ALGUMAS APLICAÇÕES DA TOPOLOGIA EM COMBINATÓRIA E COMPUTAÇÃO

JAIR DONADELLI JÚNIOR

1. Introdução

A topologia algébrica tem se apresentado como uma poderosa ferramenta no tratamento de problemas combinatórios. Em [17] Lovász obteve um resultado em teoria dos grafos por meio de métodos topológicos que posteriormente Győri demonstrou de forma combinatória [12]. Lovász também provou um resultado ligando o número cromático de um grafo à conexidade de um espaço topológico construído a partir desse grafo, demonstrando assim uma conjectura puramente combinatória feita por Kneser [15]. Este resultado foi mais tarde generalizado por Alon, Frankl e Lovász [2] para tratar o número cromático de certos hipergrafos ligados a versões mais gerais da conjectura de Kneser. Nestes casos, são conhecidas apenas as demonstrações topológicas destes resultados combinatórios. Uma síntese desses resultados extremamente interessantes está em Lovász [18] e Alon [1].

Em [13, 27] foram apresentados resultados sobre a complexidade de propriedades de grafos invariantes por isomorfismos. Esses resultados dizem respeito a outra fascinante conexão, entre a topologia algébrica e a complexidade de problemas computacionais.

Nessa mesma linha, temos os resultados que dizem respeito aos limitantes inferiores para o seguinte problema: dados $P \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ decidir se $x \in P$. Aqui, os primeiros resultados gerais apareceram em [8]; muitos outros vieram depois [26, 3, 6, 28] e os mais recentes estão em [5, 29]. Assim, a topologia algébrica mostra-se útil para o difícil problema de determinar limitantes inferiores para a complexidade de certos problemas computacionais.

Os pré-requisitos para estes resultados vão desde noções básicas de topologia algébrica a alguns resultados não-elementares como o teorema de dualidade de Alexander e a álgebra de incidência de reticulados. Isto faz com que estes resultados sejam difíceis. Dessa forma, o que propomos nesta dissertação é estudar alguns destes resultados e tentar escrevê-los de uma forma clara e completa, reduzindo, em particular, os pré-requisitos.

Nas próximas seções discutiremos mais especificamente os assuntos abordados nesta introdução que pretendemos tratar na dissertação. Na última delas descrevemos o atual estágio de nossos estudos e damos uma idéia de um provável "Conteúdo" para a dissertação.

Projeto de dissertação de mestrado sob orientação do Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa.

2. Sobre os Pré-Requisitos da Topologia Algébrica

Apresentamos aqui os resultados mais avançados da topologia algébrica que nos serão necessários. Estes resultados pertencem a duas classes de teoremas: os teoremas de dualidade sobre variedades e os teoremas de ponto fixo. Apresentamos também resultados que ligam a homologia de certos espaços à homologia de espaços oriundos de certos conjuntos parcialmente ordenados.

Sejam M uma n-variedade orientada, $A \subset M$ um subconjunto fechado e $\mathcal{V}$ a família de todas as vizinhanças abertas V de A dirigida por inclusão reversa, isto é, $V \leq V'$ se e somente se $V' \subseteq V$. Então $\{H^q(V), j_V^{V'}\}$ é um sistema direto de módulos de homologia [9, Cap. 8], onde $j_V^{V'}$ é o homomorfismo induzido pela inclusão $i\colon V' \hookrightarrow V$. Definimos $\bar{H}^q(A) = \lim_{\rightarrow} H^q(V)$ $(V \in \mathcal{V})$.

Teorema 2.1 (Dualidade de Alexander). *Se M é uma n-variedade conexa compacta orientada, $A \subset M$ um fechado e q um inteiro tal que $H_q(M) = H_{q+1}(M) = 0$, então*

$$\bar{H}^{n-q-1}(A) \cong H_q(M \backslash A).$$

Uma referência para o teorema acima pode ser encontrada em [19].

A inclusão $A \hookrightarrow V$ induz o homomorfismo $H^q(V) \rightarrow H^q(A)$ e passando ao limite temos o homomorfismo (canônico) $k\colon \bar{H}^q(A) \rightarrow H^q(A)$. Suponha A fechado e triangulável. Então A é um retrato absoluto de uma vizinhança; lembrando que a variedade M é compacta e portanto [11, Teorema 26.17.4, pág. 225] M é retrato absoluto de uma vizinhança temos que [11, Prop. 27.1, pág. 230] k é um isomorfismo.

É fácil ver que a esfera S^n satisfaz as hipóteses do teorema de dualidade de Alexander, e é somente nela que estamos interessados. Da observação anterior e do Teorema 2.1 temos o resultado que nos interessa.

Corolário 2.2. *$H^{n-q-1}(A) \cong H_q(S^n \backslash A)$ para todo fechado triangulável $A \subset S^n$ e todo q, $1 \leq q \leq n-2$.*

Usaremos, também, o corolário acima com o fato de que se A é um espaço topológico tal que $H_q(A)$ é finitamente gerado para todo q, então os submódulos livres de $H_q(A)$ e $H^q(A)$ são isomorfos (veja [24, Cor. 4, pág. 244]).

Sobre a segunda classe de teoremas temos os teoremas de ponto fixo de Smith. Estes estabelecem uma relação entre um complexo simplicial Δ e o subespaço $|\Delta|_\Gamma$ de sua realização formado pelos pontos fixos da ação de um grupo Γ.

Se R é um anel, dizemos que um complexo Δ é *R-acíclico* se $H_0(\Delta, R) = R$ e $H_q(\Delta, R) = 0$ para todo q positivo. O próximo resultado é devido a Smith [23] (veja também [16]).

Teorema 2.3. *Se Γ é um p-grupo agindo sobre um complexo simplicial $\mathbb{Z}_p$-acíclico Δ, então $|\Delta|_\Gamma$ é $\mathbb{Z}_p$-acíclico.*

Denotamos por $\chi(S)$ a *característica de Euler* do espaço S. Os próximos dois teoremas são devido a Oliver [21].

Teorema 2.4. *Se o grupo Γ age sobre o complexo $\mathbb{Z}_p$-acíclico Δ, e se Γ contém um p-subgrupo normal Γ_1 tal que Γ/Γ_1 é cíclico, então $\chi(|\Delta|_\Gamma) = 1$.*

Seja $\mathcal{G}$ a família de todos os grupos Γ contendo subgrupos Γ_1 e Γ_2 tais que

(i) $\Gamma_1 \lhd \Gamma_2 \lhd \Gamma$,

(ii) Γ_1 é um p-grupo, Γ_2/Γ_1 é cíclico e Γ/Γ_2 é um q-grupo, com p e q primos.

Teorema 2.5. *Se $\Gamma \in \mathcal{G}$ age sobre o complexo $\mathbb{Z}_p$-acíclico Δ, então $|\Delta|_\Gamma \neq \emptyset$.*

Um *arranjo de subespaços afins* é uma família finita $\mathcal{A} = \{K_1, \ldots, K_m\}$ de subespaços afins no $\mathbb{R}^n$. O *semi-reticulado intersecção* $L_\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$ é o conjunto parcialmente ordenado de todas as intersecções não vazias $K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_j}$ com $1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq m$, ordenadas por inclusão reversa. Definimos

$$V_\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{m} K_i \qquad \text{e} \qquad M_\mathcal{A} = \mathbb{R}^n \backslash V_\mathcal{A}.$$

O *complexo da ordem* $\Delta(P)$ de um conjunto parcialmente ordenado P é o complexo simplicial cujos vértices são os elementos de P e cujos simplexos são as cadeias de P.

Denotamos por $\Delta(x,y)$ o complexo da ordem do intervalo (x,y) em $L_\mathcal{A}$, por $\tilde{H}_i$ a homologia simplicial reduzida e por $\tilde{H}^i$ a cohomologia singular reduzida. Se $x = K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_j}$ é um elemento de $L_\mathcal{A}$ então definimos $\dim(x) = \dim_{\text{afim}}(K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_j})$. Goresky e MacPherson [10] (veja também [4]) estabeleceram o seguinte resultado.

Teorema 2.6. *Seja $\mathcal{A}$ um arranjo de subespaços afins no $\mathbb{R}^n$. Então*

$$\tilde{H}^i(M_\mathcal{A}) \cong \bigoplus_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_\mathcal{A}}} \tilde{H}_{n-\dim(x)-2-i}(\Delta(\hat{0}, x)).$$

Do Corolário 2.2 aplicado às compactificações $\widehat{V}_\mathcal{A} \subset \widehat{\mathbb{R}^n} \approx S^n$ temos que $\tilde{H}_i(\widehat{V}_\mathcal{A}) \cong \bigoplus_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_\mathcal{A}}} \tilde{H}_{i-\dim(x)-1}(\Delta(\hat{0}, x))$, e então chegamos ao seguinte resultado envolvendo os números de Betti reduzidos $\tilde{\beta}_i$.

Corolário 2.7. *Se $\mathcal{A}$ é um arranjo de subespaços afins no $\mathbb{R}^n$ então*

$$\tilde{\beta}_i(\widehat{V}_\mathcal{A}) = \tilde{\beta}^{n-i-1}(M_\mathcal{A}) = \sum_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_\mathcal{A}}} \tilde{\beta}_{i-\dim(x)-1}(\Delta(\hat{0}, x)).$$

A vantagem de se expressar os números de Betti de $\widehat{V}_\mathcal{A}$ e $M_\mathcal{A}$ em termos dos números de Betti de conjuntos parcialmente ordenados é que esses invariantes topológicos no primeiro caso são, em geral, difíceis de calcular, mas no segundo caso podemos usar a bem estabelecida teoria das funções de Möbius (veja [25]). Por [25, pág. 120] o valor $\mu(x,y)$ da *função de Möbius* μ no intervalo (x,y) de $L_\mathcal{A}$ é

$$\mu(x,y) = \sum_i (-1)^i \tilde{\beta}_i(\Delta(x,y)). \tag{1}$$

3. Sobre o Problema das Propriedades de Grafos

Por toda esta seção estamos considerando grafos sobre um conjunto fixo V de vértices; sem perda de generalidade $V = [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Todas as propriedades de grafos que consideraremos serão invariantes por isomorfismos.

Considere o seguinte jogo entre dois jogadores, o Bom e o Ruim: o Bom conhece um grafo $G = (V, E)$, que o Ruim desconhece. O Ruim tem que descobrir se o grafo do Bom tem uma determinada propriedade o mais eficientemente possível sendo que a única pergunta permitida é "$ij \in E(G)$?". O Bom responde "Sim" ou "Não" com o objetivo de induzir o Ruim a fazer o maior número de perguntas possível. Note que o Bom pode decidir "no momento" se a resposta é "Sim" ou "Não", desde que o grafo vai sendo revelado a cada pergunta não há motivo para o Bom escolher um grafo antes do começo do jogo.

Informalmente a complexidade $C(P)$ de uma propriedade P é o número de perguntas feitas por Ruim quando ambos Bom e Ruim jogam com estratégias ótimas. De outro modo a complexidade de P é o número de entradas da matriz de adjacências de um grafo que devem ser examinadas no pior caso para determinar se o grafo tem a propriedade P. Uma propriedade é dita *evasiva* se Ruim é forçado a fazer todas as perguntas, e é *não-trivial* se vale para algum mas não para todos os grafos sobre $V = [n]$.

Em [7, Cap. 8] encontramos a demonstração de que as seguintes propriedades são evasivas:

(i) G tem no máximo k arestas $(0 \leq k \leq \binom{n}{2})$.
(ii) G é uma árvore geradora.
(iii) G é uma floresta com k arestas $(k < n)$.
(iv) G é acíclico $(n \geq 3)$.
(v) G é conexo.
(vi) G é 2-conexo.

Com isso poderíamos conjecturar que $C(P) = \Omega(n^2)$, mas o seguinte exemplo [7, pág. 409] desfaz a nossa conjectura: chame G de *grafo escorpião* se ele contém um vértice b de grau $n-2$, o único vértice não adjacente a b tem grau 1 e é adjacente a um vértice de grau 2. A propriedade "G é um grafo escorpião" tem complexidade $\leq 6n$.

Podemos considerar o grafo G como um subconjunto do conjunto $V^{(2)}$ dos 2-subconjuntos de $V = [n]$, e identificamos uma propriedade P com uma família $\mathcal{P}$ de subconjuntos do conjunto das partes de $V^{(2)}$. Assim, dizemos $G \in \mathcal{P}$ se e somente se G tem a propriedade P.

Dizemos que uma propriedade $\mathcal{P}$ é *monótona decrescente* se $G \in \mathcal{P}$ e $H \subset G$ então $H \in \mathcal{P}$. A definição de propriedade *monótona crescente* é completamente análoga. Note que se $\mathcal{P}$ é uma propriedade monótona crescente, a propriedade complementar $\mathcal{P}^c$ é monótona decrescente e $C(\mathcal{P}) = C(\mathcal{P}^c)$. Daqui em diante consideramos propriedades monótonas decrescentes apenas, e usamos o termo *propriedades monótonas*.

Em 1973 Aanderaa e Rosenberg fizeram a seguinte conjectura.

Conjectura 3.1. *Existe uma constante $\varepsilon > 0$ tal que qualquer propriedade monó-*

tona não trivial para grafos sobre n vértices tem complexidade pelo menos εn^2.

Esta conjectura foi provada por Rivest e Vuillemin [22] para $\varepsilon = 1/16$ e depois melhorada por Kleitman e Kwiatkowski [14] para $\varepsilon = 1/9$. A demonstração do resultado de Rivest e Vullemin [22] pode ser encontrada em [7, Teorema 2.6, pág. 414].

A seguinte conjectura foi atribuída a Karp (veja [13]) e a Best, van Emde Boas e Lenstra (veja [7]).

Conjectura 3.2. *Toda propriedade monótona não-trivial sobre grafos é evasiva.*

Do fato de as nossas propriedades serem invariantes por isomorfismo, o grupo S_n age transitivamente sobre os $\binom{n}{2}$ elementos de $V^{(2)}$ preservando o conjunto de grafos tendo determinada propriedade. Note que $\mathcal{P}$ é um complexo simplicial abstrato e então podemos recorrer aos resultados sobre ações de grupos finitos em espaços topológicos.

Se Δ é um complexo simplicial abstrato sobre $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, defina o *grupo de automorfismos* de Δ, denotado $\mathrm{Aut}(\Delta)$, como o coleção de permutações de X que preservam Δ. Esse grupo também age na realização geométrica $|\Delta|$ de Δ como um grupo de homeomorfismos lineares por partes.

Uma *face livre* de Δ é uma face não maximal contida em uma única face maximal. Um *colapso elementar* em Δ é a operação de remoção de uma face livre de Δ junto com todas as faces que a contêm. Dizemos que Δ *colapsa* para Δ' se existe uma seqüência finita de colapsos elementares a partir de Δ resultando em Δ'. Um complexo é *colapsável* se ele colapsa para o complexo vazio. Se um complexo é colapsável então ele é contrátil; por sua vez contratibilidade implica em $\mathbb{Z}$-aciclicidade. Por fim $\mathbb{Z}$-aciclicidade implica em $\mathbb{Z}_p$-aciclicidade.

Depois de tantas definições podemos reescrever nosso problema da seguinte forma: dado um complexo simplicial Δ, determinar se um conjunto A de vértices de Δ é uma face de Δ fazendo perguntas do tipo "$x \in A$?". O complexo Δ é *evasivo* se não existe estratégia que decide se A é uma face de Δ em menos que n perguntas, e é *não-trivial* se é diferente do vazio e de um simplexo.

Uma generalização da Conjectura 3.2 foi proposta por Kahn, Saks e Sturtevant [13] em 1984.

Conjectura 3.3. [13] *Se Δ é um complexo simplicial sobre X não-vazio e não-evasivo e* $\mathrm{Aut}(\Delta)$ *é transitivo sobre X então Δ é um simplexo.*

A conexão com a topologia é dada pela seguinte proposição.

Proposição 3.4. [13] *Um complexo não-evasivo é colapsável.*

Seja Γ um membro de $\mathcal{G}$ (veja Seção 2) e suponha que Γ age transitivamente nos vértices de Δ. Note que se existe uma face A de Δ não vazia tal que $\gamma(A) = A$ para todo $\gamma \in \Gamma$, pela transitividade da ação de Γ em X segue que $A = X$. Considere o complexo simplicial abstrato Δ_Γ dado da seguinte forma: os vértices de Δ_Γ são as faces de Δ não vazias Γ-invariantes minimais e se $A_1, \ldots, A_k$ são vértices de Δ_Γ, então $\{A_1, \ldots, A_k\}$ é uma face de Δ_Γ se $A_1 \cup \cdots \cup A_k$ é uma face de Δ.

Então
$$|\Delta_\Gamma| = |\Delta|_\Gamma = \{x \in |\Delta| \colon \gamma(x) = x \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\}.$$
Ademais, $\gamma(A) = A$ se γ agindo em $|\Delta|$ fixa algum $x \in \mathrm{int}_{\mathrm{rel}}(|A|)$. Portanto pelo Teorema 2.5 temos $|\Delta|_\Gamma \neq \emptyset$ e estabelecemos o seguinte teorema.

Teorema 3.5. [13] *Se Δ é um complexo não-vazio $\mathbb{Z}$-acíclico sobre X e Γ é um subgrupo vértice-transitivo de* $\mathrm{Aut}(\Delta)$ *que pertence a $\mathcal{G}$, então Δ é um simplexo.*

Agora, seja $\mathcal{P}$ uma propriedade sobre grafos de ordem $|V| = p^\alpha$, onde p é um primo. Identifiquemos V com o corpo finito com p^α elementos $\mathrm{GF}(p^\alpha)$ e consideremos o grupo de transformações lineares
$$\Gamma = \{x \mapsto ax + b \colon a,\, b \in \mathrm{GF}(p^\alpha),\ a \neq 0\}.$$
A ação de Γ sobre V é duplamente transitiva sobre os elementos de $\mathrm{GF}(p^\alpha)$, e o subgrupo das translações
$$\Gamma_1 = \{x \mapsto x + b \colon b \in \mathrm{GF}(p^\alpha)\}$$
é um p-subgrupo normal de Γ. Ainda, Γ/Γ_1 é isomorfo ao grupo multiplicativo do corpo $\mathrm{GF}(p^\alpha)$ e portanto é cíclico. Assim $\Gamma \in \mathcal{G}$ e temos o seguinte resultado devido a Kahn, Saks e Sturtevant [13].

Teorema 3.6. [13] *Se n é uma potência de primo então toda propriedade não-trivial monótona de grafos com n vértices é evasiva.*

4. Sobre o Problema de Pertinência em um Subconjunto do $\mathbb{R}^n$

Suponha que temos um conjunto P em $\mathbb{R}^n$ e que queremos saber se um dado ponto x está em P. O modelo de computação aqui é a *árvore de decisão algébrica de ordem d*, isto é, uma árvore ternária onde os nós internos são rotulados com polinômios $p_i(x)$ de grau no máximo d e as folhas tem rótulos "Sim" ou "Não". Cada nó tem três filhos e as arestas são rotuladas com $<$, $>$, $=$.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, em cada passo a partir da raiz, a resposta para $p_i(x)\,\mathrm{R}\,0$ ($\mathrm{R} \in \{<,>,=\}$) diz em qual dos filhos prosseguimos e quando atingimos uma folha lemos a resposta para "$x \in P$?".

Dados uma árvore T e uma folha w, definimos L_w como o conjunto de pontos do $\mathbb{R}^n$ que em T "vão parar em w". Suponha que P é uma união de abertos disjuntos $\{P_i\}_{i\in I}$. Então, para todo i, cada P_i deve conter pelo menos uma componente conexa de L_w, para alguma folha w com rótulo "Sim" tal que no raiz–w caminho em T aparece somente desigualdades estritas $\overline{p_1}(x) < 0, \ldots, \overline{p_k}(x) < 0$, onde k é no máximo a altura h_T de T, e os polinômios $\overline{p_i}(x)$ $(1 \leq i \leq k)$ são, a menos de sinal, os rótulos dos vértices no raiz–w caminho em T. Definimos como L^+ o conjunto de tais folhas "Sim".

Denotamos por ${}^{\#}S$ o número de componentes conexas do espaço topológico S e definimos $\beta(m,n) = \max\{{}^{\#}(\mathbb{R}^n \backslash p^{-1}(0)) \colon p \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n] \text{ e } \mathrm{grau}(p) \leq m\}$.

Voltando ao nosso problema, prova-se que se $D = \{x \colon \Pi\overline{p_i}(x) \neq 0\}$ então $L_w \subset D$ e $^{\#}L_w \leq {}^{\#}D \leq \beta(h_T d, n)$. Se $d = 1$ chamamos T de árvore de decisão *linear*. Neste caso L_w é conexo e então $2^{h_T} \geq |I|$. Se $d > 1$, temos que $|L^+|\beta(h_T d, n) \geq |I|$.

Em 1979, Dobkin e Lipton provaram o seguinte resultado.

Teorema 4.1. [8] *Qualquer árvore de decisão linear para o problema de pertinência para a união disjunta de uma família $\{P_i\}_{i\in I}$ de abertos do $\mathbb{R}^n$ tem altura pelo menos* $\log |I|$.

Em 1982, Steele e Yao publicaram o seguinte resultado.

Teorema 4.2. [26] *Se T é uma árvore de decisão algébrica de ordem d para o problema de pertinência para a união disjunta de uma família $\{P_i\}_{i\in I}$ de abertos do $\mathbb{R}^n$, então a altura h_T de T satisfaz $2^{h_T}\beta(h_T d, n) \geq |I|$.*

O resultado acima pode ser usado em combinação com um resultado de Milnor [20], que afirma que $\beta(m, n) \leq (m + 2)(m + 1)^{n-1}$.

Se denotarmos por $C_d(P)$ a altura mínima para qualquer árvore de decisão algébrica de ordem d para o problema de pertinência em P, temos do Teorema 4.1 que $C_1(S) = \Omega(\log\, \beta_0(P))$, onde $\beta_0(P)$ é o número de Betti de dimensão 0 de P. Do Teorema 4.2 temos $C_d(P) + n \log C_d(P) = \Omega(\log \beta_0(P))$.

Esse resultado foi melhorado por Ben-Or em [3] que provou $C_d(P) = \Omega(\log\, \beta_0(P))$ e este resultado ainda vale se tomarmos uma modificação considerando *árvores de computação algébrica* ao invés de uma árvore de decisão, isto é, permitimos também fazer certas atribuições, em cada passo, no lugar de só fazermos testes. Sob estas hipóteses, o resultado obtido foi que $2^{h_T}3^{n+h_T} \geq |I|$.

Note que se o conjunto onde estamos testando pertinência for conexo os resultados que descrevemos até aqui são triviais. Esse problema foi contornado por Björner, Lovász e Yao em [6], que provaram $C_1(P) = \Omega(\log |\chi(P)|)$. Este resultado foi melhorado em recente trabalho de Björner e Lovász [5], onde o limite obtido foi $C_1(P) = \Omega\big(\log(\sum_{i=0} \beta_i(S))\big)$.

Se T é uma árvore de decisão linear para para $P \subseteq \mathbb{R}^n$ denotamos por $l^+(T)$ e $l^-(T)$ o números de folhas "Sim" e folhas "Não" em T, respectivamente. Ademais, $l^+(P)$ é o mínimo dos $l^+(T)$ para toda árvore de decisão linear T para P. Definimos $l^-(P)$ de modo análogo. Chamamos de *poliedro convexo* o conjunto solução de um sistema finito de inequações lineares e de *poliedro* a união finita de poliedros convexos. O resultado abaixo apareceu primeiro em [6].

Teorema 4.3. [6, 5] *Seja P um poliedro fechado no $\mathbb{R}^n$. Então*

$$l^+(P) \geq |\chi(\hat{P}) - 1|,$$

$$l^-(P) \geq |\chi(\hat{P}) - 1 + (-1)^{n-1}|.$$

Acima, $\hat{P}$ é a compactificação de P, de forma que $\hat{P} = P \cup \omega$, onde ω é um ponto "no infinito". Mais adiante, em [5], Björner e Lovász mostraram que a característica de Euler pode ser substituída pela soma dos números de Betti, melhorando os limitantes inferiores para o número de folhas para qualquer árvore de decisão linear para P.

Teorema 4.4. [5] *Para qualquer poliedro fechado* $P \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$l^-(P) \geq \sum_{i=0}^{n} \beta_i(\mathbb{R}^n \backslash P),$$

$$l^+(P) \geq -1 + \sum_{i=0}^{n} \beta_i(\mathbb{R}^n \backslash P).$$

Um argumento baseado no teorema de dualidade de Alexander em $S^n \approx \widehat{\mathbb{R}^n}$, fornece o seguinte resultado.

Corolário 4.5. [5] *Para qualquer poliedro fechado* $P \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$l^-(P) \geq \sum_{i=0}^{n} \beta_i(\hat{P}),$$

$$l^+(P) \geq -1 + \sum_{i=0}^{n} \beta_i(\hat{P}).$$

Se P é a união $V_{\mathcal{A}}$ de um *arranjo de poliedros convexos fechados* $\mathcal{A} = \{K_1, \ldots, K_m\}$, pelo Colorário 4.5 temos que

$$l^-(V_{\mathcal{A}}) \geq \sum_i \beta_i(\widehat{V}_{\mathcal{A}}) = \sum_i \beta_i(M_{\mathcal{A}}),$$

$$l^+(V_{\mathcal{A}}) \geq \sum_i \tilde{\beta}_i(\widehat{V}_{\mathcal{A}}) = \sum_i \tilde{\beta}_i(M_{\mathcal{A}}).$$

Se todos os poliedros são subespaços afins então podemos combinar as desigualdades acima com o Corolário 2.7 e a equação 1 da Seção 2 e temos os limitantes inferiores

$$l^-(V_{\mathcal{A}}) \geq 1 + \sum_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_{\mathcal{A}}}} \sum_i \tilde{\beta}_i(\Delta(\hat{0}, x)) \geq \sum_{x \in L_{\mathcal{A}}} |\mu_{L_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, x)|,$$

$$l^+(V_{\mathcal{A}}) \geq \sum_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_{\mathcal{A}}}} \sum_i \tilde{\beta}_i(\Delta(\hat{0}, x)) \geq \sum_{\substack{x > \hat{0} \\ x \in L_{\mathcal{A}}}} |\mu_{L_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, x)|.$$

Se os subespaços são lineares então $l^+(V_{\mathcal{A}}) \geq |\mu_{L_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, \hat{1})|$. Na Seção 4.1 indicamos uma situação em que as desigualdades acima serão usadas.

Nota. Em [28], Yao mostrou que qualquer árvore de decisão algébrica de ordem d ou árvore de computação algébrica para um $S \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto semi-algébrico deve ter altura $\Omega(\log |\chi(S)|)$, estendendo o resultado de [6]. Em [29], ele mostrou que para qualquer compacto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ a altura mínima de uma árvore de decisão algébrica de ordem d ou árvore de computação algébrica para S é pelo menos $\Omega\big(\log\big(\sum_{i \geq 0} \beta_i(S)\big)\big)$ estendendo o Corolário 4.5. Esses resultados são consideravelmente mais difíceis.

4.1. Uma Aplicação. Considere o seguinte problema.

Problema 4.6 (*k-iguais*). *Dados n números reais $x_1, \ldots, x_n$ e um inteiro $k \geq 2$ quantas comparações $x_i \geq x_j$ são necessárias para decidir se algum k deles $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ são iguais?*

Para $k = 2$ esse problema foi resolvido em [8] como conseqüência do Teorema 4.1, isto é, toda árvore de decisão linear para o Problema 4.6 com $k = 2$ tem altura $\Omega(n \log n)$. Em [6] o problema foi resolvido para qualquer $k \geq 2$ e o resultado foi que a altura é $\Omega(n \log(2n/k))$. Em [5] a constante foi melhorada; o resultado é que a altura de uma árvore de decisão linear para o Problema 4.6 é pelo menos $\max\{n-1, n\log(n/3k)\}$.

Estes limitantes são obtidos aplicando os resultados teóricos de [6] e [5] ao arranjo $\mathcal{A}_{n,k}$ dos $\binom{n}{k}$ subespaços lineares de dimensão $n-k+1$ dados pelas equações $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_k}$, para $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$. O Problema 4.6 é equivalente a decidir se $x \in V_{\mathcal{A}_{n,k}}$ para pontos $x \in \mathbb{R}^n$.

5. Sobre a Dissertação

Antes, algumas palavras do que já fizemos e o que pretendemos fazer. Não estudamos as demostrações dos resultados da Seção 2 mas pretendemos fazê-lo de pelo menos parte deles, a fim de tornar o trabalho o mais completo possível. Atualmente estamos estudando os pré-requisitos para o teorema de dualidade de Alexander. Com respeito à Seção 3 estudamos [13, 27] e sobre a Seção 4 estudamos os resultados teóricos em [3, 8, 26] e parcialmente os de [5]. Falta-nos estudar alguns resultados e as aplicações em [5].

A dissertação provavelmente será dividida em quatro capítulos. O Capítulo 1 será dedicado aos pré-requisitos dos assuntos tratados, por exemplo, os modelos de computação, as teorias de homologia e cohomologia, a álgebra de incidência em reticulados. O Capítulo 2 será dedicado aos resultados de [13, 27] e o Capítulo 3 ao problema de pertinência, por exemplo os resultados em [3, 8, 26, 6, 5].

Finalmente o Capítulo 4 conterá as aplicações referentes aos resultados expostos no Capítulo 3, por exemplo, o problema dos *k-iguais*.

Pretendemos apresentar e discutir as aplicações de modo que esse capítulo sirva como uma referência direta, isto é, para que o leitor possa ir direto aos resultados se não quiser ler a "parte topológica" do trabalho.

Referências

1. N. Alon, *Non-construtive proofs in combinatorics*, Proc. of International Congress of Math. (Kyoto, Japan), 1991, pp. 1421–1490.
2. N. Alon, P. Frankl, and L. Lovász, *The chromatic number of Kneser hypergraphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **298** (1986), 359–370.
3. M. Ben-Or, *Lower bounds for algebraic computation trees*, Proc. 15th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing, 1983, pp. 80–86.
4. A. Björner, *Subspace arrangements*, Proc. 1st. European Congress Math. (Paris, 1992) (A. Joseph and R. Rentschler, eds.), Birkhäuser, Basel-Boston, 1994.

5. A. Björner and L. Lovász, *Linear decision trees, subspace arrangements, and Möbius functions*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 677–706.
6. A. Björner, L. Lovász, and A.C.-C. Yao, *Linear decision trees: volume estimates and topological bounds*, Proc. 24th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing, 1992, pp. 170–177.
7. B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, Academic Press, London, 1978.
8. D.P. Dobkin and R.J. Lipton, *On the complexity of computations under varying sets*, J. Comput. System Sci. **18** (1979), 86–91.
9. S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1952.
10. M. Goresky and R. MacPherson, *Stratified morse theory*, Springer-Verlag, New York, 1978.
11. M.J. Greenberg and J.R. Harper, *Algebraic Topology – A first course*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Massachusetts, 1981.
12. E. Győri, *On the division of graphs to connected subgraphs*, Combinatorics, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai **18** (1978), 485–494.
13. J. Kahn, M. Saks, and D. Sturtevant, *A topological approach to evasiveness*, Combinatorica **4** (1984), 297–306.
14. D.J. Kleitman and D.J. Kwiatkowski, *Further results on the Aanderaa–Rosenberg conjecture*, J. Combinatorial Theory (B) **28** (1980), 85–95.
15. M. Kneser, *Aufgabe 300*, Jber. Deutsch. Math. Verein **58** (1955), 677–706.
16. S. Lefschetz, *Algebraic Topology*, Amer. Math. Soc., New York, 1942.
17. L. Lovász, *A homology theory for spanning trees of a graph*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **30** (1977), 241–251.
18. ———, *Topological and algebraic methods in graph theory*, Graph Theory and Related Topics (New York), Academic Press, 1979, pp. 1–14.
19. W.S. Massey, *Singular Homology Theory*, Springer-Verlag, New York, 1980.
20. J. Milnor, *On the Betti numbers of real varietes*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 275–280.
21. R. Oliver, *Fixed-point sets of group actions on finite cyclic complexes*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 155–177.
22. R. Rivest and S. Vuillemin, *On recognizing graph properties from adjacency matrices*, Theor. Comp. Sci. **4** (1978), 371–384.
23. P.A. Smith, *Fixed points theorems for periodic transformations*, Amer. J. of Math. **63** (1941), 1–8.
24. E.H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw–Hill, New York, 1966.
25. R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 1, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, CA, 1978.
26. J.M. Steele and A.C.-C. Yao, *Lower bounds for algebraic decision trees*, J. Algorithms **3** (1982), 1–8.
27. A.C.-C. Yao, *Monotone bipartite graph properties are evasive*, SIAM J. Computing **17** (1988), 517–520.
28. ———, *Algebraic decision trees and Euler characteristics*, Proc. 33rd Ann. IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, 1992, pp. 268–277.
29. ———, *Decision tree complexity and Betti numbers*, Proc. 26th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing, 1994, pp. 615–624.