{(v, 2): v \in \sigma_2\} \cup \dots \cup \{(v, p): v \in \sigma_p\}$$

tal que $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \Delta \cup \{\emptyset\}$.

Para uma face de Δ^{*p} temos a seguinte notação (que é não-comutativa): $\sigma_1 * \sigma_2 * \dots * \sigma_p$. Também, os pontos de $\|\Delta^{*p}\|$ são escritos formalmente como $t_1x_1 + \dots + t_px_p$ com $t_i \geq 0$, $\sum_i t_i = 1$ e $x_i \in \|\Delta\|$.

Seja Δ um complexo simplicial e $U \subseteq \Delta$ uma família de simplexes de Δ , não necessariamente um subcomplexo. Defina $\text{Sd}(U) = \text{cc}(\text{poset}(U))$. Dessa forma, $\text{Sd}(U)$ é um subcomplexo de $\text{Sd}(\Delta)$.

LEMA 15 *Sejam U_1 e U_2 duas famílias disjuntas de simplexes que particionam um complexo simplicial Δ . Então temos uma imersão simplicial canônica*

$$\varphi: \text{Sd}(\Delta) \hookrightarrow \text{Sd}(U_1) * \text{Sd}(U_2).$$

PROVA. Basta definirmos φ nos vértices de $\text{Sd}(\Delta)$. Um vértice de $\text{Sd}(\Delta)$ é um simplexo $\sigma \in \Delta$. Defina

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} \sigma * \emptyset & \text{se } \sigma \in U_1, \\ \emptyset * \sigma & \text{se } \sigma \in U_2. \end{cases}$$

■

Para fecharmos essa seção, vamos definir o conceito de *junção deletada* introduzido por Sarkaria (veja, por exemplo, [13]) e provar alguns resultados que usaremos adiante. Se Δ é um complexo simplicial e p e j inteiros positivos, então denotamos por $\Delta_{\Delta(j)}^{*p}$ o subcomplexo da junção p -iterada de Δ cujas faces são dadas pelos conjuntos não-vazios da forma

$$\{(v, 1): v \in \sigma_1\} \cup \dots \cup \{(v, p): v \in \sigma_p\},$$

onde $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \Delta \cup \{\emptyset\}$ e os simplexes $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ são j -a- j disjuntos.

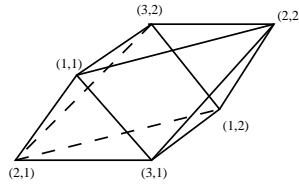


Figura 6: Exemplo: $\|(\sigma^2)_{\Delta(2)}^{*2}\| \approx S^2$.

Um ponto de $\|\Delta_{\Delta(j)}^{*p}\|$ é formalmente escrito como $t_1x_1 + \dots + t_px_p$ com $t \in [0, 1]$, $\sum_i t_i = 1$, $x_i \in \|\Delta\|$ e os suportes $\text{supp}(x_i)$ são j -a- j disjuntos. Além disso, temos a \mathbb{Z}_p -ação, que é livre para p primo, dada pela ação do gerador

$$\nu_p: t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_px_p \mapsto t_2x_2 + \dots + t_px_p + t_1x_1.$$

Agora, vejamos alguns resultados sobre essas construções. Estes resultados indentificam o ponto básico nas aplicações da técnica da junção deletada. No que segue, K é um complexo simplicial, p um primo e, d, j e n inteiros positivos.

TEOREMA 16 *Suponha existir $f: \|K\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que para quaisquer p faces j -a- j disjuntas, digamos $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in K$, temos $\bigcap_i f(\|\sigma_i\|) = \emptyset$. Se $\|K_{\Delta(j)}^{*p}\|$ é k -conexo então $k < (d+1)(p-1) - 1$.*

PROVA. A existência de tal função f faz que esteja bem definida a função

$$f_p: \|K_{\Delta(j)}^{*p}\| \rightarrow (\mathbb{R}^{d+1})_{\Delta}^p$$

dada por

$$t_1x_1 + \dots + t_px_p \mapsto \left(\begin{array}{c} t_j \\ t_j f(x_j) \end{array} \right)_{j=1}^p.$$

Claramente, f_p é uma \mathbb{Z}_p -função, onde as \mathbb{Z}_p -ações são as usuais ν_p e η_p sobre $\|K_{\Delta(j)}^{*p}\|$ e $(\mathbb{R}^{d+1})_{\Delta}^p$, respectivamente. Note que o fator multiplicativo t_j na última linha garante a continuidade da função.

Tomando g a \mathbb{Z}_p -função dada pelo Lema 11, pág. 16, temos que $gf_p: \|K_{\Delta(j)}^{*p}\| \rightarrow S(d+2, p)$ é uma \mathbb{Z}_p -função. Assim, o teorema segue do Teorema 10, pág. 14. ■

Felizmente, em alguns casos sabemos calcular a conexidade de algumas junções deletadas de complexos simpliciais. Vejamos alguns resultados.

PROPOSIÇÃO 17 *Se A e B são complexos simpliciais, p e j inteiros positivos, então*

$$(4) \quad (A * B)_{\Delta(j)}^{*p} = A_{\Delta(j)}^{*p} * B_{\Delta(j)}^{*p}.$$

PROVA. Podemos assumir A^0 e B^0 disjuntos. Então o lado esquerdo de (4) tem conjunto de vértices $(A^0 \cup B^0) \times \{1, \dots, p\}$ enquanto que o lado direito tem conjunto de vértices $A^0 \times \{1, \dots, p\} \cup B^0 \times \{1, \dots, p\}$, portanto, são iguais. Vamos mostrar somente “ \subseteq ” pois a outra inclusão é análogo.

Uma face de complexo do lado esquerdo de (4) é da forma

$$(5) \quad \{(v, 1): v \in \sigma_1\} \cup \dots \cup \{(v, p): v \in \sigma_p\} \neq \emptyset,$$

onde os simplexes $\sigma_i \in A * B \cup \{\emptyset\}$, para todo $i \in [p]$, são j -a- j disjuntos. Mas, σ_i é da forma

$$\tau_A^i \cup \tau_B^i \neq \emptyset$$

com $\tau_A^i \in A \cup \{\emptyset\}$ e $\tau_B^i \in B \cup \{\emptyset\}$. Então cada $\{(v, i): v \in \sigma_i\}$ de (5) pode ser escrito como união disjunta não-vazia

$$\{(v, i): v \in \tau_A^i\} \cup \{(v, i): v \in \tau_B^i\}.$$

Reescrevendo (5) temos

$$\{(v, 1): v \in \tau_A^1\} \cup \dots \cup \{(v, p): v \in \tau_A^p\} \cup \{(v, 1): v \in \tau_B^1\} \cup \dots \cup \{(v, p): v \in \tau_B^p\},$$

que claramente é uma face do complexo simplicial do lado direito de (4). ■

COROLÁRIO 18 *Para inteiros positivos n e p , o complexo simplicial $\|(\sigma^n)_{\Delta(p)}^{*p}\|$ é homeomorfo à esfera $S^{(n+1)(p-1)-1}$. Em particular, para $S(n+2, p) \subseteq (\mathbb{R}^{n+1})_{\Delta}^p$ o homeomorfismo é \mathbb{Z}_p -equivariante com relação as ações usuais ν_p e η_p sobre $\|(\sigma^n)_{\Delta(p)}^{*p}\|$ e $S(n+2, p)$, respectivamente. Ainda, se p é primo o homeomorfismo é uma \mathbb{Z}_p -função.*

PROVA. Da definição de junção, $(\sigma^n)_{\Delta(p)}^{*p} = ((\sigma^0)^{*n+1})_{\Delta(p)}^{*p}$ e usando o lema anterior, $((\sigma^0)_{\Delta(p)}^{*p})^{*n+1} = (\sigma_{p-2}^{p-1})^{*n+1}$, cuja realização geométrica é homeomorfa a $(S^{p-2})^{*n+1} \approx S(n+2, p)$. ■

COROLÁRIO 19 *Para inteiros positivos n , j e p , o complexo simplicial $\|(\sigma^n)_{\Delta(j)}^{*p}\|$ é $((n+1)(j-1)-2)$ -conexo.*

PROVA. Temos $(\sigma^n)_{\Delta(j)}^{*p} = ((\sigma^0)_{\Delta(j)}^{*p})^{*n+1}$ que é isomorfo a $(\sigma_{j-2}^{p-1})^{*n+1}$, que é a junção de um buquê de esferas de dimensão $j-2$. Agora, a prova segue do fato, não trivial, que junção de espaços topológicos com tipo homotópico de buquê de esferas tem tipo homotópico de buquê de esferas (veja [8]). Neste caso temos um buquê de esferas de dimensão $(n+1)(j-1)-1$. ■

Os cálculos de conexidade podem complicar para casos gerais de complexos simpliciais. Algumas vezes, o seguinte truque contorna esse problema.

TEOREMA 20 *Sejam n , j e d inteiros positivos, p um primo, e $K \subset \sigma^n$ um complexo simplicial. Se existe $f: \|K\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua tal que, para todos $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ faces j -a- j disjuntas de K temos que $\bigcap_i f(\|\sigma_i\|) = \emptyset$ e, se existe $\chi: \sigma^n \rightarrow \sigma^m \cup \{\emptyset\}$, para algum inteiro m , tal que*

- (i) *para todo $\sigma \in K$ temos $\chi(\sigma) = \emptyset$;*
- (ii) *$\tau \subseteq \sigma \Rightarrow \chi(\tau) \subseteq \chi(\sigma)$, e*
- (iii) *para todos $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \sigma^n \setminus K$, faces j -a- j disjuntas, temos que $\bigcap_i \chi(\sigma_i) = \emptyset$,*

então m é tal que $(d+m+2)(p-1)-1 > (n+1)(j-1)-2$.

PROVA. Seja $\Delta = \sigma^n$ e ponha $U = \Delta_{\Delta(j)}^{*p} \setminus K_{\Delta(j)}^{*p}$. As condições (i), (ii) e (iii) do teorema garantem a existência da função simplicial

$$\chi_p: U \rightarrow (\sigma^m)_{\Delta(p)}^{*p}$$

dada por

$$\sigma_1 * \cdots * \chi(\sigma_1) * \cdots * \chi(\sigma_p).$$

Estendemos χ_p por linearidade para a \mathbb{Z}_p -função

$$\|\chi_p\|: \|\text{Sd}(U)\| \rightarrow \|\text{Sd}((\sigma^m)_{\Delta(p)}^{*p})\|.$$

Também, estendemos por linearidade a função do Lema 15, pág. 19, para

$$\iota: \|\text{Sd}(\Delta_{\Delta(j)}^{*p})\| \leftrightarrow \|\text{Sd}(K_{\Delta(j)}^{*p})\| * \|\text{Sd}(U)\|,$$

que é uma \mathbb{Z}_p -função, pois pela Proposição 13 o contra-domínio é um \mathbb{Z}_p -espaço.

Pela Proposição 14 temos que $f_p * \|\chi_p\|$ é uma \mathbb{Z}_p -função, onde f_p é como no Teorema 16, assim temos

$$F: \|\Delta_{\Delta(j)}^{*p}\| \xrightarrow{\iota} \|K_{\Delta(j)}^{*p}\| * \|\text{Sd}(U)\| \xrightarrow{f_p * \|\chi_p\|} (\mathbb{R}^{d+1})_{\Delta}^p * \|(\sigma^m)_{\Delta(p)}^{*p}\|.$$

Pelo Lema 11, pela Proposição 14 e pelo Corolário 18, temos a \mathbb{Z}_p -função

$$G: (\mathbb{R}^{d+1})_{\Delta}^p * \|(\sigma^m)_{\Delta(p)}^{*p}\| \rightarrow S(d+2, p) * S^{(m+1)(p-1)-1}.$$

Finalmente, temos a \mathbb{Z}_p -função

$$GF: \|\Delta_{\Delta(j)}^{*p}\| \longrightarrow S^{(d+m+2)(p-1)-1},$$

e o resultado segue pois, pelo Corolário 19 sabemos que $\|\Delta_{\Delta(j)}^{*p}\|$ é $((n+1)(j-1)-2)$ -conexo, e pelo Teorema 10, pág. 14, devemos ter $(d+m+2)(p-1)-1 > (n+1)(j-1)-2$. ■

6 Os Teoremas de Radon e de Tverberg

Considere $d+1$ pontos no \mathbb{R}^d , para $d \geq 1$ inteiro, em posição geral ou, mais simplesmente, um d -simplexo. Então de qualquer maneira que biparticionamos esse conjunto de pontos, as faces induzidas por cada parte não se encontram. Radon provou que esse não é o caso para $d+2$ pontos.

O seguinte resultado, o Teorema de Radon, é bastante conhecido em teoria de convexidade.

TEOREMA 21 *Todo conjunto de $d+2$ pontos no \mathbb{R}^d pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos de modo que os fechos convexos se encontram.* ■

O seguinte resultado é equivalente ao Teorema de Radon.

TEOREMA 22 *Para toda função linear $f: \|\sigma^{d+1}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ existem σ_1 e σ_2 faces disjuntas de σ^{d+1} tais que $f(\|\sigma_1\|) \cap f(\|\sigma_2\|) \neq \emptyset$.*

PROVA DA EQUIVALÊNCIA. Que o Teorema 21 implica o Teorema 22 é imediato. Para a volta, seja S um conjunto de $d+2$ pontos no \mathbb{R}^d e g uma bijeção entre S e os vértices de σ^{d+1} . Estenda g linearmente sobre $\|\sigma^{d+1}\|$ e considere a inclusão $i: S \hookrightarrow \mathbb{R}^d$. Portanto, existem σ_1 e σ_2 faces de σ^{d+1} tais que $ig(\|\sigma_1\|) \cap ig(\|\sigma_2\|) \neq \emptyset$ e logo $g(\sigma_1), g(\sigma_2) \subseteq S$ são tais que $\text{conv}(g(\sigma_1)) \cap \text{conv}(g(\sigma_2)) \neq \emptyset$. ■

O Teorema de Radon tem a seguinte versão topológica, que obviamente implica a combinatória, e que foi demonstrada por Bajmóczy e Bárány [3] em 1979.

TEOREMA 23 *Para toda aplicação $f: \|\sigma^{d+1}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ existem σ_1 e σ_2 faces disjuntas de σ^{d+1} tais que $f(\|\sigma_1\|) \cap f(\|\sigma_2\|) \neq \emptyset$.*

PROVA. Suponha existir uma aplicação $f: \|\sigma^{d+1}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que faces disjuntas têm imagens disjuntas. Pelo Corolário 18 temos $\|(\sigma^{d+1})_{\Delta(2)}^{*2}\| \approx S^{d+1}$ que é d -conexo e, portanto, pelo Teorema 16 temos que $d < (d+1) - 1$. Esta contradição prova o teorema. ■

6.1 O Teorema de Tverberg. Generalizando o caso da seção anterior, sejam $d \geq 1$ e $p \geq 2$ inteiros. Vejamos que existem $(d+1)(p-1)$ pontos no \mathbb{R}^d para os quais em qualquer p -partição o fecho convexo das partes não se encontram.

Por exemplo, no caso $d = 1$ ponha $A_1, \dots, A_{p-1} \subseteq \mathbb{R}$ com $A_i = \{a_1^i, a_2^i\}$ tal que $a_2^i - a_1^i = 1$ e $a_2^i < a_1^j$ se $i < j$. Suponha que no \mathbb{R}^{d-1} temos $p-1$ conjuntos disjuntos A_1, \dots, A_{p-1} , de cardinalidade d , que satisfazem a hipótese. Tome, para todo $i \in [p-1]$, pontos $\mathbf{z}_i = (\mathbf{b}_i, 1) \in \mathbb{R}^d$, onde $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{d-1}$ é o baricentro de A_i e ponha $A_i^{\perp} = A_i \cup \{\mathbf{z}_i\}$ (veja figura 7).

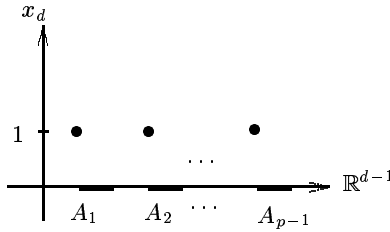


Figura 7: $(d+1)(p-1)$ pontos no \mathbb{R}^d onde em qualquer p -partição não existe um ponto em todos os fechos p convexas.

Então, $\bigcup_i A_i^{\perp}$ é o conjunto de $(d+1)(p-1)$ pontos no \mathbb{R}^d que procuramos. De fato, existem $p-1$ pontos com d -ésima coordenada igual a 1, e p partes em uma partição, portanto, uma das partes está inteiramente contida em \mathbb{R}^{d-1} , portanto, $\bigcap_i \text{conv}(A_i^{\perp}) \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$. Se a p -partição no \mathbb{R}^d induz uma p -partição no \mathbb{R}^{d-1} , segue por indução que $\bigcap_i \text{conv}(A_i^{\perp}) = \emptyset$. Caso contrário, alguma parte não encontra o \mathbb{R}^{d-1} e neste caso é imediato que $\bigcap_i \text{conv}(A_i^{\perp}) = \emptyset$.

Em 1966, Tverberg [17] provou a seguinte generalização do Teorema de Radon, agora conhecido como Teorema de Tverberg.

TEOREMA 24 *Para quaisquer $d \geq 1$ e $p \geq 2$ inteiros, todo conjunto de $(d + 1)(p - 1) + 1$ pontos no \mathbb{R}^d pode ser particionado em p subconjuntos cujos fechos convexos se encontram.*

A demonstração original devida a Tverberg é complicada. Recentemente, uma prova simples usando álgebra linear e um resultado de Bárány foi dada por Sarkaria [15]. Quando p é primo, a demonstração segue da seguinte versão topológica do Teorema de Tverberg, provado originalmente por Bárány, Shlosman e Szücs [6] em 1981.

TEOREMA 25 *Sejam p um primo, $d \geq 1$ e $p \geq 2$ inteiros e ponha $N = (d + 1)(p - 1)$. Então, para toda $f: \|\sigma^N\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua existem $\sigma_1, \dots, \sigma_p$, faces 2-a-2 disjuntas de σ^N , tal que $\bigcap_i f(\|\sigma_i\|) \neq \emptyset$.*

PROVA. Por contradição, suponha que existe uma $f: \|\sigma^N\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que para qualquer conjunto de p faces 2-a-2 disjuntas de σ^N temos que a intersecção das imagens dessas faces é vazio.

Pelo Corolário 19 sabemos que $(\sigma^N)_{\Delta(2)}^{*p}$ é $(N - 1)$ -conexo e pelo Teorema 16 $N - 1 < (d + 1)(p - 1) - 1$, uma contradição que prova o teorema. ■

Bárány [7] conjecturou que o Teorema 25 vale para todo inteiro $p \geq 2$, e Sarkaria (veja [9]) provou que vale para p potência de primo.

6.2 O Teorema de Tverberg Colorido. Pelo Teorema de Tverberg temos que se há um número suficientemente grande de pontos em posição geral no \mathbb{R}^d , podemos selecionar p subconjuntos de cardinalidade $d + 1$ tal que o fecho convexo desses conjuntos se encontram.

Uma versão colorida desse resultado foi conjecturada por Bárány, Füredi e Lovász. Em 1992, Živaljević e Vrećica [19] resolveram esse problema e o seguinte resultado é o Teorema de Tverberg Colorido.

TEOREMA 26 *Dados inteiros $p, d > 1$ existe um inteiro $T = T(d, p)$ tal que o seguinte vale. Dados $A_1, \dots, A_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^d$ disjuntos e $|A_i| = T$ ($i \in [d + 1]$) existem S_1, \dots, S_p dois-a-dois disjuntos tais que todos têm cardinalidade $d + 1$, $|S_i \cap A_j| = 1$, para todos $i \in [p]$ e $j \in [d + 1]$, e $\bigcap_{i \in [p]} \text{conv}(S_i) \neq \emptyset$.*

Diferente do caso do Teorema de Tverberg, no caso colorido não se conhece uma demonstração por métodos elementares. O caso $T(2, p) = 2p - 1$, para todo inteiro positivo p , foi provado por Bárány et al. [4].

Ponha $t_{d,p} = \min \{T(d, p) : d, p > 1 \text{ e o Teorema 26 vale}\}$. Bárány e Larman [5] conjecturam que $t_{d,p} = p$.

O teorema abaixo, é a versão topológica do Teorema de Tverberg Colorido, ele implica o Teorema 26 e, mais que isso, para inteiros $p, m > 1$ vale que

$t_{d,m} \leq 4p(m) - 1$, onde $p(m)$ é o menor primo maior ou igual a m , visto que para todo m existe um primo q , $m \leq q \leq 2m$. Esse resultado, juntamente com os de [4], implica que o número de maneiras de biparticionarmos um conjunto de n pontos no \mathbb{R}^d em partes de cardinalidade $n/2$ é $O(n^{d-\varepsilon_d})$, onde $\varepsilon_d = (4d)^{-(d+1)}$. Esse é o primeiro limitante obtido para esse problema que é $o(n^d)$, para $d > 3$.

O teorema abaixo foi provado por Živaljević e Vrećica usando seqüências espectrais e nossa demonstração, seguindo Matoušek [12] de 1996, usa a técnica das junções deletadas de Sarkaria.

TEOREMA 27 *Sejam um inteiro $d > 1$ e p um primo. Dados conjuntos disjuntos A_1, \dots, A_{d+1} de cardinalidade $2p-1$ tome o complexo simplicial K cujo conjunto de vértices é $\bigcup_i A_i$ e σ é uma face de K se $|\sigma \cap A_i| \leq 1$, para todo $i \in [d+1]$. Então para toda aplicação $f: \|K\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ existem $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in K$ dois-a-dois vértice-disjuntos tais que $\bigcap_i f(\|\sigma_i\|) \neq \emptyset$.*

PROVA. Ponha $N = (d+1)(2p-1) - 1$ e tome $\chi: \sigma^N \rightarrow \sigma^d \cup \{\emptyset\}$ a coloração

$$\chi(\sigma) = \{i \in [d+1]: |\sigma \cap A_i| \geq 2\}.$$

Então $\tau \subseteq \sigma \Rightarrow \chi(\tau) \subseteq \chi(\sigma)$ e $\chi(\sigma) = \emptyset \Leftrightarrow \sigma \in K$ e, para $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ faces 2-a-2 disjuntas, temos $\bigcap_{i \in [p]} \chi(\sigma_i) \neq \emptyset$ pois caso contrário, se $j \in [d+1]$ está na intersecção temos, para todo $i \in [p]$, que $|\sigma_j \cap A_i| \geq 2$ e então $|A_i| \geq 2p$ pois os σ_i 's são 2-a-2 disjuntos.

Suponha que existe $f: \|K\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que para quaisquer $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in K$ dois-a-dois disjuntos temos $\bigcap_i f(\|\sigma_i\|) = \emptyset$. Então, pelo Teorema 20 $(d+d+2)(p-1) - 1 > (N+1) - 2$ que implica que $(d+1)(-1) > -1$, uma contradição que prova o teorema. ■

7 O Teorema de Van Kampen–Flores generalizado

Foi mostrado, por Van Kampen em 1933 e por Flores em 1932, que não existe imersão do $(n-1)$ -esqueleto σ_{n-1}^{2n} no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2(n-1)}$. Por outro lado, pela Proposição 1 sabemos que σ_{n-1}^{2n} pode ser imerso no \mathbb{R}^{2n-1} . Van Kampen e Flores provaram

TEOREMA 28 *Para toda aplicação $f: \|\sigma_{n-1}^{2n}\| \rightarrow \mathbb{R}^{2(n-1)}$ existe um par de faces disjuntas cujas imagens se encontram.*

Note que para $n = 2$ temos, como conseqüência do teorema, que o grafo completo de cinco vértices não é planar. Vamos ver um esboço da prova do Teorema de Van Kampen–Flores usando a técnica das junções deletadas. Seja Δ o simplexo de dimensão $2n$ e K a seu $(n-1)$ -esqueleto. Ponha $U = \Delta_{\Delta(2)}^{*2} \setminus K_{\Delta(2)}^{*2}$.

Suponha existir alguma f como no enunciado mas que leva faces disjuntas de K em subconjuntos disjuntos do $\mathbb{R}^{2(n-1)}$. Tal f induz a \mathbb{Z}_2 -função contínua

$$f_2: \|K_{\Delta(2)}^{*2}\| \rightarrow (\mathbb{R}^{2(n-1)})_{\Delta}^2.$$

Defina $g: \text{Sd}(U) \rightarrow S^0 = \{-1, 1\}$ pondo

$$g(\sigma_1 * \sigma_2) = \begin{cases} -1 & \text{se } \sigma_1 \in K, \\ 1 & \text{se } \sigma_2 \in K. \end{cases}$$

Note que pelo menos um de σ_1 e σ_2 deve estar em K pois todo simplexo em $\Delta \setminus K$ tem dimensão pelo menos n . Então temos

$$\begin{array}{ccc} S^{2n} \approx \|\Delta_{\Delta(2)}^{*2}\| & \longrightarrow & \|K_{\Delta(2)}^{*2}\| * \|\text{Sd}(U)\| \\ F \uparrow & & \downarrow \\ S^{2(n-1)} & \longleftarrow & (\mathbb{R}^{2n-1})_{\Delta}^2 * S^0 \end{array}$$

e F contradiz o Teorema de Borsuk–Ulam.

Em 1991, Sarkaria [14] provou a seguinte teorema que generaliza o Teorema de Van Kampen–Flores. Note que esse teorema implica a versão contínua do Teorema de Tverberg quando $n = s - 1 = (d + 1)(p - 1)$, para p primo e $j = 2$.

TEOREMA 29 *Sejam n, s, j, p e d inteiros tais que $1 \leq s \leq n + 1$, $2 \leq j \leq p$, $d \geq 0$ e p primo. Suponha que*

- (a) $n = s - 1$ e $(n + 1)(j - 1) > (d + 1)(p - 1)$, ou
- (b) $n > s - 1$ e $(m + 1)(p - 1) + ps \geq (n + 1)(j - 1) > (d + m + 2)(p - 1)$ para algum inteiro positivo m .

Então para toda aplicação $f: \|\sigma_{s-1}^n\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \sigma_{s-1}^n$ j -a- j disjuntos tais que $\bigcap_i f(\|\sigma_i\|) \neq \emptyset$.

PROVA. Se existe $f: \|\sigma_{s-1}^n\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que não vale o enunciado, então temos a \mathbb{Z}_p -função

$$\|(\sigma_{s-1}^n)_{\Delta(j)}^{*p}\| \rightarrow S(d + 2, s).$$

No caso (a) temos uma contradição do Teorema 10, pois a conexidade do domínio é maior ou igual a dimensão do contra-domínio.

No caso (b), sejam $[n + 1]$ e $[m + 1]$ os conjuntos dos vértices de σ^n e σ^m , respectivamente. Tome a seguinte $m + 1$ coloração das s -faces τ^s de σ^n

$$\chi_0(\tau^s) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{\min(\tau^s) - 1}{p-1} \right\rfloor & \text{se } \min \tau^s \leq m \frac{p-1}{j-1}, \\ m + 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Donde tiramos que não existem p faces $\tau_1^s, \dots, \tau_p^s$ de σ^n que são j -a- j disjuntas monocramáticas. De fato, as p faces não podem ser todas de cor $m + 1$ pois de $(m + 1)(p - 1) + ps \geq (n + 1)(j - 1)$ temos que o comprimento de

$$(6) \quad (m(p - 1)/(j - 1), n + 1]$$

menor que $p(s + 1)/(j - 1)$ enquanto que $|\bigcup_i \tau_i^s| \geq p(s + 1)/(j - 1)$, portanto, em (6) não existem pontos suficientes para tal coloração. Também, o número total de vértices ocorrendo como mínimo de algum τ_i^s é pelo menos $p/(j - 1)$, já que as faces são j -a- j disjuntas, então se todos os vértices que são mínimos de algum τ_i^s são menores ou iguais a $m(p - 1)/(j - 1)$, temos que a diferença entre a maior e a menor cor que aparece é pelo menos

$$\left\lfloor \left(\frac{p}{j - 1} - 1 \right) \left(\frac{j - 1}{p - 1} \right) \right\rfloor = 1.$$

Estendemos essa coloração para todo $\sigma \in \sigma^n$ pondo

$$\chi(\sigma) = \bigcup_{\tau^s \in \sigma} \chi_0(\tau^s)$$

ou vazio se não existe $\tau^s \in \sigma$. Então, χ satisfaz (i), (ii) e (iii) do Teorema 20 para $K = \sigma_{s-1}^n$, portanto, $(d + m + 2)(p - 1) - 1 > (n + 1)(j - 1) - 2$, ou seja, $(d + m + 2)(p - 1) \geq (n + 1)(j - 1)$ contradizendo nossa hipótese. ■

Do teorema acima temos a seguinte generalização do Teorema de Van Kampen–Flores.

TEOREMA 30 *Para toda aplicação definida no $(s - 1)$ -esqueleto de σ^{ps+p-2} para o \mathbb{R}^d , com $d(p - 1) \leq p(s - 1)$, temos que existem p faces $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ 2-a-2 disjuntas tais que $\bigcap_i f(\|\sigma_i\|) \neq \emptyset$.*

PROVA. Tome $n = ps + p - 2$, $j = 2$, $m = 0$ e p primo no teorema anterior. ■

8 O problema do colar generalizado

Suponha que temos pn pedras de t tipos distintos com pa_i pedras do tipo i ($i \in [t]$). Agora, estamos interessados numa partição do colar em p partes de modo que cada parte captura exatamente a_i pedras do tipo i , para todo $i \in [t]$. Se as pedras de cada tipo aparecem contiguamente no colar, então numa p -partição do colar temos pelo menos $p - 1$ cortes entre as pedras de cada cor, ou seja, $(p - 1)t$ cortes são necessários.

Então o teorema demonstrado por Alon, como comentamos na página 12, pode ser enunciado da seguinte forma.

TEOREMA 31 *Todo colar com pa_i pedras do tipo i , para $i \in [t]$, tem uma p -partição com no máximo $(p - 1)t$ cortes.*

Vamos considerar a versão contínua construída na Seção 3.1, isto é, particionamos o intervalo $[0, 1]$ em pn segmentos iguais e colorimos o j -ésimo segmento com a cor i se a j -ésima pedra é do tipo i .

Dada uma t -coloração¹ do intervalo $[0, 1]$ uma p -partição de tamanho r é uma seqüência $0 = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_r \leq y_{r+1} = 1$ e uma partição da família de $r + 1$ intervalos $F = \{[y_i, y_{i+1}]: 0 \leq i \leq r\}$ em p subfamílias F_1, \dots, F_p dois-a-dois disjuntas cuja união é F e F_j captura $1/p$ da medida total de cada cor, para todo $j \in [p]$.

Suponha que temos uma partição em famílias de intervalos F_1, \dots, F_p , com $(p - 1)t$ cortes não necessariamente nos extremos dos pn segmentos. Seja r o número de cortes ruins. Se $r = 0$, nada a fazer.

Assuma que, para todo $r' < r$, podemos “consertar os cortes ruins” e suponha existirem $r > 0$ cortes ruins. Então para algum $i \in [t]$ temos um número positivo de cortes ruins no interior de segmentos da cor i . Seja $G = (V, E)$ o grafo com arestas múltiplas dado por $V = \{F_1, \dots, F_p\}$ e ponha uma aresta $\{F_j, F_k\}$ para cada corte ruim na cor i entre um intervalo de F_j e um de F_k .

Desde que a medida da cor i capturada em cada F_j é um múltiplo inteiro de $1/pa_i$, se $F_j \in V$ tem grau positivo, então tem grau pelo menos 2. Dessa forma, G contém um circuito. Assim, podemos “deslocar” todos os cortes correspondentes às arestas deste circuito pela mesma quantidade, sem mudar a medida de qualquer cor capturada pelos F_j 's, até que um dos cortes atinja um de seus extremos. Assim feito, diminuimos o número de cortes ruins e segue por indução que podemos consertar os cortes ruins.

Na prova da versão contínua do problema do colar usaremos o seguinte lema. Ponha

$$Z_{N,p} = \{(x_1, \dots, x_p) : x_i \in \sigma^N \text{ e os suportes dos } x_i\text{'s são 2-a-2 disjuntos}\}.$$

LEMA 32 *Sejam $n \geq 1$ um inteiro, $p \neq 2$ primo e $N = (n + 1)(p - 1)$. Então existe uma \mathbb{Z}_p -função $f: \|(\sigma^{N-p+1})_{\Delta(2)}^{*p}\| \rightarrow Z_{N,p}$.*

PROVA (ESBOÇO). A idéia da prova é semelhante ao que foi feito no Terema 9: considere uma decomposição celular equivariante de $\|(\sigma^{N-p+1})_{\Delta(2)}^{*p}\|$. Para cada órbita de vértices, escolha um vértice e defina f arbitrariamente neste vértice. Estenda a função equivariantemente para toda órbita. A construção da f segue indutivamente na dimensão das células pois a dimensão de $\|(\sigma^{N-p+1})_{\Delta(2)}^{*p}\|$ menos 1 é igual a $n(p - 1) - 1$ que é igual a conexidade de $Z_{N,p}$ que é $N - p$ (veja [6]).■

Dados inteiros positivos n e p defina $Y_{n,p}$ a realização geométrica canônica de $(\sigma^n)_{\Delta(2)}^{*p}$ no $(\mathbb{R}^{n+1})^p$ por: sejam v_1, \dots, v_{n+1} os vértices de σ^n . Fixe a realização geométrica de σ^n em \mathbb{R}^{n+1} dada naturalmente pela bijeção $v_j \leftrightarrow e_j$, onde $\{e_j\}_{j \in [n+1]}$ é a base canônica do \mathbb{R}^{n+1} . Agora, para cada vértice (v_j, i) , $i \in [p]$, de $(\sigma^n)_{\Delta(2)}^{*p}$ associe o ponto $(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, e_j^i, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) \in (\mathbb{R}^{n+1})^p$.

¹Estamos assumindo que o conjunto de pontos de cada cor é Lebesgue mensurável.

Um ponto de $Y_{n,p}$ é da forma $(t_1 \mathbf{y}^1, \dots, t_p \mathbf{y}^p)$, com $\mathbf{y}^i \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\langle \mathbf{y}^i, \mathbf{1} \rangle = 1$ e os \mathbf{y}^i 's têm suportes 2-a-2 disjuntos, ainda para todo $i \in [p]$, $t_i \geq 0$ e $\sum_i t_i = 1$.

PROVA DA VERSÃO CONTÍNUA DO PROBLEMA DO COLAR. Seja $c: [0, 1] \rightarrow [t]$ uma t -coloração do intervalo. Ponha $N = (p-1)t$.

Dado $z \in Z_{N,p}$, ponha $(x_0, \dots, x_N) = 1/p(\mathbf{z}^1 + \dots + \mathbf{z}^p)$ e note que do fato de, para todo $l \in [p]$, o suporte dos \mathbf{z}^l 's serem 2-a-2 disjuntos implica que se $x_j > 0$ então existe um único $l \in [p]$ tal que a j -ésima coordenada de \mathbf{z}^l é positiva. Para $x = (x_0, \dots, x_N)$ defina uma partição de $[0, 1]$ em $N+1$ intervalos pondo

$$I_0 = [0, x_0] \quad \text{e} \quad I_j = \left[\sum_{i=0}^{j-1} x_i, \sum_{i=0}^j x_i \right], \quad \text{para todo } j \in [N].$$

Agora, para todo $l \in [p]$, seja F_l a família de todos os intervalos I_j tal que a j -ésima coordenada de \mathbf{z}^l é positiva, isto é, temos $F_l = \{I_{l_1}, \dots, I_{l_k}\}$, onde $l_1, \dots, l_k \in [N+1]$ são as linhas não-nulas de \mathbf{z}^l . Note que a soma dos comprimentos desses I_j 's é $1/p$, pois $\langle \mathbf{z}^l, \mathbf{1} \rangle = 1$.

Para cada $i \in [t-1]$ tome $g_i(z)$ a medida da i -ésima cor em $\bigcup F_1$ e defina a aplicação $g: Z_{N,p} \rightarrow \mathbb{R}^{t-1}$ por

$$g(z) = (g_1(z), \dots, g_{t-1}(z)).$$

Dessa forma, para todo $l \in [p]$ e todo $i \in [t-1]$, temos que $g_i(\eta_p^{l-1}(z))$, onde η_p representa a ação usual do gerador em $Y_{N-p+1,p}$ e em $Z_{N,p}$, é a medida da i -ésima cor em $\bigcup F_l$.

Pelo lema acima, existe uma \mathbb{Z}_p -função $f: Y_{N-p+1,p} \rightarrow Z_{N,p}$. Ponha $h = gf: Y_{N-p+1,p} \rightarrow \mathbb{R}^{t-1}$. Pelo Teorema 12, pág. 16, existe $x \in Y_{N-p+1,p}$ tal que $h(x) = h(\eta_p(x)) = \dots = h(\eta_p^{p-1}(x))$.

Pela equivariância de f temos que $z = f(x)$ satisfaz $g(z) = g(\eta_p(z)) = \dots = g(\eta_p^{p-1}(z))$ que implica que os conjuntos F_1, \dots, F_p correspondentes a tal z capturam $1/p$ da medida de cada uma das primeiras $t-1$ cores.

Desde que a medida total de cada F_j é $1/p$, cada F_j captura precisamente $1/p$ da medida da última cor. Dividindo os intervalos de comprimento 0 arbitrariamente entre os F_j 's, concluímos que existe uma p -partição de tamanho $N = (p-1)t$.

O teorema segue da seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 33 *Se a versão contínua do problema do colar vale para (t, p) e (t, l) então também vale para (t, pl) .*

PROVA. Dada uma t -coloração do intervalo $[0, 1]$, usamos $(p-1)t$ cortes para formar uma p -família de intervalos, cada família capturando $1/p$ da medida de cada cor. Para cada família considere a t -coloração do intervalo formada colando-se os intervalos da família e reescalando o comprimento total para 1. Usando $(l-1)t$ cortes temos uma l -partição desta coloração.

Voltando para a coloração original, isto acrescenta $p(l-1)t$ cortes. Então, no total temos $(p-1)t + p(l-1)t$ cortes que fornecem um pl -partição. ■

9 A conjectura de Kneser

Dados inteiros $r, t \geq 1$ considere a coleção de todos os r -subconjuntos de $X = [n]$, para $n < 2r + t - 1$. Então, podemos particionar $\binom{X}{r}$ em t classes X_1, \dots, X_t tal que todo par de r -subconjuntos pertencentes a uma mesma classe tem intersecção não-vazia.

De fato, se $T \subseteq X$ tem cardinalidade r ponha T em X_i se $i = \min T \leq t - 1$, caso contrário, ponha T em X_t .

Em 1955, Kneser perguntou se o mesmo pode ser feito para $t + 1$ classes. Uma resposta foi dada por Lovász [11] em 1978.

TEOREMA 34 *Se os r -subconjuntos de um n -conjunto, com $n \geq 2r + t - 1$, são particionados em t classes, então alguma classe contém um par de conjuntos disjuntos.* ■

Uma generalização deste teorema foi conjecturada por Erdős em 1973. Sejam p, r e t inteiros positivos e $n \leq (t-1)(p-1) + pr - 1$. Ponha $X = [n]$ e vamos definir uma partição X_1, \dots, X_t de $\binom{X}{r}$ pondo um r -subconjunto T em $X_{\lfloor l \rfloor}$, para $l = (\min T)(1/(p-1))$ se $\min T \leq (t-1)(p-1)$ (podemos supor $p > 2$ pois para $p = 2$ estamos no caso anterior), caso contrário pomos em X_t . Então não existem $T_1, \dots, T_p \in X_t$ dois-a-dois disjuntos, pois se houvessem, $|\bigcup_j T_j| = rp$ enquanto que o número de inteiros m tal que $(t-1)(p-1) < m \leq n$ é menor que rp . Note que para $\lfloor \min T_i / (p-1) \rfloor$ fixo temos que os T_i 's assumem no máximo $p-1$ valores mínimos distintos.

Erdős conjecturou que tal partição não existe para $n > (t-1)(p-1) + pr - 1$. A resposta foi dada por Alon, Frankl e Lovász [1] em 1986.

TEOREMA 35 *Dados inteiros positivos t, r , e p , suponha $n \geq (t-1)(p-1) + pr$. Se a família de r -subconjuntos de um n -subconjunto é particionada em t partes, então umas das partes contém p elementos dois-a-dois disjuntos.* ■

Nesta seção vamos provar uma generalização posterior, de 1990, devida a Sarkaria [13].

TEOREMA 36 *Dados inteiros $t, r, p \geq 1$ e $j \geq 2$, suponha $n(j-1) - 1 \geq t(p-1) + p(r-1)$. Então para qualquer t -partição da família dos r -subconjuntos de um n -conjunto, existe uma parte com p elementos j -a- j disjuntos.*

Note que para $j = 2$ temos $n \geq t(p-1) + p(r-1) + 1 = (t-1)(p-1) + pr$ e estamos no caso anterior. Vejamos que a cota inferior acima é a melhor possível, generalizando a construção anterior.

Considere $n \leq (1/(j-1))(t(p-1) + p(r-1))$, e ponha $X = [n]$. Vamos definir uma t -partição dos r -subconjuntos de X , digamos X_1, \dots, X_t , pondo cada r -subconjunto T com $\min T \leq (t-1)(p-1)/(j-1)$ em $X_{[l]}$, para $l = (\min T)(j-1)/(p-1)$, caso contrário colocamos T em X_t .

Então não existem $T_1, \dots, T_p \in X_t$ j -a- j disjuntos pois neste caso, $|\bigcup_i T_i| \geq rp/(j-1)$ enquanto que o número de inteiros m tais que $(t-1)(p-1)/(j-1) < m \leq n$ é menor que $rp/(j-1)$.

PROVA DO TEOREMA 36. Seja p um primo e ponha $N = n - 1$ e lembremos que σ_{r-1}^N denota o $(r-1)$ -esqueleto do complexo simplicial σ^N . Suponha existir

$$\chi_0: \sigma_{r-1}^N \setminus \sigma_{r-2}^N \rightarrow [t]$$

uma t -coloração das faces de dimensão $(r-1)$ de σ^N tal que não existem $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ em $\sigma_{r-1}^N \setminus \sigma_{r-2}^N$ as quais são j -a- j disjuntos e com $\chi_0(\sigma_1) = \dots = \chi_0(\sigma_p)$.

Ponha

$$\chi(\sigma) = \bigcup_{\sigma \supseteq \tau \in \sigma_{r-1}^N} \chi_0(\tau)$$

para todo $\sigma \in \sigma^N$. Note que χ é como no Teorema 20. Tomando $[t]$ como o conjunto de vértices de σ^{t-1} temos definida

$$\chi_p: U \rightarrow (\sigma^{t-1})_{\Delta(p)}^{*p}$$

tomando

$$\sigma_1 * \dots * \chi(\sigma_1) * \dots * \chi(\sigma_p),$$

onde $U = (\sigma^N)_{\Delta(j)}^{*p} \setminus (\sigma_{r-2}^N)_{\Delta(j)}^{*p}$. Temos a inclusão canônica

$$\text{Sd}((\sigma^N)_{\Delta(j)}^{*p}) \hookrightarrow \text{Sd}((\sigma_{r-2}^N)_{\Delta(j)}^{*p}) * \text{Sd}(U),$$

que composta com $\text{id} * \|\chi_p\|$ nos dá

$$F: \|\text{Sd}((\sigma^N)_{\Delta(j)}^{*p})\| \rightarrow \|\text{Sd}((\sigma_{r-2}^N)_{\Delta(j)}^{*p})\| * \|\text{Sd}((\sigma^{t-1})_{\Delta(p)}^{*p})\|.$$

Então, a aplicação F tem domínio $(N+1)(j-1) - 2$ -conexo e contra-domínio de dimensão no máximo $t(p-1) - 1 + pr$. Esse fato contradiz o Teorema 10, pág. 14.

Agora, o teorema segue da seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 37 *Se o teorema vale para $p = p_1$ e $p = p_2$ então vale para $p = p_1 p_2$.*

PROVA. Seja n tal que

$$n(j-1) - 1 \geq t(p_1 p_2 - 1) + p_1 p_2 (r-1) = t(p_1 - 1) + p_1 \underbrace{(t(p_2 - 1) + p_2(r-1))}_{r'-1},$$

e X um conjunto de cardinalidade n . Então

(*) *para toda t -coloração dos r' -subconjuntos de X existem subconjuntos T'_1, \dots, T'_{p_1} de cardinalidade r' e j -a- j disjuntos monocromáticos.*

Note que $r'(2-1) - 1 = r' - 1 \geq t(p_2 - 1) + p_2(r-1)$, portanto, para toda t -coloração dos r -subconjuntos de $[r']$ existem $T_1, \dots, T_{p_2} \in \binom{[r']}{r}$ 2-a-2 disjuntos monocromáticos. Tome a t -coloração de $\binom{X}{r}$ que atribui a cada r' -subconjunto a cor dos membros de uma p_2 -upla monocromática de r -conjuntos 2-a-2 disjuntos escolhida desse r' -subconjunto. Para tal t -coloração vale (*).

Cada T'_i contém uma p_2 -upla, portanto, temos um $p_1 p_2$ -upla de r -subconjuntos de X j -a- j disjuntos monocromáticos. ■

E com isso provamos o teorema. ■

A seguir, apresentamos como Lovász [11] e Alon, Frankl e Lovász [1] resolveram as respectivas versões da conjectura de Kneser. Ressaltamos somente a conexão topologia-combinatória que, por si, são resultados bastantes interessantes.

9.1 O resultado de Lovász. Defina o grafo de Kneser $G_{t,r}$ pondo como conjunto de vértices os r -subconjuntos de $[2r+t-1]$ e ponha dois vértices adjacentes se e somente se eles são disjuntos. O Teorema 34 diz que $\chi(G_{t,r}) > t$.

Dado um grafo $G = (V, E)$, defina o complexo simplicial $\mathcal{N}(G)$ pondo $\sigma \subseteq V(G)$ um simplexo de $\mathcal{N}(G)$ se e somente se existe $v \in V(G) \setminus \sigma$ tal que $\{v, w\} \in E(G)$ para todo $w \in \sigma$. A demonstração dada por Lovász para a conjectura de Kneser segue dois passos independentes:

- (i) $\|\mathcal{N}(G_{t,r})\|$ é $(t-2)$ -conexo;
- (ii) Para todo grafo finito G , se $\|\mathcal{N}(G)\|$ é $(t-2)$ -conexo então G não é t -colorável.

Vamos nos concentrar na parte (ii). Defina $\omega: \mathcal{N}(G) \rightarrow \mathcal{N}(G)$ por

$$\omega(\sigma) = \{v \in V(G) : \{v, w\} \in E(G) \text{ para todo } w \in \sigma\}.$$

Então ω tem as propriedades que $\tau \subseteq \sigma$ implica que $\omega(\tau) \supseteq \omega(\sigma)$ e $\omega^2(\sigma) \supseteq \sigma$.

Ponha $\mathcal{C}(G)$ o subcomplexo de $\text{Sd}(\mathcal{N}(G))$ dado pela ordem parcial formada pelos pontos fixos de ω^2 . Dessa forma, $(\|\mathcal{C}(G)\|, \|\omega\|)$ é um \mathbb{Z}_2 -espaço.

Agora, todo homomorfismo de grafos $g: G_1 \rightarrow G_2$ induz uma \mathbb{Z}_2 -função $g_2: \|\mathcal{C}(G_1)\| \rightarrow \|\mathcal{C}(G_2)\|$.

Assim, a prova do passo (ii) segue facilmente. Se G é t -colorável existe um homomorfismo $g: G \rightarrow K_t$, portanto, existe uma \mathbb{Z}_2 -função $g_2: \|\mathcal{C}(G)\| \rightarrow$

$\|\mathcal{C}(K_t)\|$. Entretanto, $\mathcal{C}(K_t) = \mathcal{N}(K_t)$ pode ser descrito combinatorialmente como a subdivisão baricêntrica da fronteira do $(t-1)$ -simplexo que é homeomorfo à esfera S^{t-2} , portanto, pelo Teorema 9, pág. 14, o espaço topológico $\|\mathcal{C}(G)\|$ não pode ser $(t-2)$ -conexo.

9.2 O resultado de Alon, Frankl e Lovász. O hipergrafo de Kneser $G_{n,p,r}$ é o hipergrafo p -uniforme dado pelo conjunto de vértices $\binom{[n]}{r}$ e, uma coleção de p vértices forma uma aresta se são dois-a-dois disjuntos. Então o Teorema 35 é equivalente a $G_{n,p,r}$ não ser t -colorável para todo $n \geq (t-1)(p-1) + pr$.

Seja $H = (V, E)$ um hipergrafo p -uniforme. Definimos o complexo simplicial $\mathcal{C}(H)$ tomando como conjunto de vértices todas as $|E|p!$ p -uplas (v_1, \dots, v_p) de vértices de H tal que $\{v_1, \dots, v_p\} \in E$. Um conjunto de vértices $\{(v_1^i, \dots, v_p^i) : i \in I\}$ é um simplexo de $\mathcal{C}(H)$ se existem V_1, \dots, V_p dois-a-dois disjuntos tais que $v_j^i \in V_j$, para todos $i \in I$ e $j \in [p]$, e sobre os conjuntos de vértices V_1, \dots, V_p existe um subgrafo p -partido completo.

Agora, a prova do Teorema 35 segue facilmente dos seguintes três passos, para $p > 2$ primo:

- (i) para todo hipergrafo p -uniforme H , se $\|\mathcal{C}(H)\|$ é $((t-1)(p-1) - 1)$ -conexo então H não é t -colorável;
- (ii) $\|\mathcal{C}(G_{n,p,r})\|$ é $(n - pr - 1)$ -conexo, portanto, para todo $n \geq (t-1)(p-1) + pr$ esse complexo simplicial é $((t-1)(p-1) - 1)$ -conexo; e
- (iii) se o Teorema 35 vale para (r, t, p_1) e para $((t-1)(p-1) + pr, t, p_2)$ então também vale para $(r, t, p_1 p_2)$. Mais o resultado de Lovász para $p = 2$, provam o teorema para todo $p \geq 2$.

Como antes, vamos nos concentrar na parte (i). Alon, Frankl e Lovász conjecturaram que esse resultado vale para todo inteiro positivo p . A prova de (i) segue em mais três passos:

- (a) se $\|\mathcal{C}(H)\|$ é $(m(p-1) - 1)$ -conexo então existe uma \mathbb{Z}_p -função $f: \|(\sigma^{m(p-1)})_{\Delta(2)}^{*p}\| \rightarrow \|\mathcal{C}(H)\|$;
- (b) se H é t -colorável então existe uma \mathbb{Z}_p -função $g: \|\mathcal{C}(H)\| \rightarrow S(t+1, p)$; e
- (c) existe uma aplicação $h: S(t+1, p) \rightarrow \mathbb{R}^{t-1}$ tal que para nenhum $y \in S(t+1, p)$ vale $h(y) = h(\eta_p(y)) = \dots = h(\eta_p^{p-1}(y))$.

Para concluirmos (i), suponha que H seja t -colorável. Por (a), (b) e (c) temos $F = hgf: \|(\sigma^{m(p-1)})_{\Delta(2)}^{*p}\| \rightarrow \mathbb{R}^{t-1}$ contínua. Usando o Teorema 12 tome $x \in \|(\sigma^{m(p-1)})_{\Delta(2)}^{*p}\|$ tal que $F(x) = F(\nu_p(x)) = \dots = F(\nu_p^{p-1}(x))$. Tome $y = gf(x)$. Pela equivariância de gf temos $h(y) = h(\eta(y)) = \dots = h(\eta_p^{p-1}(y))$ contradizendo (c).

Para provar (a), fazemos como no Lema 32 na Seção 8. Tomamos uma decomposição equivariante de $\|(\sigma^{m(p-1)})_{\Delta(2)}^{*p}\|$ e definimos f indutivamente na dimensão das células. Para (c), tome $y = (y_{ij}) \in S(t+1, p)$ e defina $h(y) = y_{i1}$.

Portanto, se $h(y) = h(\eta(y)) = \dots = h(\eta_p^{p-1}(y))$ então $y_{i1} = y_{i2} = \dots = y_{ip}$, para todo $i \in [t]$, contradizendo a definição de $S(t+1, p)$ que evita a diagonal.

Para (b), defina $R_i(u)$ como a $t \times p$ -matriz cuja i -ésima linha é o vetor u e todas as outras entradas são nulas. Ponha $\zeta(z_1, \dots, z_p) = (z_p, z_1, \dots, z_{p-1})$ e $\mathbf{z} = (1, -1, 0, \dots, 0)$. Note que $\sum_i \zeta^i(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$.

Dada uma coloração própria c dos vértices de H , defina para todo vértice $(v_1, \dots, v_p) \in \mathcal{C}(H)$

$$g'(v_1, \dots, v_p) = \sum_{i=1}^p R_{c(v_i)}(\zeta^i \mathbf{z}).$$

Como a coloração é própria, essa matriz é não-nula. Tendo definida a função nos vértices, estenda g' linearmente para $\|\mathcal{C}(H)\|$. Observe que g' é equivariante nos vértices, portanto, também é equivariante em todo $x \in \|\mathcal{C}(H)\|$.

Para $x \in \|\mathcal{C}(H)\|$ é fácil ver que $g'(x)$ é uma $(t \times p)$ -matriz cujas linhas e colunas somam zero. Agora, vejamos que $g'(x) \neq \mathbf{0}$.

Para $x \in \|\mathcal{C}(H)\|$, por definição $x = \sum_i \lambda_i (v_1^i, \dots, v_p^i)$ com $\lambda_i > 0$ e $\sum_i \lambda_i = 1$. Por definição, existem subconjuntos de vértices V_1, \dots, V_p dois-a-dois disjuntos tais que $v_j^i \in V_j$ e todas as $\prod |V_j|$ arestas (v_1, \dots, v_p) , $v_j \in V_j$, do subgrafo p -bipartido completo são arestas de H . Como a coloração é própria cada cor está ausente de pelo menos um dos V_j 's. Temos que

$$g'(x) = \sum_i \lambda_i \sum_j R_{c(v_j^i)}(\zeta^j \mathbf{z}).$$

Claramente, a $c(v_j^i)$ -ésima linha dessa matriz é não-nula, pois é combinação dos vetores $\zeta^j \mathbf{z}$ com coeficientes positivos, para todo j , tal que $c(v_j^i)$ aparece como cor de algum vértice em V_j . Como não aparecem todos $\zeta^j \mathbf{z}$'s, essa combinação não pode ser nula. Agora, ponha $g(x) = g'(x)/\|g'(x)\|$.

Referências

- [1] N. Alon, P. Frankl, and L. Lovász, *The chromatic number of Kneser hypergraphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **298** (1986), no. 1, 359–370.
- [2] Noga Alon, *Splitting necklaces*, Adv. in Math. **63** (1987), no. 3, 247–253.
- [3] E. G. Bajmóczy and I. Bárány, *On a common generalization of Borsuk’s and Radon’s theorem*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **34** (1979), no. 3-4, 347–350.
- [4] I. Bárány, Z. Füredi, and L. Lovász, *On the number of halving planes*, Combinatorica **10** (1990), no. 2, 175–183.
- [5] I. Bárány and D.G. Larman, *A colored version of Tverberg’s theorem*, J. London Math. Soc. **45** (1992), no. 2, 314–320.
- [6] I. Bárány, S. B. Shlosman, and A. Szűcs, *On a topological generalization of a theorem of Tverberg*, J. London Math. Soc. (2) **23** (1981), no. 1, 158–164.
- [7] Imre Bárány, *Geometric and combinatorial applications of Borsuk’s theorem*, New trends in discrete and computational geometry, Algorithms Combin., vol. 10, Springer, Berlin, 1993, pp. 235–249.
- [8] Anders Björner and Volkmar Welker, *The homology of “k-equal” manifolds and related partition lattices*, Adv. Math. **110** (1995), no. 2, 277–313.
- [9] M. de Longueville, *The topological Tverberg theorem for prime powers*, Manuscript, 1998.
- [10] Albrecht Dold, *Simple proofs of some Borsuk–Ulam results*, Proceedings of the Northwestern Homotopy Theory Conference (Evanston, Ill., 1982) (Providence, R.I.), Contemp. Math., vol. 19, Amer. Math. Soc., 1983, pp. 65–69.
- [11] L. Lovász, *Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy*, J. Combin. Theory Ser. A **25** (1978), no. 3, 319–324.
- [12] Jiří Matoušek, *Note on the colored Tverberg theorem*, J. Combin. Theory Ser. B **66** (1996), no. 1, 146–151.
- [13] K. S. Sarkaria, *A generalized Kneser conjecture*, J. Combin. Theory Ser. B **49** (1990), no. 2, 236–240.
- [14] ———, *A generalized van Kampen–Flores theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), no. 2, 559–565.
- [15] ———, *Tverberg’s theorem via number fields*, Israel J. Math. **79** (1992), no. 2-3, 317–320.
- [16] Edwin H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.

- [17] H. Tverberg, *A generalization of Radon's theorem*, J. London Math. Soc. **41** (1966), 123–128.
- [18] B. Weiss, *A combinatorial proof of the Borsuk-Ulam antipodal point theorem*, Israel J. Math. **66** (1989), no. 1-3, 364–368.
- [19] Rade T. Živaljević and Siniša T. Vrećica, *The colored Tverberg's problem and complexes of injective functions*, J. Combin. Theory Ser. A **61** (1992), no. 2, 309–318.