Aplicações do Lema de Regularidade de Szemerédi em Teoria dos Grafos

Jair Donadelli Júnior

Sumário

Nesta monografia veremos algumas aplicações do Lema de Regularidade de Szemerédi em Teoria dos Grafos. O Lema de Regularidade foi provado por Szemerédi e usado por ele na demonstração de uma conjectura sobre existência de progressões aritméticas em subconjuntos densos dos inteiros. Desde então, tem sido uma ferramenta de sucesso em várias áreas como Complexidade Computacional, Teoria Combinatória de Números e, principalmente, em Teoria Extremal de Grafos. As aplicações em Teoria dos Grafos que descrevemos neste trabalho são para alguns problemas do tipo Ramsey e do tipo Turán e não cobre os vários tipos de aplicações desse lema. Um excelente guia sobre as aplicações do Lema de Regularidade e suas variantes em Teoria dos Grafos é [23].

Na primeira seção apresentamos o Lema de Regularidade e algumas de suas formas alternativas, veremos a sua relação com grafos pseudo-aleatórios e alguns exemplos de como ele se aplica em Teoria

Extremal de Grafos. Ne segunda seção, demonstramos alguns resultados clássicos que usam o Lema de Regularidade, a saber, um teorema de Szemerédi do tipo Ramsey-Turán sobre grafos que não contêm subgrafos completos com quatro vértices, demonstramos também o Teorema de Ruzsa-Szemerédi sobre hipergrafos 3-uniforme sem 6 vértices que geram 3 arestas e, também, demonstramos um resultado de Chvátal, Rödl, Szemerédi e Trotter sobre o número de Ramsey de grafos com grau máximo limitado. Fechamos essa seção comentando um resultado de Rödl sobre a universidalidade de grafos densos.

A penúltima seção descreve uma versão recente do Lema de Regularidade para grafos esparsos e contém alguns resultados sobre a cardinalidade de famílias de grafos Ramsey-críticos; esses resultados estão sendo apresentados aqui por termos em mente uma aplicação da versão esparsa do lema para um problema do tipo descrito na Seção 3.3.

Na última seção apresentamos a primeira versão construtiva do Lema de Regularidade devida à Alon, Duke, Lefmann, Rödl e Yuster. Depois, veremos uma versão recente do Lema de Szemerédi devida a Frieze e Kannan, também algorítmica, que tem implicações em esquemas de aproximação em alguns problemas NP-difíceis sobre grafos densos.

1 Uma visão geral

O Lema de Regularidade foi usado por Szemerédi como resultado auxiliar na prova de uma conjectura de \$1000 de Erdős e Turán sobre existência de progressões aritméticas em subconjuntos dos números inteiros. O Teorema de Szemerédi [31], de 1975, é um dos resultados mais difíceis em combinatória e pode ser formulado como segue.

TEOREMA 1 *Para todo inteiro* $k > 2$ *e todo real* $0 < \varepsilon < 1$ *existe um inteiro* $n_0 = n_0(\varepsilon, k) > 0$ *tal que, para todo inteiro* $n \geq n_0$*, se* $A \subseteq [n]$ *e* $|A| > \varepsilon n$*, então* A *deve conter uma progressão aritmética de* k *termos.* ■

Ingenuamente, o Lema de Regularidade diz que todo grafo pode ser decomposto em uma união de um número limitado de grafos bipartidos "aparentemente" aleatórios[1], no sentido de muitas das arestas do grafo são arestas entre pares de subconjuntos de vértices e as arestas entre os pares estão distribuídas uniformemente, da forma como esperamos se são grafos bipartidos aleatórios. Esses grafos compartilham várias propriedades locais de grafos bipartidos aleatórios, por exemplo, muitos vértices têm graus "próximos" (veja Proposição 10, página 14). Conquanto grafos aleatórios de uma certa densidade de arestas são mais fáceis de serem manipulados que a classe de todos os grafos daquela densidade, usamos o Lema de Regularidade para transportar resultados que são "fáceis" em grafos aleatórios para a classe dos grafos com o número certo de arestas.

Sejam $G = (V, E)$ um grafo e A, $B \subseteq V$ disjuntos. Então denotamos por $\mathrm{e}_G(A, B)$ o número de arestas, em G, com um extremo em A e outro em B, e

$$\mathrm{d}_G(A, B) = \frac{\mathrm{e}_G(A, B)}{|A|\,|B|}$$

é a *densidade do par* (A, B) no grafo G. Escrevemos $\mathrm{e}(A, B)$ e $\mathrm{d}(A, B)$ se G estiver subentendido.

Dados $\varepsilon \leq 1$ positivo e A, $B \subseteq V$ disjuntos, dizemos que o par (A, B) é (ε, G)*-regular*, ou ε-regular se G está subentendido, se para quaisquer $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ com $|X| \geq \varepsilon|A|$ e $|Y| \geq \varepsilon|B|$ temos

$$\big|\, \mathrm{d}_G(A, B) - \mathrm{d}_G(X, Y) \big| < \varepsilon.$$

Observe que quanto menor for ε, mais uniforme é a distribuição das arestas no grafo. Por exemplo, fixado ε, o grafo bipartido aleatório $G_{n,n,1/2}$ com $2n$ vértices e probabilidade de aresta $1/2$ é ε-regular com probabilidade tendendo a 1 quando n cresce indefinidamente.

Seja $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ uma $(k+1)$-partição de V. Dizemos que a partição $\mathcal{P}$ é (ε, k)*-equipotente* se $|V_i| = |V_j|$ para todos $1 \leq i < j \leq k$ e $|V_0| \leq \varepsilon|V|$. Dizemos que a partição $\mathcal{P}$ é *equipotente* se for (ε, k)-equipotente para algum ε e algum k. O conjunto V_0 é chamado conjunto *excepcional* e pode ser

[1] Veremos na Seção 1.2 que o nome técnico para esse fenômeno é *grafos bipartidos pseudo-aleatórios.*

vazio. Dizemos que a partição $\mathcal{P}$ de V é (ε, k, G)-regular se é (ε, k)-equipotente, se o número de pares (V_i, V_j), com $1 \leq i < j \leq k$, que não são (ε, G)-regulares é no máximo $\varepsilon\binom{k}{2}$.

Na sua primeira versão, aquela usada na prova do Teorema 1, o Lema de Regularidade foi provado para grafos bipartidos. Em 1978, Szemerédi [33] demonstrou uma versão para grafos arbitrários. O LEMA DE REGULARIDADE de Szemerédi é o seguinte resultado.

TEOREMA 2 *Dados um real* $0 < \varepsilon < 1$ *e um inteiro* $m_0 \geq 1$, *existem inteiros positivos* $n_0 = n_0(\varepsilon, m_0)$ *e* $M = M(\varepsilon, m_0) \geq m_0$ *tais que se* $G = (V, E)$ *é um grafo com pelo menos* n_0 *vértices, então existe uma partição* (ε, k, G)*-regular de* V, *onde* $m_0 \leq k \leq M$.

O conjunto excepcional é uma conveniência técnica para garantir que as outras classes tenham exatamente a mesma cardinalidade (veja o Corolário 8 na página 12 para uma versão sem a classe excepcional). A cota superior M para o número de partes assegura que para grafos grandes as partes são grandes também. Escolhendo m_0 grande, podemos aumentar a proporção de arestas que estão sujeitas à condição de regularidade entre os pares da partição e tornamos irrelevante o número de arestas contidas dentro das partes.

Por exemplo, dado $\varepsilon \leq 1$ real positivo e $m_0 \geq 1$ inteiro, apliquemos o Lema de Regularidade para um grafo G de ordem n suficientemente grande. Observe que

$$(1) \qquad (1-\varepsilon)\frac{n}{k} \leq |V_i| \leq \frac{n}{k},$$

para todo $i \in [k]$. Ainda, dado um real positivo $d < 1$, considere os pares (V_i, V_j), para $1 \leq i < j \leq k$, que são (ε, G)-regulares de densidade pelo menos d. Então, pondo $|V_i| = m$ para todo $i \in [k]$,

(i) V_0 contém no máximo $1/2(\varepsilon n)^2$ arestas e existem no máximo $|V_0|mk \leq \varepsilon nmk$ arestas que ligam vértices de V_0 aos vértices das outras classes;

(ii) cada um dos no máximo $\varepsilon\binom{k}{2}$ pares irregulares contém no máximo m^2 arestas;

(iii) entre os pares ε-regulares de densidade $< d$ há $< dm^2$ arestas;

(iv) cada V_i, para $i \in [k]$, contém no máximo $\binom{m}{2}$ arestas.

Seja $G'' = G''(\mathcal{P}, d, \varepsilon)$ o grafo obtido de G removendo as arestas descritas nos itens (i)–(iv). Então,

$$\mathrm{e}(G) < \frac{1}{2}(\varepsilon n)^2 + \varepsilon nmk + \frac{\varepsilon}{2}m^2k^2 + \frac{k^2}{2}dm^2 + \frac{1}{2}m^2k + \mathrm{e}(G''),$$

portanto, usando o limitante superior em (1) para $|V_i| = m$ ($\forall i \in [k]$) temos

$$(2) \qquad \mathrm{e}(G'') > \mathrm{e}(G) - \frac{n^2}{2}\left(d + 4\varepsilon + \frac{1}{m_0}\right).$$

Esse grafo G'' obtido é muito útil nas aplicações, o que já indica que devemos ter problemas se o grafo for esparso (ou seja, se $\mathrm{e}(G) = o(|V|^2)$, quando $|V| \to \infty$) pois o Lema de Regularidade aproxima o grafo G pelo grafo vazio. Uma versão para grafos esparsos foi demonstrada independentemente por Rödl e Kohayakawa (1991, veja [22] e Seção 3).

Vejamos uma idéia da prova do Lema de Regularidade. Seja G um grafo de ordem n e suponha um par (A, B) de subconjuntos disjuntos de vértices que não é (ε, G)-regular. Ponha A_1 e B_1 subconjuntos de A e B, respectivamente, que atestam a ε-irregularidade, isto é, $|A_1| \geq \varepsilon|A|$, $|B_1| \geq \varepsilon|B|$ e $|\,\mathrm{d}(A_1, B_1) - \mathrm{d}(A, B)| \geq \varepsilon$. Sejam A_2 e B_2 os complementos de A_1 e B_1 em A e B, respectivamente. Defina uma "densidade" para essa partição do par (A, B) pondo

$$d = \mathrm{q}(\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \mathrm{d}(A_i, B_j)^2 |A_i||B_j|.$$

No que segue, como ilustração, mostramos que $d \geq \mathrm{q}(A, B) + \varepsilon^4 n^{-2}|A||B|$. Essa é a idéia fundamental na prova do Lema de Regularidade: quando há muitos pares irregulares, refinamos a partição. Como d é limitado superiormente e a densidade cresce substancialmente, após um número finito de refinamentos teremos uma partição ε-regular de (A, B). Agora,

$$d = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \frac{\mathrm{e}(A_i, B_j)^2}{|A_i||B_j|} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{\mathrm{e}(A_1, B_1)^2}{|A_1||B_1|} + \sum_{i+j>2} \frac{\mathrm{e}(A_i, B_j)^2}{|A_i||B_j|} \right).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz[2]

$$\begin{aligned} d \geq& \frac{1}{n^2} \left(\frac{\mathrm{e}(A_1, B_1)^2}{|A_1||B_1|} + \frac{\left(\sum_{i+j>2} \mathrm{e}(A_i, B_j)\right)^2}{\sum_i |A_i| \sum_j |B_j|} \right) \\ =& \frac{1}{n^2} \left(\frac{\mathrm{e}(A_1, B_1)^2}{|A_1||B_1|} + \frac{(\mathrm{e}(A, B) - \mathrm{e}(A_1, B_1))^2}{|A||B| - |A_1||B_1|} \right). \end{aligned}$$

Pondo $\delta = \mathrm{d}(A_1, B_1) - \mathrm{d}(A, B) = \mathrm{e}(A_1, B_1)/|A_1||B_1| - \mathrm{e}(A, B)/|A||B|$, temos que, $\mathrm{e}(A_1, B_1) = \delta|A_1||B_1| + \mathrm{e}(A, B)|A_1||B_1|/|A||B|$, portanto,

[2] $\sum \frac{\alpha_i^2}{\mu_i} \geq \frac{(\sum \alpha_i)^2}{\sum \mu_i}$, que segue da usual $\sum {a_i}^2 \sum {b_i}^2 \geq (\sum a_i b_i)^2$.

$$
\begin{aligned}
n^2 d \geq & \frac{\left(\delta|A_1||B_1| + \frac{\mathrm{e}(A,B)}{|A_1||B_1|}\right)^2}{|A_1||B_1|} + \frac{\left(\mathrm{e}(A,B) - \frac{\mathrm{e}(A,B)}{|A||B|}|A_1||B_1| - \delta|A_1||B_1|\right)^2}{|A||B| - |A_1||B_1|} \\
= & \delta^2|A_1||B_1| + \frac{|A_1||B_1|\,\mathrm{e}(A,B)^2}{|A|^2|B|^2} + 2\delta\frac{\mathrm{e}(A,B)}{|A||B|}|A_1||B_1| \\
+ & \frac{|A||B| - |A_1||B_1|}{|A|^2|B|^2}\,\mathrm{e}(A,B)^2 + \frac{\delta^2|A_1|^2|B_1|^2}{|A||B| - |A_1||B_1|} - 2\delta\frac{\mathrm{e}(A,B)}{|A||B|}|A_1||B_1| \\
\geq & \delta^2|A_1||B_1| + \frac{\mathrm{e}(A,B)^2}{|A||B|} \\
\geq & \frac{\mathrm{e}(A,B)^2}{|A||B|} + \varepsilon^4|A||B|,
\end{aligned}
$$

pois $|A_1| \geq \varepsilon|A|$, $|B_1| \geq \varepsilon|B|$ e $|\delta| \geq \varepsilon$. Portanto, $d \geq \mathrm{q}(A,B) + \varepsilon^4 n^{-2}|A||B|$.

Note que no caso do Lema de Regularidade estamos interessados quando as partes envolvidas têm a mesma cardinalidade, ou seja, acima $|A| = |B|$ e particionamos os pares irregulares em partes de mesma cardinalidade. Dessa forma, seguindo a bibliografia, chamaremos essa "densidade" de índice da partição que é definido como segue.

Definimos o *índice da partição* $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ por

$$\mathrm{ind}(\mathcal{P}) = \frac{1}{k^2}\sum_{1\leq i<j\leq k} \mathrm{d}(V_i, V_j)^2.$$

Observe que $0 \leq \mathrm{ind}(\mathcal{P}) < 1/2$.

O índice mede o quanto a partição é regular. Se a partição tem muitos pares (A,B) irregulares nós podemos tomar $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ que violam a condição de regularidade em (A,B) e fazer deles elementos de uma nova partição. No refinamento o índice cresce por uma constante aditiva fixa e como o índice é limitado superiormente, após um número limitado de refinamentos teremos uma partição ε-regular. Essa idéia está formulada no lema abaixo. O seguinte resultado é o coração do Lema de Regularidade.

Lema 3 *Seja G um grafo de ordem n. Sejam $\varepsilon \leq 1$ um real positivo e $\mathcal{P} = \{V_0, \ldots, V_k\}$ uma partição $(\varepsilon, 1 + k4^k)$-equipotente de $V(G)$ tal que*

$$4^k > 600\varepsilon^{-5}.$$

Se mais que $\varepsilon\binom{k}{2}$ pares (V_i, V_j) são ε-irregulares então existe uma partição $(\varepsilon, 1 + k4^k)$-equipotente $\mathcal{Q}$ de $V(G)$ com

$$< |V_0| + \frac{n}{4^k}$$

vértices na classe excepcional e tal que

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{ind}(\mathcal{Q}) \geq \operatorname{ind}(\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon^5}{32}.$$

■

A prova do Lema de Regularidade segue por repetidas aplicações do Lema 3. Por (3), temos que no t-ésimo passo

$$\frac{1}{2} > \operatorname{ind}(\mathcal{P}_t) \geq \operatorname{ind}(\mathcal{P}) + \frac{t\varepsilon^5}{32},$$

portanto, com no máximo $16\varepsilon^{-5}$ passos temos uma partição (ε, G)-regular de $V(G)$.

A partir do lema acima provamos o Lema de Regularidade pondo s o menor inteiro tal que

$$4^s \geq 600\varepsilon^{-1},\ s \geq m_0 \ \text{ e } \ s > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Definimos a seqüência $f(0), f(1), \ldots$ pondo $f(0) = s$ e, indutivamente, $f(t+1) = f(t)4^{f(t)}$, para todo inteiro positivo t. Tome T o maior inteiro $t \geq 0$ para o qual existe uma partição equipotente $\mathcal{P}$ de $V(G)$ em $f(t)+1$ classes com

$$\operatorname{ind}(\mathcal{P}) \geq \frac{t\varepsilon^5}{32},$$

e com classe excepcional de cardinalidade no máximo

$$\varepsilon n \left(1 - \frac{1}{2^{t+1}}\right).$$

Tal partição certamente existe para $t = 0$. Pelo Lema 3 e pela maximalidade de T a partição é ε-regular. Assim, podemos tomar $M = f(\lfloor 16\varepsilon^{-5} \rfloor)$.

1.1 O Lema de Regularidade em Teoria Extremal de Grafos. O Lema de Regularidade é uma poderosa ferramenta em Teoria Extremal de Grafos.

Um ponto central nas aplicações em Teoria Extremal é o seguinte: dado um grafo G e fixado parâmetros $d > \varepsilon > 0$, construímos o grafo cujo conjunto de vértices é uma partição dos vértices de G e as arestas são dadas pelos pares (ε, G)-regulares de densidade pelo menos d. Veremos que os subgrafos pequenos desse grafo, em geral garantidos por algum resultado extremal, também são subgrafos de G. Esse fenômeno está formalizado no Lema 13. Também, veremos uma demonstração do famoso Teorema de Erdős–Stone baseada nesse paradigma e onde o resultado extremal usado é o Teorema 4 abaixo, o conhecido Teorema de Turán.

O Teorema de Erdős–Stone, algumas vezes chamado Teorema Fundamental da Teoria Extremal (apud [4]), foi provado por Erdős e Stone [10] em 1946. Esse resultado diz respeito a um problema da Teoria Extremal conhecido como o *problema do subgrafo proibido*: dados um inteiro positivo n e um grafo H determine o número máximo de arestas, denotado por $\mathrm{ex}(n, H)$, que qualquer grafo de ordem n deve conter para não ocorrer H como subgrafo. Um grafo G que não contém H e com $\mathrm{ex}(n, H)$ arestas é dito *grafo extremal*.

Vamos analisar o caso $H = K^r$, para $r > 1$ inteiro. Um candidato natural a grafo extremal é um grafo $(r-1)$-partido completo. Suponha que A e B são partes de um grafo $(r-1)$-partido com $|A| - |B| \geq 2$. Note que transferindo um vértice de A para B temos um novo grafo $(r-1)$-partido com $|A| - |B|$ arestas a mais. Dessa forma, estamos interessados no grafo $(r-1)$-partido onde o tamanho das partes diferem de no máximo 1 vértice. Esse grafo é denotado por $T^{r-1}(n)$.

Note que, para inteiros n, $r > 1$, temos

$$\mathrm{e}(T^{r-1}(n)) \leq \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)\binom{n}{2}.$$

De fato, prova-se que se $n = (r-1)k + i$, com $0 \leq i < r-1$, então

$$\mathrm{e}(T^{r-1}(n)) = \frac{1}{2}\left(\frac{r-2}{r-1}\right)(n^2 - i^2) + \binom{i}{2}. \tag{4}$$

Em 1941, Turán (apud [4]) provou que o grafo $T^{r-1}(n)$ é extremal com relação a conter K^r. Mais que isso, esse grafo é único com essa propriedade.

Teorema 4 *Para todos n, $r > 1$ vale que $\mathrm{ex}(n, K^r) = \mathrm{e}(T^{r-1}(n))$. Ainda, todo grafo G de ordem n que não contém K^r e com $\mathrm{ex}(n, K^r)$ arestas é o grafo $T^{r-1}(n)$ (a menos de isomorfismos).* ■

O Teorema de Erdős–Stone diz que com $\mathrm{e}(T^{r-1}(n)) + \gamma n^2$ arestas, para qualquer $0 < \gamma < 1$, temos não só um K^r mas um $K^r(t)$, isto é, o grafo r-partido completo com t vértices em cada classe, para todo inteiro positivo t se n for suficientemente grande.

Teorema 5 *Dados inteiros $r \geq 2$ e $t \geq 1$ e um real $0 < \gamma < 1$, existe $n_0 > 0$ tal que todo grafo com $n \geq n_0$ vértices e pelo menos*

$$\mathrm{e}(T^{r-1}(n)) + \gamma n^2$$

arestas, contém $K^r(t)$ como subgrafo.

Em outras palavras,

$$\mathrm{ex}(n, K^r(t)) = \left(1 - \frac{1}{r-1} + o(1)\right)\binom{n}{2}.$$

O Teorema de Erdős–Stone tem o seguinte, bastante interessante, corolário.

Corolário 6 *Para todo grafo H temos*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(n, H)}{\binom{n}{2}} = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}\right).$$

De fato, note que pela equação (4) temos

$$\mathrm{e}\left(T^{r-1}\left((r-1)\left\lfloor\frac{n}{r-1}\right\rfloor\right)\right) \leq \mathrm{e}(T^{r-1}(n)) \leq \mathrm{e}\left(T^{r-1}\left((r-1)\left\lceil\frac{n}{r-1}\right\rceil\right)\right),$$

portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}(T^{r-1}(n))}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{r-1}.$$

Tome $r = \chi(H)$. Dessa forma $H \not\subseteq T^{r-1}(n)$, portanto, $\mathrm{e}(T^{r-1}(n)) \leq \mathrm{ex}(n, H)$. Por outro lado, $H \subseteq K^r(t)$ para t suficientemente grande, portanto, $\mathrm{ex}(n, H) \leq \mathrm{ex}(n, K^r(t))$. Fixe um t para o qual vale essa desigualdade. Para todo $\gamma > 0$ temos, pelo Teorema de Erdős–Stone para $n \geq n_0$,

$$\mathrm{ex}(n, K^r(t)) < \mathrm{e}(T^{r-1}(n)) + \gamma n^2.$$

Então, para n suficientemente grande temos

$$\frac{\mathrm{e}(T^{r-1}(n))}{\binom{n}{2}} \leq \frac{\mathrm{ex}(n,H)}{\binom{n}{2}} < \frac{\mathrm{e}(T^{r-1}(n))}{\binom{n}{2}} + \frac{2\gamma}{1-\frac{1}{n}},$$

portanto, segue o corolário.

Note que se $\mathcal{L} = \{H_1, \ldots, H_s\}$ é uma família de grafos, podemos definir $\mathrm{ex}(n, \mathcal{L})$, de modo natural, como o número máximo de arestas para um grafo de n vértices não conter algum grafo da família $\mathcal{L}$ como subgrafo. Então, pondo $r = \min\{\chi(H_i) \colon i \in [s]\}$, se $r \geq 3$ temos que

$$\mathrm{ex}(n, \mathcal{L}) = \left(1 - \frac{1}{r-1} + o(1)\right)\binom{n}{2}.$$

Essa descrição assintótica de $\mathrm{ex}(n, \mathcal{L})$ foi mostrada por Erdős e Simonovits [9] em 1966. Essa forma geral do problema do subgrafo proibido, isto é, o problema de determinar o número máximo de arestas de um grafo de ordem n que não contenha qualquer elemento de $\mathcal{L}$ é conhecido como *problema extremal do tipo Turán*.

1.2 Grafos pseudo-aleatórios. Escrevemos $\mathcal{G}(n)$ para a família dos grafos de ordem n e G_n para um grafo arbitrário de ordem n. Considere a seguinte propriedade para grafos.

$\mathbf{P_s}$: Para todo real positivo $\varepsilon \leq 1$ e todo inteiro positivo m_0 existem inteiros positivos $n_0 = n_0(\varepsilon, m_0)$ e $M = M(\varepsilon, m_0)$ tal que G_n, para $n \geq n_0$, admite uma partição (ε, k, G_n)-regular $V_0, V_1, \ldots, V_k$, com $m_0 \leq k \leq M$, tal que

$$(V_i, V_j) \text{ é } (\varepsilon, G_n)\text{-regular e } \left|\mathrm{d}(V_i, V_j) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

não vale para no máximo $\varepsilon\binom{k}{2}$ pares (V_i, V_j), com $1 \leq i < j \leq k$.

Não é difícil mostrar que para o grafo aleatório $G_{n,p}$, para $p = 1/2$, a propriedade $\mathbf{P_s}$ vale com probabilidade tendendo a 1, quando $n \to \infty$. Em 1989, Chung, Graham e Wilson [6] introduziram uma classe de propriedades de grafos que são equivalentes e satisfeitas por grafos aleatórios *quase-sempre*, isto é, propriedades P tais que

$$\Pr\left[G_n \in \mathcal{G}(n) \colon G_n \text{ satisfaz } P\right] \to 1 \text{ quando } n \to \infty.$$

No Teorema 7 abaixo, listamos essa classe de equivalência de propriedades que são satisfeitas para grafos aleatórios quase sempre, para probabilidade de arestas 1/2. Resultados análogos podem ser provados para probabilidade de arestas p, para todo $0 < p < 1$ fixo, basicamente pelos mesmos argumentos.

Um grafo que satisfaz alguma (portanto, todas) dessas propriedades é dito *grafo pseudo-aleatório*. Simonovits e Sós [30], em 1991, provaram que $\mathbf{P_s}$ é uma propriedade pseudo-aleatória de grafos.

No que segue adotamos as seguintes notações, $N^*_{G_n}(H)$ e $N_{G_n}(H)$ denotam o número de cópias induzidas e não necessariamente induzidas de H em G_n, respectivamente. Denotamos por $\Gamma_{G_n}(x)$ o conjunto dos vértices adjacentes ao vértice x em G_n. Usamos C^t para denotar o circuito com t arestas e $A = A(G_n) = (a_{x,y})_{x,y \in V(G_n)}$ é a matriz de adjacências de G_n. Lembramos que A é uma matriz real simétrica, portanto, admite autovalores reais. Denotamos por $A \triangle B$ a diferença simétrica dos conjuntos A e B, ou seja, $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Teorema 7 *São equivalentes:*
$\mathbf{P_1}(s)$: *Para todo grafo H de ordem s, $s \geq 4$ inteiro,*

$$N^*_{G_n}(H) = (1 + o(1)) n^s 2^{-\binom{s}{2}}.$$

$\mathbf{P_2}(t)$: *Para $t \geq 4$ inteiro par,*

$$\mathrm{e}(G_n) \geq (1 + o(1)) \left(\frac{n}{2}\right)^2 \quad e \quad N_{G_n}(C^t) \leq (1 + o(1)) \left(\frac{n}{2}\right)^t.$$

$\mathbf{P_3}$: *Considere uma ordenação $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ dos autovalores λ_i de $A(G_n)$. Então,*

$$\mathrm{e}(G_n) \geq (1 + o(1)) \left(\frac{n}{2}\right)^2, \qquad \lambda_1 = (1 + o(1)) \frac{n}{2} \qquad e \qquad \lambda_2 = o(n).$$

$\mathbf{P_4}$: *Para cada $U \subseteq V(G_n)$, temos*

$$\mathrm{e}(U) = \frac{1}{4}|U|^2 + o(n^2).$$

$\mathbf{P_5}$: *Para cada $U \subseteq V(G_n)$, com $|U| = \lfloor n/2 \rfloor$, temos*

$$\mathrm{e}(U) = \left(\frac{1}{16} + o(1)\right) n^2.$$

$\mathbf{P_6}$: *Para todo* x, $y \in V(G_n)$, *se* $S(x,y) = V(G_n) \setminus (\Gamma(x) \triangle \Gamma(y))$, *então*

$$\sum_{x,y \in V} \left| |S(x,y)| - \frac{n}{2} \right| = o(n^3).$$

$\mathbf{P_7}$: *Para todos* x, $y \in V(G_n)$

$$\sum_{x,y \in V} \left| |\Gamma(x) \cap \Gamma(y)| - \frac{n}{4} \right| = o(n^3).$$

■

Note que $\mathbf{P_2}$ vale somente para circuitos pares. O seguinte exemplo mostra a diferença, neste contexto, entre circuitos pares e circuitos ímpares. Sejam G um grafo com $4n$ vértices e V_1, V_2, V_3, V_4 subconjuntos disjuntos de $V(G)$, cada um de tamanho n. Em V_1 e em V_2 colocamos todas arestas, entre V_3 e V_4 colocamos todas as aresta e entre $V_1 \cup V_2$ e $V_3 \cup V_4$ colocamos as arestas com probabilidade $1/2$. Esse grafo não é pseudo-aleatório, entretanto, valem $\mathbf{P_1}(3)$ e $\mathbf{P_2}(2t+1)$ para todo t fixo.

Todas essas propriedades são facilmente verificadas valerem para o grafo aleatório $G_{n,1/2}$ quase-sempre, exceto possivelmente, $\mathbf{P_3}$. Ocorre que $\mathbf{P_3}$ também é natural se conhecemos as relações entre os autovalores de um grafo e suas propriedades estruturais.

O leitor interessado pode encontrar uma dezena de exemplos de grafos pseudo-aleatórios em Thomason [34]. Vejamos um deles, mas antes do exemplo de grafo pseudo-aleatório, vejamos algumas notações e alguns resultados básicos de álgebra. Dizemos que um inteiro a é um *resíduo quadrático* módulo um primo $p \geq 3$ se p não divide a e

$$a \equiv x^2 \pmod{p}$$

para algum inteiro x. O *símbolo de Legendre*, $(\cdot/p)$, é definido da seguinte forma: se p divide a, então $(a/p) = 0$, senão

$$(a/p) = \begin{cases} +1 & \text{se } a \text{ é resíduo quadrático de } p, \\ -1 & \text{se } a \text{ não é resíduo quadrático de } p. \end{cases}$$

Os seguintes resultados são teoremas básicos de álgebra.

(a) *Metade dos inteiros* a *tais que* $1 \leq a \leq p-1$ *são resíduos quadráticos de* p.

(b) *Se* d *divide* $p-1$, *então* $x^d \equiv 1 \pmod{p}$ *tem exatamente* d *soluções.*

(c) *Para todo primo* p *vale* $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Desses três resultados, temos que o conjunto dos resíduos quadráticos de p é igual ao conjunto das soluções de

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Portanto, se p não divide a, vale que

$$(a/p) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}, \tag{5}$$

e, se p também não divide b, temos que

$$(a/p)(b/p) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} = (ab)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (ab/p). \tag{6}$$

O *grafo de Paley*, Q_p, é um dos exemplos de grafos pseudo-aleatórios mais conhecidos e usados. Ele é definido para todo primo $p \equiv 1 \pmod 4$ (existem infinitos primos dessa forma!) pondo $V(Q_p) = \mathbb{Z}_p$, o corpo finito de ordem p, e as arestas são dadas por $E(Q_p) = \{\{i,j\} \colon (i-j/p) = 1\}$. Note que da escolha de p temos, por (5), que $(-1/p) = (-1)^{(p-1)/2} = 1$ e isso quer dizer que $\{i,j\} \in E(Q_p)$ está bem definido pois

$$(i-j/p) = 1 \Leftrightarrow (i-j/p)(-1/p) = 1 \overset{(6)}{\Leftrightarrow} (j-i/p) = 1.$$

Agora, observe que $k \in V(Q_p)$ é adjacente a i, $j \in V(Q_p)$ distintos, ou não-adjacente a ambos se, e somente se, $\frac{k-i}{k-j}$ é um resíduo quadrático de p. Mas, para quaisquer um dos $(1/2)(p-1)-1$ resíduos quadráticos a, de p, diferente de 1, existe um único k tal que

$$\frac{k-i}{k-j} = 1 + \frac{j-i}{k-j} = a.$$

Assim, $S(i,j) = 1/2(p-3)$, portanto, $\mathbf{P_6}$ vale.

Terminamos esta seção com duas observações. Primeiro, que Q_p difere do grafo aleatório de ordem p e probabilidade de aresta $1/2$, $G_{p,1/2}$, no seguinte: S.W. Graham e C. Ringrose [17] provaram que o tamanho do clique máximo de Q_p, que denotamos $\omega(Q_p)$, é tão grande quanto $\log p \log\log\log p$ para infinitos valores de p, enquanto que o valor esperado de $\omega(G_{p,1/2})$ é $(1+o(1))\log p$ (apud Bollobás [3]). Segundo, relembrando o que foi afirmado na Seção 1, isto é, superficialmente o Lema de Regularidade diz que qualquer grafo pode ser decomposto em um número limitado de grafos bipartidos pseudo-aleatórios.

1.3 Variações sobre o tema. Como dissemos, a classe excepcional é um dispositivo técnico para garantir que as outras classes da partição tenham a mesma cardinalidade. De fato, podemos distribuir igualmente os vértices dessa classe entre as outras classes de modo que a ε-regularidade é preservada para um ε ligeiramente maior. Vejamos uma versão sem a classe excepcional.

COROLÁRIO 8 *Dados $0 < \varepsilon \leq 1$ e $m_0 \geq 1$, existem $n_0' = n_0'(\varepsilon, m_0)$ e $M' = M'(\varepsilon, m_0)$ tais que se $G = (V,E)$ é um grafo com pelo menos n_0' vértices, então existe uma partição $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ de V tal que, para todos $1 \leq i < j \leq k$, $\big||V_i| - |V_j|\big| \leq 1$ e o número de pares (V_i, V_j) que não são (ε, G)-regulares é no máximo $\varepsilon\binom{k}{2}$, onde $m_0 \leq k \leq M'$.*

Prova. Aplicamos o Lema de Regularidade para $\varepsilon^2/8$ e m_0 e seja $\mathcal{P}_0 = \{V_0, V_1^0, \ldots, V_k^0\}$ a partição que obtemos. Ponha $n_0' = n_0$ e $M' = M$. Sabemos que $|V_0| \le \varepsilon^2 n/8$ e que

$$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{8}\right)\frac{n}{k} \le |V_i^0| \le \frac{n}{k}, \text{ para todo } i \in [k].$$

Tome $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ a partição obtida a partir de $\mathcal{P}_0$ dividindo, o mais igualmente possível, os no máximo $\varepsilon^2 n/8$ vértices de V_0 entre as classes não-excepcionais de $\mathcal{P}_0$. Dessa forma, podemos escrever $V_i = V_i^0 \cup V_i'$, para todo $i \in [k]$, com $|V_i'| \le \varepsilon^2 n/(8k)$.

Vamos mostrar que se (V_l^0, V_j^0) é $(\varepsilon^2/8, G)$-regular, então (V_l, V_j) é (ε, G)-regular.

Para $i = j$, $l \in [k]$ distintos, seja $X_i \subseteq V_i$ tal que $|X_i| \ge \varepsilon |V_i|$. Então, podemos naturalmente escrever X_i como a união disjunta $X_i^0 \cup X_i'$. Portanto,

$$|X_i^0| = |X_i| - |X_i'| \ge \varepsilon|V_i| - |V_i'| = \varepsilon|V_i^0| - (1-\varepsilon)|V_i'| \ge \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{8}\right)\frac{n}{k}.$$

Por outro lado, $|X_i'| \le |V_i'| \le \varepsilon^2 n/(8k)$. Também, $|V_i^0| \ge (1 - (\varepsilon^2/8))n/k$. Por ora, vamos assumir a seguinte condição de continuidade

$$\begin{array}{ll} & \textit{Se } |A^0|, |B^0| \ge C \textit{ e } |A'|, |B'| \le c \le C \textit{ e se } A = A^0 \cup A' \textit{ e } B = B^0 \cup B', \\ (7) & \\ & \textit{então } |\operatorname{d}(A,B) - \operatorname{d}(A^0,B^0)| < \dfrac{3c}{C}. \end{array}$$

Para $i = j$, l temos que

$$|X_i^0| \ge \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{8}\right)\frac{n}{k} > \frac{\varepsilon^2}{8}\frac{n}{k} \ge \frac{\varepsilon^2}{8}|V_i^0|.$$

Ainda,

$$\begin{aligned} &|\operatorname{d}(V_l,V_j) - \operatorname{d}(X_l,X_j)| \le \\ &\qquad |\operatorname{d}(V_l,V_j) - \operatorname{d}(V_l^0,V_j^0)| + |\operatorname{d}(X_l^0,X_j^0) - \operatorname{d}(X_l,X_j)| + |\operatorname{d}(V_l^0,V_j^0) - \operatorname{d}(X_l^0,X_j^0)|. \end{aligned}$$

Do parágrafo anterior e de (7) tiramos que

$$|\operatorname{d}(V_l,V_j) - \operatorname{d}(X_l,X_j)| \le \frac{6\frac{\varepsilon^2}{8}\frac{n}{k}}{\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{8}\right)\frac{n}{k}} + \frac{\varepsilon^2}{8} < \varepsilon.$$

Resta provar (7). Por um lado, temos que

$$\operatorname{d}(A,B) \le \frac{\operatorname{e}(A^0,B^0) + |A^0|c + |B^0|c + c^2}{|A||B|} \le \operatorname{d}(A^0,B^0) + \frac{3c}{C},$$

e por outro, temos que

$$\mathrm{d}(A,B) \geq \frac{\mathrm{e}(A^0,B^0)}{(|A^0|+c)(|B^0|+c)} \geq \frac{\mathrm{e}(A^0,B^0)}{|A^0||B^0|}\frac{C^2}{(C+c)^2} \geq \mathrm{d}(A^0,B^0) - \frac{2c}{C}.$$

Portanto, segue (7) e está provado o corolário. ∎

Uma versão do Lema de Regularidade afirma que se colorirmos as arestas de um grafo, então podemos particioná-lo em um número limitado de classes de forma que quase todos os pares são regulares em cada cor, simultaneamente. Para tanto, defina $\mathrm{d}_\alpha(A,B)$ como a densidade das arestas de cor α entre o par (A,B).

Teorema 9 *Dados um real positivo $\varepsilon \leq 1$ e inteiros positivos r, $m_0 \geq 1$, existe $M = M(\varepsilon, m_0, r)$ tal que para toda r-coloração das arestas de um grafo G o conjunto dos vértices $V(G)$ pode ser particionado em subconjuntos $V_0, V_1, \ldots, V_k$, onde $m_0 \leq k \leq M$, tal que $|V_0| \leq \varepsilon n$, os subconjuntos restantes têm a mesma cardinalidade e no máximo $\varepsilon\binom{k}{2}$ pares (V_i, V_j), com $1 \leq i < j \leq k$, não satisfazem a seguinte condição de regularidade: para todos $X \subseteq V_i$ e $Y \subseteq V_j$ com cardinalidades $|X| \geq \varepsilon|V_i|$ e $|Y| \geq \varepsilon|V_j|$ temos*

$$|\,\mathrm{d}_\alpha(X,Y) - \mathrm{d}_\alpha(V_i,V_j)| < \varepsilon,$$

para toda cor α.

Para demonstrar esse resultado, usamos a prova original substituindo a definição de índice por

$$\mathrm{ind}(\mathcal{P}) = \frac{1}{k^2}\sum_\alpha \sum_{i,j} \mathrm{d}_\alpha(V_i,V_j)^2.$$

∎

1.4 Exemplos de aplicações.

Primeiro vejamos que muitos vértices têm graus "próximos". Sejam A e B subconjuntos disjuntos de vértices de um grafo G.

Proposição 10 *Se (A,B) é ε-regular com densidade d e $Y \subseteq B$ com $|Y| \geq \varepsilon|B|$, então*

$$|\{x \in A \colon |\Gamma(x) \cap Y| \leq (d-\varepsilon)|Y|\}| < \varepsilon|A|.$$

Prova. Seja X o conjunto dos pontos de A tais que $|\Gamma(x) \cap Y| \leq (d-\varepsilon)|Y|$. Então $\mathrm{e}(X,Y) \leq |X|(d-\varepsilon)|Y|$, portanto, $\mathrm{d}(X,Y) \leq \mathrm{d}(A,B) - \varepsilon$ e pela ε-regularidade do par $|X| < \varepsilon|A|$. ∎

Vale o seguinte resultado geral dizendo que tipicamente uma l-upla de pontos de A tem $d^l|Y|$ vizinhos em comum.

Proposição 11 *Se (A,B) é ε-regular com densidade d e $Y \subseteq B$ com $(d-\varepsilon)^{l-1}|Y| \geq \varepsilon|B|$, então*

$$\left|\left\{\{x_1,\ldots,x_l\}\colon x_i \in A \text{ e } \left|Y \cap \left(\bigcap_i \Gamma(x_i)\right)\right| \leq (d-\varepsilon)^l|Y|\right\}\right| < l\varepsilon|A|^l.$$

Prova. Por indução em $l \geq 1$. ■

Observe que as duas proposições acima valem para $\geq (d+\varepsilon)|Y|$ e $\geq (d+\varepsilon)^l|Y|$ no lugar de $\leq (d-\varepsilon)|Y|$ e $\leq (d-\varepsilon)^l|Y|$, respectivamente.

Vamos ver uma aplicação num resultado sobre existência de progressões aritméticas. Ponha $r_k(n)$ para a cardinalidade máxima de um subconjunto de $[n]$ que não contém uma progressão aritmética de k termos, que abreviamos k-PA. Pelo Teorema de Szemerédi temos que $r_k(n) = o(n)$. O caso $k = 3$ foi provado analiticamente por Roth, em 1954, usando uma adaptação de uma técnica conhecida como método de Hardy-Littlewood. Vejamos uma demonstração combinatória deste caso.

Teorema 12 *Com a notação acima*

$$r_3(n) = o(n).$$

Prova. Sejam X, Y e Z cópias disjuntas de $[3n]$ e $A \subseteq [n]$. Ponha S para o conjunto das triplas (x,y,z), com $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$ tais que

$$y - x = z - y = \frac{z-x}{2} \in A.$$

Seja $G = (V,E)$ o grafo com $9n$ vértices, $X \cup Y \cup Z$, e as arestas são os pares contidos em alguma tripla de S. Então, $\mathrm{e}(G) \geq 3|A|n$ e $E(G)$ pode ser decomposto em $\mathrm{e}(G)/3$ triângulos aresta-disjuntos, que chamaremos de triângulos canônicos.

A primeira observação é que se G contém um triângulo que não é canônico, então A contém uma 3-PA.

De fato, se x', y', z' formam um tal triângulo, onde $y' - x' \neq z' - y'$, então para $a = y' - x'$ e $b = z' - y'$ temos $a, b \in A$, pois $\{x', y'\}$ e $\{y', z'\}$ fazem parte de alguma tripla de S, e também $\frac{a+b}{2} = \frac{z'-x'}{2} \in A$, e temos uma 3-PA em A.

Agora vamos supor que $|A| = \alpha n$, para alguma constante $\alpha > 0$, e vamos provar que A deve conter uma progressão aritmética. É suficiente mostrar que o grafo G deve conter um triângulo não-canônico.

Ponha $\nu = 9n$ e $e(G) = \beta\binom{\nu}{2} > 3\alpha n^2$, onde β é uma constante fixa e independente de n. Apliquemos o Lema de Regularidade em G com $\varepsilon = \frac{\beta}{60}$ e $m_0 = \lceil \varepsilon^{-1} \rceil$.

A segunda observação é que o número de arestas não contidas em pares com densidade pelo menos $\beta/6$ é, por (2), no máximo

$$\frac{\nu^2}{2}(d + 5\varepsilon) = \frac{\nu^2}{2}\frac{\beta}{4} < \frac{\beta}{3}\binom{\nu}{2}.$$

Removendo essas arestas obtemos G'' que ainda contém um triângulo T, pois existiam $\beta\binom{\nu}{2}/3$ triângulos aresta-disjuntos em G. Ainda, as três arestas deste triângulo estão contidas em pares ε-regulares com densidade pelo menos $\beta/6$. Vamos supor que esses pares são os dados por V_1, V_2 e V_3.

A terceira observação é que, pela Proposição 10, se (V_1, V_3) e (V_2, V_3) são ε-regulares, então existem pelo menos $(1-2\varepsilon)|V_3|$ vértices $v \in V_3$, cada um ligado a pelo menos $(\beta/6-\varepsilon)|V_i|$ vértices de V_i, para $i = 1, 2$. Então, fixe algum deles, digamos v, e ponha $\Gamma_i(v)$ para o conjunto de vizinhos de v em V_i.

De $\beta/6-\varepsilon = 9\beta/60 > \varepsilon$ temos que existem pelo menos $(\beta/6-\varepsilon)|\Gamma_1||\Gamma_2| > (9\beta/60)^3|V_1||V_2|$ arestas ligando vértices de $\Gamma_1(v)$ com vértices de $\Gamma_2(v)$. Cada aresta corresponde a um triângulo contendo v. Desde que, dois triângulos canônicos não têm dois vértices comum, então existem no máximo $|V_1| = |V_2|$ triângulos canônicos contendo v.

Portanto, para n suficientemente grande, G contém um triângulo que não é canônico, então como já foi observado, A contém uma 3-PA. ∎

1.5 Sejam G um grafo, $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ uma partição do seu conjunto de vértices e $d > \varepsilon > 0$ reais. Definimos o *grafo reduzido* $R = R(\mathcal{P}, d, \varepsilon)$ pondo $V(R) = \{V_1, \ldots, V_k\}$ e $V_iV_j \in E(R)$ se, e somente se, (V_i, V_j) é (ε, G)-regular de densidade pelo menos d.

Dado um inteiro positivo t ponha $R(t)$ o grafo obtido de R substituindo cada vértice por um conjunto de t vértices e cada aresta pelo grafo bipartido completo $K^{t,t}$.

O próximo lema afirma que todo subgrafo de $R(t)$ é também subgrafo de G, dado que ε é pequeno suficiente e V_i grande suficiente, onde os valores de ε e $|V_i|$ dependem somente da densidade d e do grau máximo de H, $\Delta(H)$.

LEMA 13 *Dados reais $d > \varepsilon > 0$, um grafo R e um inteiro positivo m construa o grafo G pondo para cada vértice de R um conjunto de m pontos e substituindo cada aresta de R por um par ε-regular de densidade pelo menos d. Seja H um subgrafo de $R(t)$ com h vértices e grau máximo Δ. Ponha $\varepsilon_0 = (d-\varepsilon)^{\Delta}/(2+\Delta)$. Se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $t-1 \leq \varepsilon_0 m$, então $H \subseteq G$ e, mais que isso, o número de cópias rotuladas de H em G é maior que*

$$\Big(((d-\varepsilon)^{\Delta} - \Delta\varepsilon)m - (t-1)\Big)^h \geq (\varepsilon_0 m)^h.$$

PROVA. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $V(H) = \{v_1, \ldots, v_h\}$ e suponha que $|V(R)| = r$. Considere $H \subseteq R(t)$ e seja $h\colon V(H) \to V(R(t))$ injetora, um homomorfismo de grafos.

Podemos escrever

$$V(G) = V_1^{(G)} \cup \cdots \cup V_r^{(G)}, \text{ com } |V_i^{(G)}| = m \text{ para todo } i \in [r],$$

e, também,

$$V(R(t)) = V_1^{(R)} \cup \cdots \cup V_r^{(R)}, \text{ com } |V_i^{(R)}| = t \text{ para todo } i \in [r].$$

Vamos definir um homomorfismo injetor $g\colon V(H) \to V(G)$ indutivamente. Para todo $j \in [h]$ ponha

$$C_j(0) = V_i^{(G)}, \text{ onde } i \text{ é tal que } h(v_j) \in V_i^{(R)} \subseteq V(R(t)).$$

Dessa forma, $C_j(i)$ denota o conjunto de vértice de G candidatos a $g(v_j)$ no i-ésimo passo. Enquanto a imersão segue $C_j(i)$ vai ficando menor até o j-ésimo passo, quando $g(v_j)$ é escolhido.

Para $i \geq 1$, no i-ésimo passo escolhemos $g(v_i) \in C_i(i-1)$ tal que, para todo $j > i$ com $v_iv_j \in E(H)$, vale que

$$|\Gamma_G(g(v_i)) \cap C_j(i-1)| > (d-\varepsilon)|C_j(i-1)|. \tag{8}$$

Para todo $j > i$ fazemos a atualização

$$C_j(i) = \begin{cases} C_j(i-1) \cap \Gamma_G(g(v_i)) & \text{se } v_iv_j \in E(H), \\ C_j(i-1) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja, queremos escolher $g(v_i)$ tal que $C_j(i)$ não seja pequeno, isto é, não muito menor que $C_j(i-1)$. Porém, pela Proposição 10, a menos de $\varepsilon|C_i(i-1)|$ escolhas para $g(v_i)$, temos $|C_j(i)| \geq (d-\varepsilon)|C_j(i-1)|$ para cada j.

Para todo $j > i$, defina $d_{ij} = |\,\{l \in [i]\colon v_lv_j \in E(H)\}\,|$, ou seja, o número de vértices v_l, com $l \leq i$, que são adjacentes a v_j. Então, para todo $j > i$,

$$|C_j(i)| > (d-\varepsilon)^{d_{ij}} m \text{ se } d_{ij} > 0 \text{ e}$$
$$|C_j(i)| = m \text{ se } d_{ij} = 0.$$

Assim, para todo $j > i$, temos $|C_j(i)| > (d-\varepsilon)^{\Delta} m \geq \varepsilon m$. Então, quando escolhemos $g(v_i)$ todos os vértices de $C_i(i-1)$, menos $\Delta\varepsilon m$ deles, satisfazem (8) para todo $j > i$, e no máximo $t-1$ vértices já foram escolhidos. Conseqüentemente, temos pelo menos

$$|C_i(i-1)| - \Delta\varepsilon m - (t-1) > ((d-\varepsilon)^{\Delta} - \Delta\varepsilon)m - (t-1) \geq \varepsilon_0 m$$

escolhas para $g(v_i)$. ■

Vejamos uma demonstração do celebrado Teorema de Erdős–Stone. Lembremos que o Teorema de Erdős–Stone diz que se G_n tem pelo menos $\mathrm{e}(T^{r-1}(n)) + \gamma n^2$ arestas então o grafo G_n contém $K^r(t)$. Usaremos o Lema de Regularidade para mostrar que G tem grafo reduzido denso o suficiente para conter K^r e usaremos o Lema 13 para concluir que $K^r(t) \subseteq G$.

Prova do Teorema de Erdős–Stone. Sejam r, $t \geq 2$ (se $t = 1$ temos o Teorema de Turán) e G um grafo de ordem n e pelo menos $\mathrm{e}(T^{r-1}(n)) + \gamma n^2$ arestas. Escolha ε suficientemente pequeno, isto é, tal que

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0 = \frac{(\gamma - \varepsilon)^{rt}}{2 + rt},$$

e $\beta = 2\gamma - 4\varepsilon - d - {m_0}^{-1} > 0$ para $m_0 > \gamma^{-1}$ inteiro e $d = \gamma$.

Seja $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ a partição dada pelo Lema de Regularidade e escreva $|V_i| = m$, para todo $i \in [k]$. Assuma

$$n \geq \max\left\{\frac{(t-1)M}{(1-\varepsilon)\varepsilon_0}, n_0(\varepsilon, m_0)\right\}.$$

Sabemos que $n \geq mk$ e temos que

$$m = \frac{n - |V_0|}{k} \geq \frac{n - \varepsilon n}{M} = \frac{n(1-\varepsilon)}{M} \geq \frac{t-1}{\varepsilon_0},$$

assim, estamos nas hipóteses do Lema 13.

Consideremos o grafo reduzido $R = R(\mathcal{P}, d, \varepsilon)$. Então, basta provar que $K^r \subseteq R$ e, pelo Lema 13, teremos $K^r(t) \subseteq G$. Vamos estimar o número de arestas de R.

Sabemos que $\mathrm{e}(G) < \mathrm{e}(G'') + (d + 4\varepsilon + {m_0}^{-1})n^2/2$. Cada aresta de R corresponde a no máximo m^2 arestas de G'', portanto, temos $\mathrm{e}(G) \leq \mathrm{e}(R)m^2 + (d + 4\varepsilon + {m_0}^{-1})n^2/2$. Como $\beta > 0$ e $n \geq mk$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}(R) &\geq \left(\mathrm{e}(G) - (d + 4\varepsilon + {m_0}^{-1})\frac{n^2}{2}\right)\frac{1}{m^2} \\
&\geq \left(\frac{\mathrm{e}(G) - (d + 4\varepsilon + {m_0}^{-1})n^2/2}{m^2k^2/2}\right)\frac{1}{2}k^2 \\
&\geq \left(\frac{\mathrm{e}(G)}{n^2/2} - (d + 4\varepsilon + {m_0}^{-1})\right)\frac{1}{2}k^2 \\
&\geq \left(\frac{\mathrm{e}(T^{r-1}(n))}{\binom{n}{2}}(1 - \frac{1}{n}) + \beta\right)\frac{1}{2}k^2 \\
&> \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)\frac{1}{2}k^2,
\end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Portanto, $\mathrm{e}(R) > \mathrm{e}(T^{r-1}(k))$, logo, temos que $K^r \subseteq R$. ∎

Observe que provamos mais.

Teorema 14 *Sejam H um grafo de ordem h e $\gamma > 0$ um real. Para todo n suficientemente grande, se*

$$\mathrm{e}(G_n) > \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}\right)\binom{n}{2} + \gamma n^2,$$

então o número de cópias rotuladas de H em G_n é maior que $(\varepsilon n/M)^h$, onde $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$ e $M = M(\varepsilon)$.

Prova. Seguindo a demonstração do Teorema de Erdős-Stone temos que

$$\mathrm{e}(R) > \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \beta\right)\frac{k^2}{2},$$

portanto, pelo Corolário 6, na pág. 8, temos que $H \subseteq R$ e pelo Lema 13, o teorema. ■

Em contrapartida, temos o seguinte resultado observado por Füredi, que diz que se um grafo tem poucas cópias de um grafo fixo, então ele pode ser coberto com poucas arestas.

Teorema 15 *Para todo grafo H de ordem h e todo real $\gamma > 0$ existe $\beta = \beta(\gamma, H) > 0$ tal que se $G = G_n$ tem no máximo βn^h cópias de H, então podemos tornar G livre de H removendo no máximo γn^2 de suas arestas.*

Prova. Apliquemos o Lema de Regularidade para ε suficientemente pequeno ($\leq (d-\varepsilon)^{\Delta}/(2+\Delta)$) e $m_0 > \varepsilon^{-1}$. Tome $\beta = (\varepsilon/M)^h$ e considere o grafo $G'' = G''(\mathcal{P}, \gamma, \varepsilon)$ o grafo obtido de G removendo as arestas que não interessam.

Se $H \subseteq G''$, então $H \subseteq R = R(\mathcal{P}, \gamma, \varepsilon)$. Mas, pelo Lema 13 o número de cópias rotuladas de H em G é maior que

$$(\varepsilon m)^h > \left(\varepsilon \frac{n}{k}\right)^h \geq \left(\frac{\varepsilon n}{M}\right)^h = \beta n^h.$$

Portanto, G'' não contém H. Resta observar que de G para G'' jogamos fora no máximo γn^2 arestas. ■

2 Algumas aplicações clássicas

2.1 Um *Problema extremal do tipo Ramsey-Turán* tem a seguinte formulação: sejam $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_r\}$ uma família de grafos, $c\colon E(G_n) \to [r]$ uma r-coloração das arestas de G_n tal que para todo $i \in [r]$ não temos um L_i monocromático da cor i e $\alpha(G_n) \leq m$. Nestas condições, qual é o número máximo de arestas que G_n pode ter?

Uma das primeiras aplicações do Lema de Regularidade é o seguinte resultado do tipo Ramsey-Turán demonstrado por Szemerédi [32].

Teorema 16 *Para todo inteiro positivo n, se G de ordem n não contém K^4 e $\alpha(G) = o(n)$, então $\mathrm{e}(G) < n^2/8 + o(n^2)$.*

Prova. Para $\varepsilon > 0$ fixo, tome $m_0 > \varepsilon^{-1}$ e suponha, para $M = M(\varepsilon, m_0)$ dado pelo Lema de Regularidade, que

$$\mathrm{e}(G_n) > (1/8 + 6\varepsilon)\, n^2, \quad \alpha(G_n) \leq \frac{\varepsilon^2}{M} n - 1 \quad \text{e} \quad n \geq \frac{M}{\varepsilon}.$$

Vamos mostrar que $K^4 \subseteq G$.

Seja $\mathcal{P}$ uma partição (ε, k, G)-regular dos vértices de G dada pelo Lema de Regularidade. Assuma $|V_i| = m$, para todo $i \in [k]$. Note que $\alpha(G) < \varepsilon^2 m$. Tome $d = 2\varepsilon$ e considere o grafo reduzido $R = R(\mathcal{P}, d, \varepsilon)$. A demonstração segue em dois casos.

Primeiro, suponha que $\mathrm{e}(R) > k^2/4$. Pelo Teorema de Turán o grafo R contém um triângulo, digamos V_1V_2, V_2V_3 e V_1V_3. Sabemos que pelo menos uma fração $1 - 2\varepsilon$ dos vértices de V_1 têm pelo menos $(d-\varepsilon)m$ vizinhos em V_2 e em V_3. Fixe um tal $v \in V_1$ e ponha X seus vizinhos em V_2 e Y seus vizinhos em V_3.

Não é difícil provar que todo grafo J de grau médio $t(J) > \alpha(J)$ contém triângulo.

Agora, $|X|$, $|Y| \geq \varepsilon m$, portanto, $|\,\mathrm{d}(X,Y) - d| < \varepsilon$, donde tiramos que $\mathrm{e}(X,Y) \geq \varepsilon^3 m^2$. Usamos esse fato e o parágrafo anterior, lembrando que $\alpha(G) < \varepsilon^2 m$, para concluir que $G[X \cup Y]$ contém triângulo e, portanto, $G[V_1 \cup V_2 \cup V_3]$ contém K^4. Com isso terminamos o primeiro caso.

Agora, podemos supor que $\mathrm{e}(R) \leq k^2/4$. Tome $G'' = G''(\mathcal{P}, 2\varepsilon, \varepsilon)$, o grafo obtido a partir de G não considerando as arestas descritas em (i)–(iv) na página 4. Por (2) temos que $\mathrm{e}(G'') > (1/8 + \varepsilon)n^2$. Então,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathrm{d}(V_i, V_j) = \frac{\mathrm{e}(G'')}{m^2} \geq \mathrm{e}(G'')(n/k)^{-2} > (1/8 + \varepsilon)k^2,$$

e no máximo $k^2/4$ dessas densidades são não-nulas, portanto, a média dessas densidades não-nulas é maior que $\mu = 1/2 + 4\varepsilon$. Logo, existe um par com densidade maior que μ. Sem perda de generalidade, assumimos que $\mathrm{d}(V_1, V_2) > \mu$.

Ponha $H = G[V_1 \cup V_2]$. Vamos mostrar que H contém K^4.

Pelo menos $(1-\varepsilon)m$ vértices de V_1 têm, cada um, mais que $(d-\varepsilon)|V_2| = (1/2 + 3\varepsilon)m$ vizinhos em V_2. Escolha dois deles, digamos x, $y \in V_1$, adjacentes. Isso pode ser feito pois podemos tomar ε pequeno o suficiente para que $(1-\varepsilon)m > 6\varepsilon m$.

Então $|\Gamma(x) \cap \Gamma(y) \cap V_2| > 6\varepsilon m > \varepsilon^2 m$, portanto, existem z, $w \in \Gamma(x) \cap \Gamma(y)$ adjacentes. Dessa forma, $K^4 \subseteq H \subseteq G$. ■

Em 1976, Bollobás e Erdős [5] mostraram que existe uma seqüência de grafos $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $K^4 \not\subseteq H_n$, $\alpha(H_n) = o(n)$ e $\mathrm{e}(H_n) > n^2/8 - o(n^2)$, ou seja, a constante $1/8$ é a melhor possível. O problema de determinar

$$\max\left\{\mathrm{e}(G_n) \colon K^p \not\subseteq G_n \text{ e } \alpha(G_n) = o(n)\right\},$$

foi completamente resolvido, usando o Lema de Regularidade, por Erdős, Hajnal, Sós e Szemerédi [8] em 1983.

2.2 O próximo resultado, o Teorema de Ruzsa-Szemerédi, também foi uma das primeiras aplicações do Lema de Regularidade. Dizemos que um emparelhamento M em G é *induzido* se as únicas arestas de G ligando vértices de M são aquelas de M.

Teorema 17 *Se G_n é a união de n emparelhamentos induzidos, então* $\mathrm{e}(G_n) = o(n^2)$.

Prova. Vamos provar a seguinte afirmação: Seja $0 < \varepsilon < 1$ arbitrário e $n \geq 2M/\varepsilon^2$, onde $M = M(\varepsilon, m_0 = 4\varepsilon^{-1})$ é dado pelo Lema de Regularidade. Se para algum inteiro positivo k o grafo G_n é a união de k emparelhamentos induzidos, então $\mathrm{e}(G_n) < 5\varepsilon n^2 + k\varepsilon n$.

Tome $d = 2\varepsilon$ e considere o grafo $G'' = G''(\mathcal{P}, d, \varepsilon)$, onde $\mathcal{P} = \{V_0, \ldots, V_k\}$ é uma partição (ε, k, G_n)-regular dada pelo Lema de Regularidade. Vejamos que todo emparelhamento induzido em G'' contém no máximo εn arestas.

Tome $I \subseteq G''$ um emparelhamento induzido em G'', ponha $U = V(I)$, $U_i = U \cap V_i$ e $\Lambda = \{i \in [k] \colon |U_i| > \varepsilon |V_i|\}$.

Também, ponha $L = \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$ e $S = U \setminus L$. Então

$$|S| \leq \sum_{i \notin \Lambda} |U_i| \leq \sum_{i \notin \Lambda} \varepsilon \frac{n}{k} \leq \varepsilon n.$$

Se $|U| > 2\varepsilon n$, então $|L| > |U|/2$ e, portanto, existem u, $v \in L$ adjacentes. Suponha, sem perda de generalidade, que $u \in V_1$ e $v \in V_2$. Então $\mathrm{d}(V_1, V_2) > 2\varepsilon$ e como $|U_i| \geq \varepsilon |V_i|$, $i = 1, 2$, temos que $\mathrm{d}(U_1, U_2) > \varepsilon$, ou seja, existem mais que $\varepsilon |U_1||U_2| \geq \min\{|U_1|, |U_2|\}$ arestas ligando vértices de U_1 a U_2, contradizendo o fato de I ser induzido.

Logo, $|U| \leq 2\varepsilon n$ donde segue que I contém no máximo εn arestas. Portanto, como $\mathrm{e}(G'') > \mathrm{e}(G_n) - 5\varepsilon n^2$ e G_n é a união de k emparelhamentos induzidos, segue que $\mathrm{e}(G_n) < 5\varepsilon n^2 + k\varepsilon n$. ∎

Esse teorema que acabamos de provar é, na verdarde, equivalente ao que é conhecido como Teorema de Ruzsa-Szemerédi [29] provado em 1978.

Teorema 18 *Se H é um hipergrafo 3-uniforme sobre n vértices contendo cn^2 (hiper)arestas então existem 6 pontos que geram 3 ou mais arestas, para todo $n \geq n_0(c)$.*

Prova. Observe que o Teorema 15 no caso de triângulos diz que dado um real positivo ε existe um real positivo δ tal que para todo $G = G_n$ com no máximo δn^3 triângulos, existe $E' \subseteq E(G)$ com $|E'| \leq \varepsilon n^2$ tal que a remoção de E' de G o torna livre de triângulos.

Suponha H é um hipergrafo tal que quaisquer 6 vértices geram menos que 3 arestas. Vamos mostrar que $\mathrm{e}(H) = o(n^2)$.

Construa um grafo G da seguinte forma: para cada $\{x, y, z\} \in E(H)$ ponha $\{x, y\}$, $\{y, z\}$ e $\{x, z\}$ em $E(G)$. Então $\mathrm{e}(G) = 3\,\mathrm{e}(H)$ e como seis vértices geram no máximo duas triplas de H temos que o número de triângulos em G é o máximo $\binom{n}{2} = o(n^3)$, ou seja, para todo $\delta > 0$ o número de triângulos em G_n é menor que δn^3.

Portanto, existe E' como enunciado acima, ou seja, tal que $G \setminus E'$ é livre de triângulos. Como os únicos triângulos de G são aqueles gerados por alguma aresta de H temos que $\mathrm{e}(H) < \varepsilon n^2$, para todo real positivo ε. ∎

O Teorema de Ruzsa-Szemerédi tem a seguinte conexão com o Teorema de Roth sobre 3-PA. Seja $f(k, n)$ o número máximo de arestas que pode conter um grafo de ordem n que é uma união de k

emparelhamentos induzidos, ou seja,

$$f(k,n) = \max\left\{ \mathrm{e}(G_n)\colon G_n = \bigcup_{i\in[k]} M_i, \text{ onde } M_i \text{ é emparelhamento induzido}\right\}.$$

Então,

$$r_3(n) \leq \frac{f(n,5n)}{n}.$$

De fato, tome $a_1, \ldots, a_{r_3(n)}$ uma seqüência de inteiros positivos que não contém uma 3-PA. Defina o grafo bipartido $G = ([2n] \cup [3n], E)$, onde

$$E = \{(x+a_i, x+2a_i)\colon x \in [n] \text{ e } i \in [r_3(n)]\}.$$

Então $|E| = r_3(n)n$ e $G = \bigcup_x \{(x+a_i, x+2a_i)\colon i \in [r_3(n)]\}$. Resta observar que cada fator da união é um emparelhamento induzido em G. Portanto, $f(n,5n) \geq r_3(n)n$. A desigualdade $f(k,n) < 5\varepsilon n^2 + k\varepsilon n$, para todo n suficientemente grande, prova que $r_3(n) = o(n)$.

O Teorema de Ruzsa-Szemerédi pode ser formulado da seguinte maneira: Seja $\mathcal{H}_{k,t}$ a família dos hipergrafos r-uniforme com k vértices e t arestas. Defina $\mathrm{ex}(n, \mathcal{H}_{k,t})$ como o número máximo de arestas que um hipergrafo r-uniforme com n vértices pode ter para não conter uma cópia de algum membro de $\mathcal{H}_{k,t}$. Então, existe $c > 0$ tal que

$$cnr_3(n) < \mathrm{ex}(n, \mathcal{H}_{6,3}) = o(n^2).$$

Frankl e Rödl sugerem que algo similar deve funcionar para provar que $r_k(n) = o(n)$, onde para algum problema extremal sobre hipergrafos PE(k) temos cota superior $o(n^l)$ e cota inferior $cn^{l-1}r_k(n)$. Eles verificaram que $r_4(n) = o(n)$ usando esta técnica.

2.3 Vejamos uma aplicação em Teoria de Ramsey. Denote por $\mathrm{R}(H)$ o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo grafo de ordem n, ou o grafo contém uma cópia de H ou o seu complemento contém uma cópia de H ou, equivalentemente, o menor natural n tal que qualquer 2-coloração das arestas do grafo completo K^n contém uma cópia monocromática de H.

O seguinte resultado é devido a Chvátal, Rödl, Szemerédi e Trotter [7], de 1983. Ele diz que o número de Ramsey, $\mathrm{R}(H)$, de um grafo H com grau limitado é linear no tamanho do grafo.

TEOREMA 19 *Para todo inteiro positivo Δ existe uma constante $c = c(\Delta)$ tal que todo grafo H com grau máximo $\Delta(H) \leq \Delta$ vale que*

$$\mathrm{R}(H) \leq c|H|.$$

Prova. Aplicamos o Lema de Regularidade para $m_0 = \mathrm{R}(K^{\Delta+1})$ e ε tal que

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0 = \frac{(d-\varepsilon)^\Delta}{\Delta+2} \quad \text{e} \quad \varepsilon < \frac{1}{m_0-1} - \frac{1}{r},$$

para $d = 1/2$ e para todo $r \geq m_0$.

Tome

$$c = \frac{M}{\varepsilon_0(1-\varepsilon)},$$

onde $M = M(\varepsilon, m_0)$. Escreva $|H| = h$ e considere G de ordem $n \geq \max\{ch, n_0(\varepsilon, m_0)\}$. Vamos mostrar que G ou o seu complemento, $\overline{G}$, contém uma cópia de H.

Seja $\mathcal{P} = \{V_0, \ldots, V_k\}$ uma partição (ε, k, G)-regular dada pelo Lema de Regularidade e assuma que $|V_i| = m$ para todo $i \in [k]$. Então,

$$m = \frac{n - |V_0|}{k} \geq \frac{n - \varepsilon n}{M} \geq ch\frac{1-\varepsilon}{M} = \frac{h}{\varepsilon_0}. \tag{9}$$

Tomando o grafo reduzido $R = R(\mathcal{P}, 0, \varepsilon)$ temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}(R) &> \binom{k}{2} - \varepsilon\binom{k}{2} \\
&= \left(1 - \frac{1}{k} - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{k}\right)\frac{k^2}{2} \\
&> \left(1 - \frac{1}{k} - \varepsilon\right)\frac{k^2}{2} \\
&> \left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{m_0-1} + \frac{1}{k}\right)\frac{k^2}{2} \\
&= \left(1 - \frac{1}{m_0-1}\right)\frac{k^2}{2},
\end{aligned}$$

portanto, pelo Teorema de Turán, $K^{m_0} \subseteq R$.

Defina uma 2-coloração das arestas de R por

$$c(V_iV_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathrm{d}(V_i, V_j) \geq 1/2, \\ 1 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todos i, $j \in [k]$ distintos.

Denote por R^0 e R^1 os subgrafos induzidos em R pelas arestas de cor 0 e cor 1, respectivamente. Então, esses são os grafos reduzidos para os paramêtros $\mathcal{P}, 1/2, \varepsilon$ em G e em $\overline{G}$, respectivamente.

Pela definição $m_0 = \mathrm{R}(K^{\Delta+1})$ temos $K^t \subseteq K^{m_0}$ monocromático, onde $t = \chi(H) \leq \Delta+1$, portanto, ou $H \subseteq R^0(h)$ ou $H \subseteq R^1(h)$. Logo, por (9) e pela escolha de ε podemos usar o Lema 13 para concluir que $H \subseteq G$ ou $H \subseteq \overline{G}$. ∎

2.4 Por toda esta seção γ, δ, σ, ε e β denotam reais positivos menores que 1.

Diferente do que vimos até agora, os resultados desta seção dizem respeito a subgrafos induzidos. Neste caso, existe uma versão para o grafo reduzido, o *grafo reduzido induzido* e uma versão "induzida" do Lema 13 que diz que todo subgrafo induzido do grafo reduzido induzido é subgrafo induzido do grafo original. O grafo reduzido induzido $I(\mathcal{P}, \beta, \varepsilon)$ é definido como na Seção 1.5, página 16, com a condição extra que $0 < \beta < 1/2$ e para todos V_i, $V_j \in \mathcal{P}$ temos que $\beta < \mathrm{d}(V_i, V_j) < 1 - \beta$.

Vejamos, sem nos aprofundarmos nos detalhes, que um subgrafo induzido de I é um subgrafo induzido do grafo original G. Sejam G um grafo, $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ uma partição do seu conjunto de vértices e β, $\varepsilon > 0$ reais. Seja H um subgrafo induzido de $I = I(\mathcal{P}, \beta, \varepsilon)$ com conjunto de vértices $V(H) = \{V_{l_1}, \ldots, V_{l_h}\}$. Agora fazemos como no Lema 13, vamos escolher $v_1, \ldots, v_h \in V(G)$ tal que $G[\{v_i\}_{i=1}^h]$ é uma cópia induzida de H em G.

Ponha $C_j(0) = V_{l_j}$ o conjunto de vértices candidatos a v_j. No i-ésimo passo escolhemos $v_i \in C_i(i-1)$ tal que para todo $j > i$ temos

$$|\Gamma_G(v_i) \cap C_j(i-1)| > (\beta - \varepsilon)|C_j(i-1)| \text{ se } V_{l_i}V_{l_j} \in E(H) \text{ e}$$
$$|\Gamma_G(v_i) \cap C_j(i-1)| < (\beta + \varepsilon)|C_j(i-1)| \text{ se } V_{l_i}V_{l_j} \notin E(H),$$

e fazemos a atualização $C_j(i) = C_j(i-1) \cap \Gamma_G(v_i)$.

Dessa forma, v_i é adjacente a mais que $(\beta - \varepsilon)|C_j(i-1)|$ ou não é adjacente a mais que $(1 - (\beta + \varepsilon))|C_j(i-1)| \geq (\beta - \varepsilon)|C_j(i-1)|$ vértices de $C_j(i-1)$ dependendo se $V_{l_i}V_{l_j}$ é ou não uma aresta de H.

Dizemos que um grafo G tem a propriedade $(k, m, \beta, \varepsilon)$, para $0 < \beta < 1/2$, k e m inteiros, se seu conjunto de vértices $V(G)$ pode ser particionado em k subconjuntos $V_1, \ldots, V_k$ de mesma cardinalidade m tal que todo par (V_i, V_j) são ε-regulares com densidade maior que β e menor que $1 - \beta$, para todo $1 \leq i < j \leq k$. Rödl [27] provou o seguinte lema.

Lema 20 *Dados $0 < \beta < 1/2$ real e $k > 0$ inteiro existem $\varepsilon_k = \varepsilon(k, \beta)$ e $m_k = m(k, \beta)$ tal que todo grafo G com a propriedade $(k, m, \beta, \varepsilon_k)$, com $m \geq m_k$, contém todos os subgrafos de ordem k como subgrafo induzido.*

Prova (Esboço). A prova é por indução em k, para todo β. Para $k = 2$ tome $m_k = \lfloor 1/\beta \rfloor \geq 2$ e $\varepsilon_k = \beta$.

Suponha que o resultado vale para todo inteiro positivo $\leq k$ e para todo $0 < \beta < 1/2$. Dados $k+1$ e β tome $\varepsilon_k = \varepsilon(k, \beta/2)$ e $m_k = m(k, \beta/2)$, para os quais vale o lema, e defina

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} = &\quad \varepsilon(k+1, \beta) = \min\left\{\tfrac{1}{2(k+1)}, \tfrac{\beta}{2}\varepsilon_k\right\}, \text{ e} \\ m_{k+1} = &\quad m(k+1, \beta) = \max\left\{2\left\lceil\tfrac{m_k}{\beta}\right\rceil, k+1\right\}. \end{aligned}$$

Seja G um grafo com a propriedade $(k+1, m, \beta, \varepsilon_{k+1})$, onde $m \geq m_{k+1}$. Escolha um vértice $u_{k+1} \in V_{k+1}$ com mais que $(\mathrm{d}(V_{k+1}, V_j) - \varepsilon_{k+1})|V_j|$ e menos que $(\mathrm{d}(V_{k+1}, V_j) + \varepsilon_{k+1})|V_j|$ vizinhos em V_j, para todo $j \in [k]$.

Agora, para todo $j \in [k]$ escolha $B_j \subseteq V_j$ tal que

(i) $|B_j| = \lceil \beta m/2 \rceil \geq m_k$,

(ii) se $\{v_j, v_{k+1}\} \in E(H)$ então $\{u, u_{k+1}\} \in E(V_j, V_{k+1})$, para todo $u \in B_j$ e, se $\{v_j, v_{k+1}\} \notin E(H)$ então $\{u, u_{k+1}\} \notin E(V_j, V_{k+1})$, para todo $u \in B_j$.

Queremos aplicar a hipótese de indução em $B_1, \ldots, B_k$. Vamos mostrar que os pares (B_i, B_j) são (ε_k, G)-regulares. Tomemos $X_i \subseteq B_i$ e $X_j \subseteq B_j$. Temos que $\min\{|X_i|, |X_j|\} \geq \varepsilon_k |B_i| \geq 2\varepsilon_{k+1}/\beta \lceil \beta m/2 \rceil \geq \varepsilon_{k+1} m$, e como (V_i, V_j) é ε_{k+1}-regular temos

$$|\,\mathrm{d}(X_i, X_j) - \mathrm{d}(B_i, B_j) \leq |\,\mathrm{d}(X_i, X_j) - \mathrm{d}(V_i, V_j)| + |\,\mathrm{d}(V_i, V_j) - \mathrm{d}(B_i, B_j)| < 2\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k.$$

Logo, por indução, existem $u_1, \ldots, u_k$, com $u_i \in B_i$ para todo $i \in [k]$, tal que $\{u_i, u_j\} \in E(G)$ se, e somente se, $\{v_i, v_j\} \in E(H)$, portanto, $G[u_1, \ldots, u_{k+1}]$ é isomorfo a H. ∎

Em 1979, Erdős [11] perguntou se, dado um inteiro positivo k, existe δ tal que todo grafo G de ordem n suficientemente grande e tal que para todo $S \subseteq V(G)$ com $|S| \geq n/2$ vale que

$$\left(\frac{1}{2} - \delta\right) \binom{|S|}{2} < \mathrm{e}(G[S]) < \left(\frac{1}{2} + \delta\right) \binom{|S|}{2},$$

então G contém K^k.

Dizemos que um grafo G tem a prorpiedade (γ, δ, σ) se para todo $S \subseteq V(G)$ com $|S| \geq \gamma |V(G)|$ temos

$$(\sigma - \delta) \binom{|S|}{2} < \mathrm{e}(G[S]) < (\sigma + \delta) \binom{|S|}{2}.$$

Em 1986, Rödl [27] provou o seguinte resultado que responde na afirmativa a pergunta de Erdős. De fato, ele provou um resultado mais forte que aquele conjecturado.

Teorema 21 *Para todo inteiro positivo k e para todos σ e γ, existe δ e existe um inteiro positivo n_0 tal que todo grafo de ordem $n \geq n_0$ com a propriedade (γ, δ, σ) contém todo grafo de ordem k como subgrafo induzido.*

Prova (Esboço). Observe que se o grafo G_n tem a propriedade (γ, δ, σ) então o seu complemento satisfaz $(\gamma, \delta, 1 - \sigma)$. Também, como podemos considerar os complementos dos grafos em questão, vamos supor $\sigma \leq 1/2$.

Suponha

$$k > \max\left\{\frac{4}{\sigma}, \frac{4}{4 - 7\sigma}, \frac{3}{1 - \gamma}\right\}. \tag{10}$$

Ponha $m_0 = k$ e

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{m_0}, \varepsilon(k,\sigma/2), 1-\frac{m_0\gamma}{m_0-3}\right\}$$
$$\delta = \min\left\{\frac{\sigma}{4}-\frac{1}{m_0}, 1-\frac{7\sigma}{4}-\frac{1}{m_0}, \frac{\sigma}{24}(1-\varepsilon)^2\frac{1}{M^2}\right\}$$
$$N_1 = \max\left\{\left\lceil\frac{M}{1-\varepsilon}\right\rceil m(k,\sigma/2), n_0(\varepsilon, m_0)\right\},$$

onde $M = M(\varepsilon, m_0)$ e $n_0(\varepsilon, m_0)$ são dados pelo Lema de Regularidade. Por (10) temos que ε e δ são positivos.

Seja G_n, para $n \geq N_1$, com a propriedade (γ, δ, σ) e uma partição (ε, t, G_n)-regular $\mathcal{P} = \{V_0, \ldots, V_t\}$ dada pelo Lema de Regularidade. Prova-se que

$$\frac{\sigma}{2} \leq \mathrm{d}(V_i, V_j) \leq 1-\frac{\sigma}{2} \text{ para todos } i,\, j \in [t]. \tag{11}$$

Donde deduzimos o teorema da seguinte forma: o número de arestas do grafo reduzido $R(\mathcal{P}, d, \varepsilon)$ para $d = 0$ é maior que $(1-\varepsilon)\binom{t}{2}$ e, pelo Teorema de Turán, podemos conluir que $K^{m_0} \subseteq R$.

Sejam $V_{s_1}, \ldots, V_{s_{m_0}}$ pares 2-a-2 (ε, G_n)-regulares. Temos $|V_{s_i}| \geq N_1(1-\varepsilon)/M \geq m(k,\sigma/2)$ e $\varepsilon \leq \varepsilon(k,\sigma/2)$. Logo, G_n satisfaz a propriedade $(k, m(k,\beta), \beta, \varepsilon(k,\beta))$ para $\beta = \sigma/2$. ■

Rödl também provou o seguinte resultado.

Teorema 22 *Para todo inteiro positivo k e para todos σ e δ com $\delta < \sigma < 1-\delta$, existe γ e um inteiro positivo n_0 tal que todo grafo de ordem $n \geq n_0$ com a propriedade (γ, δ, σ) contém todos os grafos de ordem k como subgrafo induzido.*

Prova. Antes de demonstrarmos esse teorema, observe que se

$$\delta_1 = \max\left\{\sigma+\delta-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\sigma+\delta\right\}$$

então, se G_n satisfaz (γ, δ, σ) também satisfaz $(\gamma, \delta_1, 1/2)$ e podemos assumir que $0 < \delta < 1/2$. Portanto, é suficiente provarmos o teorema para $\sigma = 1/2$ e para todo k e todo $\delta < 1/2$.

Defina $\beta = 1/2 - \delta$ e assuma que $k \geq 3/\beta$. Seja m_0 o menor inteiro tal que qualquer três coloração das arestas do K^{m_0} induz algum K^k monocromático. Ponha

$$\varepsilon = \min\left\{{m_0}^{-1}, \varepsilon_k\left(k, \frac{1}{2}\beta m\right)\right\}$$

e sejam M_0, n_0 e a partição $V_0, \ldots, V_t$ de $V(G)$ dados pelo Lema de Regularidade, onde G é um grafo com

$$N_0 = \max\left\{n_0, \frac{M_0 m_k}{1-\varepsilon}\right\}$$

vértices e com a propriedade (γ, δ, σ) para

$$\gamma = \frac{k(1-\varepsilon)}{M_0}.$$

Se R é o grafo reduzido para $d = 0$ temos $\mathrm{e}(R) > (1-\varepsilon)\binom{t}{2} > (1 - \frac{1}{m_0 - 1})\binom{t}{2}$, portanto, pelo Teorema de Turán temos que $K^{m_0} \subseteq R$, ou seja, existem classes $V_{s_0}, \ldots, V_{s_{m_0}}$ tal que todo par (V_{s_i}, V_{s_j}) é (ε, G)-regular.

Para tal K^{m_0}, considere $\varphi \colon E(K^{m_0}) \to [3]$ uma 3-coloração de suas arestas dada por

(i) $\varphi(\{i,j\}) = 1$ se $\mathrm{d}(V_{s_i}, V_{s_j}) \leq \beta/2$;

(ii) $\varphi(\{i,j\}) = 2$ se $\beta/2 < \mathrm{d}(V_{s_i}, V_{s_j}) < 1 - \beta/2$; e

(iii) $\varphi(\{i,j\}) = 3$ se $\mathrm{d}(V_{s_i}, V_{s_j}) \geq 1 - \beta/2$.

Vejamos que não pode ocorrer K^k monocromático da cor 1 ou 3. Primeiro, para cor 1. Se $G' = G[\bigcup_i V_{s'_i}]$ temos, onde $V_{s'_i}$ são os vértices do K^k monocromático e pondo $m = |V_i|$,

$$\mathrm{d}(G') \leq \frac{\binom{t}{2} m^2 \frac{\beta}{2} + \binom{m}{2} t}{\binom{tm}{2}} < \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{k} < \frac{1}{2} - \delta.$$

Para a cor 3 temos

$$\mathrm{d}(G') \geq \frac{\binom{t}{2} m^2 (1 - \frac{\beta}{2})}{\binom{tm}{2}} > 1 - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{k} < \frac{1}{2} + \delta.$$

Como $|V(G')| \geq \frac{k}{M}|V(G)|(1-\varepsilon) = \gamma |V(G)|$ contradizendo o fato de G ter a propriedade $(\gamma, \delta, 1/2)$.

Para a cor 2 temos que G satisfaz a propriedade $(k, m, \beta/2, \varepsilon_k)$, para $m \geq m_k$. De fato, para todos i e j temos

$$|V_{s'_i}| = |V_{s'_j}| \geq (1-\varepsilon)\frac{N_0}{t} \geq (1-\varepsilon)\frac{N_0}{M_0} \geq \frac{1-\varepsilon}{M_0}\frac{M_0 m_k}{1-\varepsilon} = m_k$$

e $\mathrm{d}(V_{s'_i}, V_{s'_j}) \in (\beta/2, 1-\beta/2)$ com esses pares ε_k-regulares por definição. ■

3 O caso esparso e grafos Ramsey-minimais

Para uma seqüência de grafos com $\mathrm{e}(G_n) = o(n^2)$ o Lema de Regularidade não fornece informação alguma. Ele aproxima G_n pelo grafo vazio pois o número de arestas que desprezamos é quadrático no número de vértices. Nesta seção veremos uma variante do Lema de Regularidade para grafos esparsos.

Fixe um grafo $G = (V, E)$. Para uma partição $\mathcal{Q}$ de V dizemos que G é $(\mathcal{Q}, \eta)$-*uniforme*, para $0 < \eta \leq 1$ fixo, se para algum $p \in [0,1]$ e para todo A, $B \subseteq V$ disjuntos quando $\mathcal{Q}$ é trivial ou pertencentes a partes diferentes da partição se $\mathcal{Q}$ não é trivial, e tais que $|A|$, $|B| \geq \eta|V|$, temos a seguinte condição de pseudo-aleatoriedade

$$\big|\,\mathrm{e}_G(A,B) - p|A||B|\big| \leq \eta p|A||B|.$$

Se $\mathcal{Q}$ é trivial e $\eta > 0$ está fixo, o grafo aleatório $G_{n,p}$ é um exemplo de grafo $(\mathcal{Q},\eta)$-uniforme; neste caso de partição trivial dizemos simplesmente η-uniforme. Um grafo aleatório $G_{n,p}$ com $p = p(n) = C/n$ é η-uniforme quase-sempre, para C dependendo somente de η.

Para um subgrafo gerador H de G definimos a *densidade relativa de H em G* no par (A,B) de subconjuntos disjuntos de V por

$$\mathrm{d}_{H,G}(A,B) = \begin{cases} \mathrm{e}_H(A,B)/\,\mathrm{e}_G(A,B) & \text{se } \mathrm{e}_G(A,B) > 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{12}$$

Dizemos que o par (A,B) de subconjuntos disjuntos de V é (ε,H,G)-*regular* se para todo $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ com $|X| \geq \varepsilon|A|$ e $|Y| \geq \varepsilon|B|$ temos

$$|\,\mathrm{d}_{H,G}(A,B) - \mathrm{d}_{H,G}(X,Y)| < \varepsilon.$$

Dizemos que uma partição (ε,k)-equipotente $V_0, V_1, \ldots, V_k$ dos vértices de G é (ε,H,G)-regular se o número de pares (V_i,V_j), para $1 \leq i < j \leq k$, que não são (ε,H,G)-regulares é no máximo $\varepsilon\binom{k}{2}$. O seguinte resultado foi provado por Kohayakawa em 1991 (veja [22]), e independentemente, por Rödl.

Teorema 23 *Dados um real positivo $\varepsilon \leq 1$ e inteiros m_0, $l \geq 1$, existem constantes positivas $\eta = \eta(\varepsilon, m_0, l)$ e $M = M(\varepsilon, m_0, l) \geq m_0$ tais que para todo grafo $(\mathcal{Q},\eta)$-uniforme G, onde $\mathcal{Q}$ é uma l-partição de $V(G)$, se $H \subseteq G$ é um subgrafo gerador de G, então existe uma $(k+1)$-partição (ε,H,G)-regular de $V(G)$ que refina $\mathcal{Q}$, com $m_0 \leq k \leq M$.*

O papel da partição $\mathcal{Q}$ é unicamente de controlar a partição dada pelo teorema no caso de grafos l-partidos. Note que essa versão implica o caso denso se tomamos $G = K^n$; por esse motivo dedicamos a Seção 3.2 a uma demonstração desse caso esparso, incluindo sua versão para o Lema 3.

Vejamos uma variante do caso esparso. Sejam $G = (V,E)$ fixo e $0 < \eta \leq 1$ e $0 < p \leq 1$. Dizemos que G é *η-superiormente-uniforme com densidade p* se para todos A, $B \subseteq V$ disjuntos com $|A|$, $|B| \geq \eta|V|$ temos

$$\mathrm{e}_G(A,B) \leq (1+\eta)p|A||B|.$$

Definimos a *p-densidade* entre A e B em G por

$$\mathrm{d}_{G,p}(A,B) = \frac{\mathrm{e}_G(A,B)}{p|A||B|}$$

e escrevemos $\mathrm{d}_p(A,B)$ se G é subentendido. Note a relação entre a definição de p-densidade com a de densidade de G relativa à $G_{n,p}$ (eq. (12)).

Para $0 < \varepsilon \leq 1$ e A, $B \subseteq V$ disjuntos não-vazios dizemos que (A, B) é (ε, p)-*regular* se para todos $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ com $|X| \geq \varepsilon|A|$ e $|Y| \geq \varepsilon|B|$ temos

$$\left| \mathrm{d}_p(A, B) - \mathrm{d}_p(X, Y) \right| < \varepsilon.$$

Uma partição (ε, k)-equipotente $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ do conjunto de vértices V é (ε, p)-regular se $|V_0| \leq \varepsilon|V|$ e no máximo $\varepsilon\binom{k}{2}$ pares (V_i, V_j), para $1 \leq i < j \leq k$, não são (ε, p)-regulares.

Temos então a seguinte versão esparsa que é útil nos casos em que o grafo esparso não é subgrafo de algum grafo η-uniforme fixo.

TEOREMA 24 *Dados $0 < \varepsilon \leq 1$ e $m_0 \geq 1$ existem constantes positivas $\eta = \eta(\varepsilon, m_0)$ e $M = M(\varepsilon, m_0) \geq m_0$ tais que qualquer grafo η-superiormente-uniforme G com densidade $0 < p \leq 1$ admite uma $(k+1)$-partição (ε, p)-regular de $V(G)$, com $m_0 \leq k \leq M$.* ■

3.1 O caso esparso em Teoria Extremal de Grafos. Considere a seguinte generalização do problema do subgrafo proibido. Sejam G e H grafos e defina $\mathrm{ex}(G, H)$ como o número máximo de arestas que um subgrafo de G pode ter para que H não ocorra como subgrafo. Formalmente,

$$\mathrm{ex}(G, H) = \max\left\{\mathrm{e}(J) \colon H \not\subseteq J \subseteq G\right\}.$$

Dessa forma, $\mathrm{ex}(n, H) = \mathrm{ex}(K^n, H)$.

No caso de subgrafos extremais de grafos aleatórios, isto é, quando $G = G_{n,p}$, o resultado mais simples conhecido é o seguinte, de Babai, Simonovits e Spencer [2], de 1990.

TEOREMA 25 *Se F_n é um subgrafo de $G_{n,1/2}$ com o máximo possível de arestas sem conter K^3 e B_n é um subgrafo bipartido de $G_{n,1/2}$ com o máximo possível de arestas, então $\mathrm{e}(F_n) = \mathrm{e}(B_n)$. Ainda, F_n é bipartido quase-sempre.* ■

Também é sabido (de [2]) que se H é 3-cromático, fixado $0 < p < 1$, e $F_n \subseteq G_{n,p}$ é livre de H com o número máximo de arestas, então

$$\mathrm{e}(B_n) \leq \mathrm{e}(F_n) \leq \mathrm{e}(B_n) + o(n^2)$$

quase-sempre. Ainda, removendo $o(n^2)$ arestas de F_n podemos torná-lo bipartido. Esse resultado generaliza-se para grafos r-cromáticos.

Em 1997, Kohayakawa, Łuczak e Rödl [21] conjecturaram

CONJECTURA 26 *Para todo grafo não-vazio H de ordem pelo menos 3 e para todo $0 < p = p(n) \leq 1$ tal que $pn^{1/m_2(H)} \to \infty$ quando $n \to \infty$, onde*

$$m_2(H) = \max\left\{\frac{\mathrm{e}(J) - 1}{|J| - 2} \colon J \subseteq H,\ |J| \geq 3\right\},$$

temos que

$$\text{ex}(G_{n,p}, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \text{e}(G_{n,p}) \tag{13}$$

vale quase-sempre.

Os casos $H = K^3$ e $H = C^4$ foram, essencialmente, provados por Frankl e Rödl [13] e Füredi [15], respectivamente.

Em [21], Kohayakawa, Łuczak e Rödl provaram o caso $H = K^4$ e observaram que uma aplicação simples do Teorema 24 prova a conjectura quando H é uma floresta. O caso $H = C^l$ foi provado por Haxell, Kohayakawa e Łuczak [18, 19]. De fato, nesses casos foram verificados a Conjectura 27 abaixo

Vejamos como a versão esparsa do Lema de Regularidade, o Teorema 23, se aplica no caso dessa conjectura. Seja J um subgrafo do grafo η-uniforme $G_{n,p}$. Pelo Teorema 23, temos uma partição $(\varepsilon, J, G_{n,p})$-regular $\mathcal{P}$ de $V(G_{n,p})$.

Se sabemos que para algum $\gamma > 0$ temos

$$\text{e}(J) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \gamma\right) \text{e}(G_{n,p}).$$

então é fácil encontrarmos $|H|$ partes de $\mathcal{P}$ que "formam uma cópia" de H e no caso p constante, podemos mostrar que essas partes geram uma cópia de fato de H (cf. Lema 13). Infelizmente, esse não é o caso quando $p \to 0$ conforme $n \to \infty$; aqui muito "trabalho extra" precisou ser feito nos resultados parciais conhecidos [18, 19, 20, 21].

Vejamos uma conjectura (de [21]) que implica (13). Sejam m um inteiro positivo e H um grafo com $V(H) = \{v_1, \ldots, v_h\}$, para $h \geq 3$, $0 < p = p(m) \leq 1$ e seja $\mathbf{V}_m = (V_i)_{i=1}^h$ uma família de conjuntos 2-a-2 disjuntos, cada um de cardinalidade m. Dados reais $0 < \varepsilon \leq 1$ e $0 < \gamma \leq 1$ e um inteiro positivo T dizemos que um grafo h-partido F com partição $V(F) = V_1 \cup \cdots \cup V_h$ e com T arestas é um

$$(\varepsilon, \gamma, H; \mathbf{V}_m, T)\text{-grafo}$$

se, para todo $1 \leq i < j \leq h$, todo par (V_i, V_j) é (ε, p)-regular e se $\gamma \leq \text{d}_{F,p}(V_i, V_j) \leq 1$ sempre que $v_i v_j \in E(H)$.

Conjectura 27 *Dados $0 < \alpha \leq 1$ e $0 < \gamma \leq 1$ existem constantes $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \gamma) > 0$ e $C = C(\alpha, \gamma)$ tais que se $p = p(m) \geq Cm^{-1/m_2(H)}$, então o número de $(\varepsilon, \gamma, H; \mathbf{V}_m, T)$-grafos livres de H é no máximo*

$$\alpha^T \binom{\binom{h}{2} m^2}{T}$$

para todo T e todo m suficientemente grande.

Vamos assumir a Conjectura 27 e vamos provar a Conjectura 26.

Seja $\delta > 0$ dado. Vamos mostrar que existe um K positivo tal que se $p = Kn^{-1/m_2(H)}$ então

$$\mathrm{ex}(G_{n,p}, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \delta\right)\frac{n^2p}{2},$$

vale quase-sempre.

Tome

$$\alpha = \frac{\gamma}{2\mathrm{e}\binom{h}{2}}$$

e $0 < \gamma < \delta/5$. Então, pela Conjectura 26 existem $\varepsilon > 0$ e $C > 0$ tais que, quaisquer que sejam m e T, o número de $(\varepsilon, \gamma, H; \mathbf{V}_m, T)$-grafos H-livres é no máximo

$$\alpha^T \binom{\binom{h}{2}m^2}{T}$$

se $p \geq Cm^{-1/m_2(H)}$. Podemos assumir que $\varepsilon < \delta/5$.

Agora, sejam η e M_0 dados pelo Lema 24. Assuma que $\eta < \delta < 5$ e tome $K = (M_0)^{1/m_2(H)}C$.

Seja G um grafo η-superiormente-uniforme com densidade $p = Kn^{-1/m_2(H)}$ de ordem n suficientemente grande. Então, todo subgrafo de G com pelo menos

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \delta\right)\frac{n^2p}{2}$$

arestas contém um subgrafo isomorfo àlgum $(\varepsilon, \gamma, H; \mathrm{V}_m, T)$-grafo, onde $n/M_0 \leq m \leq n/m_0$, para todo T e para $m_0 = \max\{5/\delta, k_1\}$, onde k_1 é tal que

$$\mathrm{ex}(G_{n,p}, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \varrho\right)\binom{k}{2}$$

para $\varrho < \delta/5$ e todo $k \geq k_1$.

De fato, seja $F \subseteq G$ com pelo menos $(1 - 1/(\chi(H)-1) + \delta)n^2p/2$ arestas. Claramente, F é η-superiormente-uniforme com densidade p.

Seja $\mathcal{P} = (V_i)_{i=0}^k$ a partição (ε, p)-regular (ε, k)-equipotente dada pelo Lema 24. Ponha $m = |V_i|$, para todo $i \in [k]$. Seja $R = R(\mathcal{P}, \gamma, \varepsilon)$ o grafo reduzido de F.

Se

$$\mathrm{e}(R) > \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \varrho\right)\binom{k}{2}$$

então F contêm um $(\varepsilon, \gamma, H; \mathbf{V}_m, T)$-subgrafo para algum T. Agora, suponha que $\mathrm{e}(R) < (1 -$

$1/(\chi(H)-1)+\varrho)\binom{k}{2}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}(F) &\leq \left(\frac{\varepsilon^2 n^2}{2} + \varepsilon n^2 + k\binom{k}{2} + \varepsilon\binom{k}{2}\left(\frac{n}{k}\right)^2 + \gamma\binom{k}{2}\left(\frac{n}{k}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}+\varrho\right)\binom{k}{2}\right)(1+\eta)p \\
&< \left(5\varepsilon + \frac{1}{k} + \gamma + \left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}+\varrho\right) + \eta\right)\frac{n^2 p}{2} \\
&= \left(1-\frac{1}{\chi(H)-1} + \varrho + \eta + \gamma + 5\varepsilon + \frac{1}{k}\right)\frac{n^2 p}{2} \\
&< \left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}+\delta\right)\frac{n^2 p}{2}.
\end{aligned}$$

uma contradição.

Portanto, todo subgrafo de G com pelo menos $(1-1/(\chi(H)-1)+\delta)n^2p/2$ arestas contém algum $(\varepsilon,\gamma,H;\mathbf{V}_m,T)$-subgrafo.

Observe que não é difícil provar que o grafo aleatório $G_{n,p}$ é η-superiormente-uniforme quase-sempre. Dessa forma, resta provar que para quaisquer inteiros positivos m e T, com $n/M_0 \leq m \leq n/m_0$, um $(\varepsilon,\gamma,H;\mathbf{V}_m,T)$-subgrafo de $G_{n,p}$ contêm H quase-certamente.

Como $p(m) = Km^{-1/m_2(H)} \geq Cm^{-1/m_2(H)}$, podemos usar a Conjectura 26. Qualquer $(\varepsilon,\gamma,H;\mathbf{V}_m,T)$-grafo tem pelo menos $\mathrm{e}(H)\gamma p m^2$ arestas. Fixe $T \geq \mathrm{e}(H)\gamma p m^2$ e fixe m, com $n/M_0 \leq m \leq n/m_0$.

Então, o número esperado de $(\varepsilon,\gamma,H;\mathbf{V}_m,T)$-subgrafos de $G_{n,p}$ livres de H é no máximo

$$n^{hm}p^T\alpha^T\binom{\binom{h}{2}m^2}{T} \leq n^{hm}\left(\frac{p\alpha\mathrm{e}\binom{h}{2}m^2}{T}\right)^T < n^{hm}\left(\frac{\alpha\mathrm{e}\binom{h}{2}}{\mathrm{e}(H)\gamma}\right)^T = n^{hm}\left(\frac{1}{2}\right)^T = o(1),$$

que, somando sobre todo m e todo T, ainda temos que o número esperado de $(\varepsilon,\gamma,H;\mathbf{V}_m,T)$-subgrafos de $G_{n,p}$ livres de H é $o(1)$. O resultado segue da desigualdade de Markov. Portanto temos que a Conjectura 26 implica a Conjectura 27.

3.2 Uma demonstração do caso esparso do Lema de Regularidade. Se $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$ são partições equipotentes de V, então dizemos que $\mathcal{P}_1$ *refina* $\mathcal{P}_0$ se toda classe não-excepcional de $\mathcal{P}_1$ está contida em alguma classe não-excepcional de $\mathcal{P}_0$. Se $\mathcal{P}_0$ é uma partição arbitrária, então $\mathcal{P}_1$ *refina* $\mathcal{P}_0$ se toda classe não-excepcional de $\mathcal{P}_1$ está contida em alguma classe de $\mathcal{P}_0$.

Começamos pelo lema abaixo que é uma forma defectiva da desigualdade de Cauchy-Schwarz e que é importante na demonstração do Lema de Regularidade.

LEMA 28 *Sejam $d_1,\ldots,d_n$ reais. Então para todo inteiro não-negativo $m < n$*

$$\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2 + \frac{mn}{n-m}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} d_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2. \tag{14}$$

Em particular, se

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} d_i = \alpha\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i,$$

então

$$\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 \geq \frac{1}{n}\left(1+(\alpha-1)^2\frac{m}{n-m}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2. \tag{15}$$

Prova. Ponha $S_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$ e $Q_n = \sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$. Então

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \frac{S_n}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left({d_i}^2 - 2d_i\frac{S_n}{n} + \frac{{S_n}^2}{n^2}\right) = Q_n - \frac{{S_n}^2}{n}, \tag{16}$$

portanto,

$$Q_n - Q_m = \sum_{i=m+1}^{n} {d_i}^2 \geq \frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=m+1}^{n} d_i\right)^2 = \frac{(S_n - S_m)^2}{n-m}.$$

Então

$$\begin{aligned} Q_n = Q_m + (Q_n - Q_m) &\geq \frac{{S_m}^2}{m} + \frac{(S_n - S_m)^2}{n-m} \\ &= \frac{1}{n}{S_n}^2 + \frac{nm}{n-m}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{S_m}{m}\right)^2. \end{aligned}$$

e demonstramos (14). Agora, provar (15) é fácil. Observe que (16) é a desigualdade usual de Cauchy-Schwarz. ■

Fixe $G = (V, E)$ e $\mathcal{Q} = \{U_1, \ldots, U_l\}$ uma l-partição de V. Assuma que G é $(\mathcal{Q}, \eta)$-uniforme para algum $0 < \eta \leq 1$. Seja $p = p(G)$ tal que, para todos A, $B \subset V$ tais que A e B são subconjuntos de partes distintas de $\mathcal{Q}$, ou disjuntos se $\mathcal{Q}$ é trivial, e $|A|$, $|B| \geq \eta|V|$ vale que

$$\big|e_G(A, B) - p|A||B|\big| \leq \eta p|A||B|.$$

Vejamos um resultado de continuidade sobre $d_{H,G}$ e $d^2_{H,G}$.

Lema 29 *Fixe $0 < \delta \leq 10^{-2}$. Sejam A, $B \subset V$ tais que A e B são subconjuntos de partes distintas de $\mathcal{Q}$, ou disjuntos se $\mathcal{Q}$ é trivial, com $\delta|A|$, $\delta|B| \geq \eta|V|$. Se $X \subset A$ e $Y \subset B$, $|X| \geq (1-\delta)|A|$ e $|Y| \geq (1-\delta)|B|$, então*

(i) $|d_{H,G}(X, Y) - d_{H,G}(A, B)| \leq 5\delta$,

(ii) $|d_{H,G}(X, Y)^2 - d_{H,G}(A, B)^2| \leq 9\delta$.

Prova. Vamos provar (i). Observe que $\eta \leq \delta$, então

$$
\begin{aligned}
d_{H,G}(X,Y) \geq \frac{\mathrm{e}_H(X,Y)}{\mathrm{e}_G(X,Y)} \geq & \frac{\mathrm{e}_H(A,B) - 2(1+\eta)p\delta|A||B|}{\mathrm{e}_G(A,B)} \\
\geq & d_{H,G}(A,B) - 2\delta\frac{1+\eta}{1-\eta} \geq d_{H,G}(A,B) - 3\delta.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
d_{H,G}(X,Y) \leq \frac{\mathrm{e}_H(A,B)}{\mathrm{e}_G(X,Y)} \leq & \frac{\mathrm{e}_H(A,B)}{(1-\eta)p|X||Y|} \\
\leq & \frac{\mathrm{e}_H(A,B)}{(1-\eta)p(1-\delta)^2|A||B|} \leq \frac{1+\eta}{(1-\eta)(1-\delta)^2} d_{H,G}(A,B) \\
\leq & d_{H,G}(A,B) + 5\delta,
\end{aligned}
$$

portanto temos (i). A prova de (ii) é similar. ∎

Fixe uma constante $0 < \varepsilon \leq 1/2$ e um subgrafo gerador $H \subset G$. Seja $\mathcal{P}_0$ uma $(m+1)$-partição equipotente de V que refina $\mathcal{Q}$, com $4^m \geq \varepsilon^{-5}$. Assumimos que $\eta \leq \eta_0 = \eta_0(m) = 1/m4^{m+1}$ e que $n = |V| \geq n_0 = n_0(m) = m4^{1+2m}$.

Definimos uma partição equipotente $\mathcal{P}_1$ de V a partir de $\mathcal{P}_0$ da seguinte forma. Para cada par (ε, H, G)-irregular $(V_s^{(0)}, V_t^{(0)})$ de classes de $\mathcal{P}_0$, com $1 \leq s < t \leq m$, escolhemos $X = X(s,t) \subset V_s^{(0)}$, $Y = Y(s,t) \subset V_t^{(0)}$ que atestam a irregularidade do par, isto é, tais que $|X|$, $|Y| \geq \varepsilon|V_s^{(0)}| = \varepsilon|V_t^{(0)}|$, e $|d_{H,G}(X,Y) - d_{H,G}(V_s^{(0)}, V_t^{(0)})| \geq \varepsilon$.

Fixado $1 \leq s \leq m$, os conjuntos $X(s,t)$ em

$$\{X = X(s,t) \subset V_s^{(0)} \colon 1 \leq t \leq m \text{ e } (V_s^{(0)}, V_t^{(0)}) \text{ não é } (\varepsilon, H, G)\text{-regular}\}$$

definem um partição natural de $V_s^{(0)}$ em no máximo 2^{m-1} partes. Vamos chamar essas partes de *átomos* de $V_s^{(0)}$. Tome $q = 4^m$ e ponha $c = \lfloor |V_s^{(0)}|/q \rfloor$, para qualquer $1 \leq s \leq m$. Note que $c \geq \eta n$. Trivialmente, podemos escolher uma partição $\mathcal{P}_1$ de V que refina $\mathcal{P}_0$ tal que

(i) $V_0^{(0)}$ é uma classe de $\mathcal{P}_1$,

(ii) para todo $1 \leq s \leq m$, todo átomo $A \subset V_s^{(0)}$ contém exatamente $\lfloor |A|/c \rfloor$ classes de $\mathcal{P}_1$,

(iii) para todo $1 \leq s \leq m$, o conjunto $V_s^{(0)}$ contém exatamente $q = \lfloor |V_s^{(0)}|/c \rfloor$ classes de $\mathcal{P}_1$.

Observe que $q^2 = 4^{2m} \leq |V_s^{(0)}| = cq + r$, com $r < c$, portanto, $\left\lfloor |V_s^{(0)}|/c \right\rfloor = q = 4^m$. Então, podemos assumir que $\mathcal{P}_1$ tem exatamente $m4^m$ classes não-excepcionais e, é fácil provar o seguinte lema.

Lema 30 *A partição* $\mathcal{P}_1 = \{V_0^{(1)}, \dots, V_{m_1}^{(1)}\}$ *definida a partir de* $\mathcal{P}_0$ *como acima é equipotente e refina* $\mathcal{P}_0$*, com* $m_1 = mq = m4^m$ *e* $|V_0^{(1)}| \le |V_0^{(0)}| + n4^{-m}$. ■

No que segue, para $1 \le s \le m$, sejam $V_s(i)$, para $1 \le i \le q$, as classes de $\mathcal{P}_1$ que estão contidas na classe $V_s^{(0)}$ de $\mathcal{P}_0$. Também, para todo $1 \le s \le m$, pomos $C_s = \bigcup_{1 \le i \le q} V_s(i)$.

Fixe $1 \le s \le m$. Note que $|C_s| \ge |V_s^{(0)}| - (c-1) \ge |V_s^{(0)}| - q^{-1}|V_s^{(0)}| \ge |V_s^{(0)}|(1 - q^{-1})$. Como $q^{-1} \le 10^{-2}$ e $q^{-1}|V_s^{(0)}| \ge c \ge \eta n$, pelo Lema 29 temos,

$$|d_{H,G}(C_s, C_t) - d_{H,G}(V_s^{(0)}, V_t^{(0)})| \le 5q^{-1} \tag{17}$$

e

$$|d_{H,G}(C_s, C_t)^2 - d_{H,G}(V_s^{(0)}, V_t^{(0)})^2| \le 9q^{-1}, \tag{18}$$

para todo $1 \le s < t \le m$.

Seguindo a idéia da prova no caso denso, definimos o *índice* $\mathrm{ind}(\mathcal{R})$ de uma partição equipotente $\mathcal{R} = \{V_0, \dots, V_r\}$ de V por

$$\mathrm{ind}(\mathcal{R}) = \frac{2}{r^2} \sum_{1 \le i < j \le r} d_{H,G}(V_i, V_j)^2,$$

e observe que $0 \le \mathrm{ind}(\mathcal{R}) < 1$. Os próximos lemas mostram que para $\mathcal{P}_1$ definido como acima temos que $\mathrm{ind}(\mathcal{P}_1) \ge \mathrm{ind}(\mathcal{P}_0) + \varepsilon^5/100$. A prova do primeiro lema é baseada na desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Lema 31 *Suponha* $1 \le s < t \le m$. *Então*

$$\frac{1}{q^2} \sum_{i,\,j=1}^{q} d_{H,G}(V_s(i), V_t(j))^2 \ge d_{H,G}(V_s^{(0)}, V_t^{(0)})^2 - \frac{\varepsilon^5}{100}.$$

Prova. Seja $(V_s^{(0)}, V_t^{(0)})$ um par de conjuntos de $\mathcal{P}_0$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q^2} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} d_{H,G}(V_s(i), V_t(j)) &= \frac{1}{q^2} \sum_{i,j} \frac{\mathrm{e}_H(V_s(i), V_t(j))}{\mathrm{e}_G(V_s(i), V_t(j))} \\
&\ge \sum_{i,j} \frac{\mathrm{e}_G(V_s(i), V_t(j))}{(1+\eta) q^2 p |V_s(i)||V_t(j)|} = \frac{\mathrm{e}_H(C_s, C_t)}{(1+\eta) p |C_s||C_t|} \\
&\ge \frac{1-\eta}{1+\eta} d_{H,G}(C_s, C_t) \ge d_{H,G}(C_s, C_t) - 2\eta.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{1}{q^2}\sum_{i,j} d_{H,G}(V_s(i),V_t(j))^2 \geq d_{H,G}(C_s,C_t)^2 - 4\eta,$$

e, por (18), temos

$$d_{H,G}(C_s,C_t)^2 \geq d_{H,G}(V_s^{(0)},V_t^{(0)})^2 - \frac{9}{q},$$

e o lema segue de $9q^{-1}+4\eta \leq \varepsilon^5/100$. ■

A desigualdade no Lema 31 pode ser melhorada se $(V_s^{(0)},V_t^{(0)})$ é um par (ε,H,G)-irregular. Formalizamos isso no seguinte lema, que é provado usando a forma defectiva de Cauchy-Schwarz (Lema 28).

LEMA 32 *Seja* $1\leq s<t\leq m$ *tais que* $(V_s^{(0)},V_t^{(0)})$ *não é* (ε,H,G)*-regular. Então*

$$\frac{1}{q^2}\sum_{i,j=1}^{q} d_{H,G}(V_s(i),V_t(j))^2 \geq d_{H,G}(V_s^{(0)},V_t^{(0)})^2 + \frac{\varepsilon^4}{40} - \frac{\varepsilon^5}{100}.$$

PROVA. Sejam $X=X(s,t)\subseteq V_s^{(0)}$ e $Y=Y(s,t)\subseteq V_t^{(0)}$ como definido acima e sejam $X^*\subseteq X$ e $Y^*\subseteq Y$ tais que cada um é uma união de classes de $\mathcal{P}_1$ e maximal com esssa propriedade.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$X^* = \bigcup_{i=1}^{q_s} V_s(i) \quad \text{e} \quad Y^* = \bigcup_{j=1}^{q_t} V_t(j).$$

Da maximalidade que assumimos temos que $|X^*|\geq |X| - 2^{m-1}(c-1) \geq |X|(1-2^{m-1}c/|X|) \geq |X|(1-2^{m-1}/q\varepsilon) = |X|(1-1/\varepsilon 2^{m+1})$. Da mesma forma, $|Y^*|\geq |Y|(1-1/\varepsilon 2^{m+1})$. Também, note que $1/\varepsilon 2^{m+1}\leq 10^{-2}$ e que $|X|/\varepsilon 2^{m+1}$, $|Y|/\varepsilon 2^{m+1}\geq \eta n$.

Pelo Lema 29, temos

$$|d_{H,G}(X^*,Y^*) - d_{H,G}(X,Y)| \leq \frac{5}{\varepsilon 2^{m+1}},$$

e sabemos, de (17), que

$$|d_{H,G}(C_s,C_t) - d_{H,G}(V_s^{(0)},V_t^{(0)})| \leq 5q^{-1}.$$

Desde que $|d_{H,G}(X,Y) - d_{H,G}(V_s^{(0)},V_t^{(0)})| \geq \varepsilon$ e $5q^{-1}+5/\varepsilon 2^{m+1}\leq \varepsilon/2$, temos

$$|d_{H,G}(X^*,Y^*) - d_{H,G}(C_s,C_t)| \geq \varepsilon/2. \tag{19}$$

Ponha $d_{ij} = d_{H,G}(V_s(i),V_t(j))$, para todo $i\in[q]$. Na prova do lema anterior verificamos que

$$\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} d_{ij} = \frac{1-\eta}{1+\eta}q^2 d_{H,G}(C_s,C_t) \geq (1-2\eta)q^2 d_{H,G}(C_s,C_t).$$

Da mesma forma,

$$\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} d_{ij} \le (1+3\eta)q^2 d_{H,G}(C_s,C_t);$$

$$\sum_{i=1}^{q_s}\sum_{j=1}^{q_t} d_{ij} \ge (1-2\eta)q_s q_t d_{H,G}(X^*,Y^*) \text{ e}$$

$$\sum_{i=1}^{q_s}\sum_{j=1}^{q_t} d_{ij} \le (1+3\eta)q_s q_t d_{H,G}(X^*,Y^*).$$

Note que $q_s m = |X^*| \ge |X| - 2^{m-1}c \ge \varepsilon|V_s^{(0)}| - 2^{m-1}c \ge eqc - 2^{m-1}c$, então $q_s \ge eq - 2^{m-1} \ge eq/2$. Da mesma forma, $q_t \ge eq/2$.

Ponha $\rho = q_s q_t q^{-2} \ge \varepsilon^4/2$ e $d_{s,t}^C = d_{H,G}(C_s,C_t)$. Por (19), temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{q_s}\sum_{j=1}^{q_t} d_{ij} \ge & \frac{1-2\eta}{1+3\eta}\frac{q_s q_t}{q^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{2{d_{s,t}^C}^2}\right)\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} d_{ij}\\ \ge & \rho\left(1+\frac{\varepsilon}{3{d_{s,t}^C}^2}\right)\sum_{j=1}^{q} d_{ij},\end{aligned}$$

ou senão, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{q_s}\sum_{j=1}^{q_t} d_{ij} \le & \frac{1-2\eta}{1+3\eta}\frac{q_s q_t}{q^2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2{d_{s,t}^C}^2}\right)\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} d_{ij}\\ \le & \rho\left(1-\frac{\varepsilon}{3{d_{s,t}^C}^2}\right)\sum_{j=1}^{q} d_{ij}.\end{aligned}$$

Neste ponto, usamos a forma defectiva da desigualdade de Cauchy-Schwarz para concluir que

$$\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} d_{ij}^2 \ge q^2\left({d_{s,t}^C}^2 + \frac{\varepsilon^2\rho}{10} - 4\eta\right),$$

portanto,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q^2}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} d_{H,G}(V_s(i),V_t(j))^2\\ &\qquad \ge d_{H,G}(C_s,C_t)^2 + \frac{\varepsilon^2\rho}{10} - 4\eta\\ &\qquad \ge d_{H,G}(V_s^{(0)},V_t^{(0)})^2 + \frac{\varepsilon^4}{40} - (9\eta^{-1}+4\eta)\\ &\qquad \ge d_{H,G}(V_s^{(0)},V_t^{(0)}) + \frac{\varepsilon^4}{40} - \frac{\varepsilon^5}{100},\end{aligned}$$

e está provado o lema. ■

O seguinte resultado, que segue dos Lemas 31 e 32, é o correspondente do Lema 3 para o caso esparso.

Lema 33 *Suponha $m \geq 1$ e $0 < \varepsilon \leq 1/2$ são tais que $4^m \geq 1800\varepsilon^{-5}$. Seja $G = G_n$ um grafo $(\mathcal{Q}, \eta)$-uniforme de ordem $n \geq n_0 = n_0(m) = m4^{2m+1}$, onde $\mathcal{Q}$ é uma partição de $V(G)$ em l classes, e assuma que $\eta \leq \eta_0 = \eta_0(m) = 1/m4^{m+1}$. Seja $H \subset G$ um subgrafo gerador de G. If $\mathcal{P} = \{V_0, \ldots, V_m\}$ é uma partição equipotente (ε, H, G)-irregular de $V(G)$ que refina $\mathcal{Q}$, então existe uma partição $\mathcal{P}_1 = \{V_0', \ldots, V_{m_1}'\}$ equipotente de $V(G)$ tal que*

(i) $\mathcal{P}_1$ *refina* $\mathcal{P}$,

(ii) $m_1 = m4^m$,

(iii) $|V_0'| \leq |V_0| + n4^{-m}$, *e*

(iv) $\mathrm{ind}(\mathcal{P}_1) \geq \mathrm{ind}(\mathcal{P}) + \varepsilon^5/100$.

Prova. Sejam $\mathcal{P}$ como descrito no lema e $\mathcal{P}_1 = \left\{V_0', \ldots, V_{m_1}'\right\}$ o refinamento construído a partir de $\mathcal{P}$ como descrito nesta seção ($V_i' = V_i^{(1)}$). Vamos mostrar que $\mathcal{P}_1$ satisfaz (i)–(iv).

Pelo Lema 30, só precisamos verificar (iv). Pelos Lemas 31 e 32, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}(\mathcal{P}_1) &= \frac{2}{m^2q^2}\sum_{i=1}^{q}\sum_{i=1}^{q} d_{H,G}(V_i', V_j')^2 \\
&\geq \frac{2}{m^2}\sum_{1\leq s<t\leq m}\frac{1}{q^2}\sum_{i,j} d_{H,G}(V_s(i), V_t(j))^2 \\
&\geq \frac{2}{m^2}\left(\sum_{1\leq s<t\leq m}\left(d_{H,G}(V_s, V_t)^2 - \frac{\varepsilon^5}{100}\right) + \varepsilon\binom{m}{2}\frac{\varepsilon^4}{40}\right) \\
&\geq \mathrm{ind}(\mathcal{P}) - \frac{\varepsilon^5}{100} + \frac{\varepsilon^5}{50} \\
&\geq \mathrm{ind}(\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon^5}{100},
\end{aligned}$$

e está provado o "coração" do Lema de Regularidade. ■

Prova do Teorema 23. Seja $G = G_n$ um grafo $(\mathcal{Q}, \eta)$-uniforme, $\mathcal{Q} = \{U_1, \ldots, U_l\}$, e $H \subseteq G$ um subgrafo gerador. Assuma $n \geq M$, e $\varepsilon \leq 1/2$. Sejam $m_0 \geq 1$ e $l \geq 1$ inteiros dados.

Tome $s \geq 1$ tal que $4^{s/4l} \geq 1800\varepsilon^{-5}$, $s \geq \max\{2m_0, 3l/\varepsilon\}$ e $\varepsilon 4^{s-1} \geq 1$. Defina $f(0) = s$ e, indutivamente, $f(t) = f(t-1)4^{f(t-1)}$.

Agora, tome $t_0 = \lfloor 100\varepsilon^{-5} \rfloor$ e $N = \max\{n_0 f(t) \colon 0 \leq t \leq t_0\} = f(t_0)^{2f(t_0)+1}$, $M_0 = \max\{6l/\varepsilon, N\}$ e $\eta = \eta(\varepsilon, k_0, l) = \min\{\eta_0 f(t) \colon 0 \leq t \leq t_0\} = (1/4) f(t_0 + 1) > 0$.

Também, seja T o conjunto dos inteiros $t \geq 0$ tais que existe uma $(k+1)$-partição $\mathcal{P}_t = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ de $V(G)$ tal que

(i) $\mathcal{P}_t$ refina $\mathcal{Q}$,

(ii) $s/4l \leq k \leq f(t)$,

(iii) $\mathrm{ind}(\mathcal{P}_t) \geq t\varepsilon^5/100$, e

(iv) $|V_0| \leq \varepsilon n(1 - 2^{-t+1})$.

Tal partição existe para $t = 0$: tome $c = \lceil n/s \rceil$ e $\mathcal{R}$ a partição de $V(G)$ em blocos de cardinalidade c, exceto possivelmente um que terá cardinalidade no máximo $c - 1$ e tal que cada U_i contém $\lfloor |U_i|/c \rfloor$ blocos de $\mathcal{R}$. Agrupando os no máximo l blocos de $\mathcal{R}$ de cardinalidade no máximo $c-1$ em V_0 temos *(iv)* $|V_0| \leq l(c-1) < lc < l\lceil n\varepsilon/(3l) \rceil \leq n\varepsilon/2$, pois $n \geq M \geq 6l/\varepsilon$. Claramente, *(i)* e *(iii)* valem. Vamos verificar *(ii)*.

Temos $m \leq n/c \leq s = f(0)$ e sabemos que existe $i \in [l]$ tal que $|U_i| \geq n/l$, portanto,

$$m \geq \left\lfloor \frac{|V_i|}{c} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n/l}{\lceil n/s \rceil} \right\rfloor \geq \frac{1}{2}\frac{n/l}{n/s} = \frac{s}{4l}.$$

Se uma partição $\mathcal{P}_t$ existe, então $t \leq t_0 = \lfloor 100\varepsilon^{-5} \rfloor$, pois $\mathrm{ind}(\mathcal{P}_t) \geq 1$. Considere t o maior inteiro para o qual $\mathcal{P}_t$ existe. Afirmamos que $\mathcal{P}_t$ é (ε, H, G)-regular: caso contrário, o lema anterior implica a existência de $\mathcal{P}_{t+1}$, contra a maximalidade de t. ■

3.3 Grafos Ramsey-minimais. Dados grafos G e H_i, para $1 \leq i \leq r$, escrevemos $G \to (H_1, \ldots, H_r)$ se para qualquer coloração $c \colon E(G) \to [r]$ das arestas de G existe uma cópia de H_i em G monocramática da cor i, para algum $i \in [r]$. Neste caso, dizemos que G é *Ramsey* com relação à $(H_i)_{i \in [r]}$.

Por exemplo, $K^{3,7} \to (C^4, C^4)$. De fato, considere uma coloração qualquer das arestas do $K^{3,7}$ com duas cores, digamos branca e preta. Seja T a parte do $K^{3,7}$ com três vértices. Podemos supor que nos vértices distintos x, $y \in T$ incidem 4 arestas pretas cada e eles têm um vizinho comum, isto é, $|\Gamma(x) \cap \Gamma(y)| = 1$.

Seja $z \neq x$, y vértice de T. Se em z incidem três arestas pretas temos um C^4 monocromático da cor preta, portanto, podemos supor que em z incidem pelo menos 5 arestas brancas. Mas neste

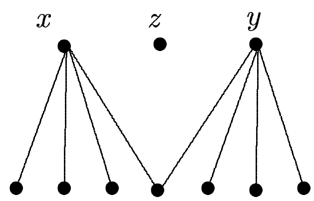

Figura 1: $K^{3,7} \to (C^4, C^4)$

caso também aparece algum C^4 monocromático da cor branca pois em x e em y incidem três arestas brancas cada.

Dizemos que G é *Ramsey-crítico* com relação a r-upla de grafos $(H_i)_{i\in[r]}$ se $G \to (H_i)_{i\in[r]}$ e para toda aresta $e \in E(G)$ temos $G - \{e\} \not\to (H_i)_{i\in[r]}$. Dizemos que a r-upla $(H_i)_{i\in[r]}$ é *Ramsey-finita* ou *Ramsey-infinita* se o conjunto dos grafos Ramsey-críticos com relação a tal r-upla for finito ou infinito, respectivamente.

Na prova do próximo resultado usamos dois fatos básicos da Teoria dos Grafos. O primeiro é que todo grafo G contém um subgrafo H com grau mínimo pelo menos $\chi(G) - 1$. O segundo é que se T é uma árvore, então todo grafo G de grau mínimo pelo menos $|T| - 1$ contém T. Abaixo, demonstramos esses fatos.

PROPOSIÇÃO 34 *Os vértices de uma árvore T podem ser enumerados, digamos $v_1, \ldots, v_n$, de forma que todo v_i, para $i \geq 2$, tem um único vizinho em $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$.*

PROVA. Escolha v_1 arbitrariamente. Escolhidos $v_1, \ldots, v_i$, com $i < n$, tome $v \in T \setminus \{v_1, \ldots, v_i\}$ e considere o $v - v_1$ caminho em T. Ponha v_{i+1} o último vértice desse caminho em $T \setminus \{v_1, \ldots, v_i\}$. ■

PROPOSIÇÃO 35 *Se T é uma árvore e G qualquer grafo com grau mínimo pelo menos $|T| - 1$, então G contém um subgrafo isomorfo à T.*

PROVA. Enumere os vértices de T de acordo com a proposição anterior e construa uma cópia isomorfa a T em G indutivamente. ■

PROPOSIÇÃO 36 *Todo grafo G tem um subgrafo de grau mínimo pelo menos $\chi(G) - 1$.*

PROVA. Tome uma enumeração $v_1, \ldots, v_n$ dos vértices de G tal que v_n é o vértice que realiza o grau mínimo de G; tome v_{n-1} o vértice que realiza o grau mínimo de $G \setminus \{v_n\}$; e asim por diante.

Colorimos os vértices de G com um algoritmo guloso: a partir de v_1, a cor do vértice v_i é a menor cor disponível. Assim, $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) \colon H \subseteq G\}$, que prova a proposição. ■

PROPOSIÇÃO 37 *Para todo inteiro positivo k existe um grafo com cintura (isto é, comprimento do menor circuito) e número cromático maiores que k.*

PROVA. Assuma que $k \geq 3$, fixe $\varepsilon < 1/k$ positivo e tome $p = p(n) = n^{\varepsilon - 1}$. Ponha X o número de circuitos curtos em $G_{n,p}$. Então,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{k} \frac{(n)_i}{2i} p^i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{k} n^i p^i \leq \frac{1}{2}(k-2) n^k p^k.$$

Pela desigualdade de Markov

$$\Pr[X \geq n/2] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{(n/2)} \leq (k-2) n^{k-1} p^k = (k-2) n^{k-1} n^{(\varepsilon-1)k} = (k-2) n^{k\varepsilon - 1},$$

e pela escolha de ε temos $k\varepsilon - 1 < 0$, que implica

$$\lim_{n \to \infty} \Pr[X \geq n/2] = 0.$$

Agora, se α é a cardinalidade de um maior conjunto independente então

$$\Pr[\alpha(G_{n,p}) \geq r] \leq \binom{n}{r} (1-p)^{\binom{r}{2}} \leq (n \exp\{-p(r-1)/2\})^r,$$

e se $p = n^{\varepsilon - 1}$ e $r \geq (1/2)n/k$ temos

$$n \exp\left(\frac{-p(r-1)}{2}\right) \leq n \exp\left(\frac{-n^{\varepsilon}}{4k}\right) \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

Portanto, para n sficientemente grande temos $\Pr[X \geq n/2] < 1/2$ e $\Pr[\alpha \geq (1/2)n/k] < 1/2$, ou seja, existe um grafo G de ordem n com menos que $n/2$ circuitos curtos e com conjunto independente máximo menor que $n/2k$. Remova um vértice de cada um dos circuitos curtos. Assim, temos um grafo H de ordem pelo menos $n/2$, sem circuitos curtos e número cromático

$$\chi(H) \geq \frac{|H|}{\alpha(H)} \geq \frac{n/2}{\alpha(G)} > k.$$

■

O seguinte resultado é de [26].

LEMA 38 *Se T é uma árvore diferente do $K^{1,m}$, qualquer que seja m, então (T,T) é Ramsey-infinito.*

Prova. Vamos mostrar que para todo natural n existe um grafo G de ordem pelo menos n que é Ramsey-crítico com relação à (T, T).

Defina $t = |T|$. Dados inteiros positivos k e n seja G um grafo tal que $\chi(G) > t^2$ e com cintura maior que n.

Suponha que exista uma 2-coloração das arestas de G tal que os dois subgrafos monocromáticos definidos por essa coloração, digamos G_1 e G_2, são tais que $\chi(G_i) \leq t$, para $i = 1, 2$. Tome $c_i \colon V(G_i) \to [t]$, para $i = 1, 2$, uma coloração própria dos vértices de G_i. Definimos uma t^2-coloração dos vértices de G pondo, para todo $v \in V(G)$, $c(v) = (c_1(v), c_2(v))$. Claramente, c é uma coloração própria o que é um absurdo.

Assuma, sem perda de generalidade, que $\chi(G_1) > t$. Então G_1 contém um subgrafo H de grau mínimo pelo menos t e isso implica que H contém T. Portanto, $G \to (T, T)$.

Considere $G^* \subseteq G$ um subgrafo Ramsey-minimal. Como T não é uma estrela (ou seja, $K^{1,m}$) temos que T contém um caminho com três arestas. Portanto, G^* não é uma floresta pois as arestas de uma floresta podem ser coloridas com duas cores de modo que não existe subfloresta monocromática contendo um caminho com 3 arestas.

De G^* conter um circuito deduzimos, pela hipótese no tamanho da cintura de G, que G^* é de ordem pelo menos n. ■

De fato, a proposição acima pode ser provada para árvores T_1 e T_2 tomando G tal que $\chi(G) > (|T_1| - 1)(|T_2| - 1)$ e, ainda, a proposição também vale para florestas F_1 e F_2 se assumimos que cada uma contém um caminho de comprimento 3.

Em [25] foi provado que se $\chi(G_1)$, $\chi(G_2) \geq 3$ então o par (G_1, G_2) é Ramsey-infinito. Também, se G_1 e G_2 são 2-conexo e tais que a remoção de quaisquer dois vértices adjacentes não desconecta o grafo, então o par (G_1, G_2) é Ramsey-infinito.

Em 1994, Łuczak [24] provou o seguinte teorema.

Teorema 39 *Se F é uma floresta que não é um emparelhamento e G contém pelo menos um circuito, então o par (F, G) é Ramsey-infinito.*

Para provar esse resultado vamos demonstrar os seguintes lemas.

Lema 40 *Para todo grafo G que contém um circuito e inteiros positivos m e t existe um grafo $J = J(m, t, G)$ de ordem n tal que*

(i) J contém pelo menos $3mn$ cópias aresta-disjuntas de G,

(ii) todo subgrafo de J com $s \leq t$ vértices contém no máximo $(s-1)m_1(G)$ arestas, onde

$$m_1(G) = \max\left\{\frac{\mathrm{e}(H)}{|H| - 1} \colon K^2 \subseteq H \subseteq G\right\}.$$

A demonstração desse lema é probabilística e seguirá das proposições abaixo. Seja G um grafo fixo e X_G o número de cópias de G em $G_{n,p}$.

Proposição 41 *Sejam G um grafo e $p = p(n) = n^{-1/m_1(G)} \log n$. Então $G_{n,p}$ contém pelo menos $n(\log n)^2$ cópias aresta disjuntas de G quase sempre.*

Prova. Seja $\mathcal{F}$ uma família aleatória de cópias de G contidas em $G_{n,p}$, cada uma pertence à $\mathcal{F}$ com probabilidade

$$\rho = 4|G|!\frac{n(\log n)^2}{n^{|G|}p^{\mathrm{e}(G)}},$$

independentemente.

Dessa forma, pondo $X = |\mathcal{F}|$, temos

$$3n(\log n)^2 \leq \binom{n}{|G|}p^{\mathrm{e}(G)}\rho \leq \mathbb{E}\left[X\right] \leq n^{|G|}p^{\mathrm{e}(G)}\rho = O(n(\log n)^2).$$

Vamos calcular a variância de X. Temos $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2 = \mathbb{E}\left[X(X-1)\right] + \mathbb{E}\left[X\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2$. Vamos escrever o segundo momento fatorial $\mathbb{E}\left[X(X-1)\right]$ como a soma $\mathbb{E}\text{'}\left[X\right]_2 + \mathbb{E}\text{''}\left[X\right]_2$ do número esperado de cópias arestas disjuntas e arestas não-disjuntas.

$$\mathbb{E}\text{''}\left[X\right]_2 \leq \sum_{J\subseteq G} n^{|J|}p^{\mathrm{e}(J)}n^{2(|G|-|J|)}p^{2(\mathrm{e}(G)-\mathrm{e}(J))}\rho^2$$

$$\leq O(n^2(\log n)^2)\sum_{J\subseteq G} n^{-|J|}(n^{-1/m_1(G)}\log n)^{-\,\mathrm{e}(J)}$$

$$\leq O(n\log n)\sum_{J\subseteq G} n^{\mathrm{e}(J)\left(\frac{1}{m_1(G)}-\frac{|J|-1}{\mathrm{e}(J)}\right)}(\log n)^{3-e(J)} = O(n\log n),$$

pois a somatória pode ser decomposta na soma para os subgrafos J tais que $e(J)/(|J|-1) = m_1(G)$ mais a soma para os subgrafos J tais que $e(J)/(|J|-1) < m_1(G)$. No primeiro caso o expoente de n se anula e $e(J) \geq 3$ pois J contém circuito e temos um fator de $O(1)$. No segundo caso o expoente de n é negativo e temos um fator de $o(1)$.

Um simples argumento de contagem mostra que $\mathbb{E}\text{'}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X\right]^2(1+O(1/n))$; temos

$$\mathbb{E}\text{'}\left[X\right]_2 \leq \sum_{\substack{I\subseteq G\\ I\text{conjunto}\\ \text{indepentente}}} n^{-|I|}n^{2|G|}p^{2\,\mathrm{e}(G)}\rho^2 = \mathbb{E}\left[X\right]^2(1+O(1/n))$$

Usando a desigualdade de Markov, a probabilidade do número de cópias aresta não-disjuntas ser pelo menos $n(\log n)^2$ é no máximo $O(n\log n)/n(\log n)^2 = O(1/\log n)$, portanto, a probabilidade do número de tais cópias ser menor que $n(\log n)^2$ é maior que $1 - O(1/\log n)$.

Ainda,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\text{'}\left[X\right] + \mathbb{E}\text{''}\left[X\right] + \mathbb{E}\left[X\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2 = O(\mathbb{E}\left[X\right](\log n)^2),$$

e por Chebyshev,

$$\Pr\left[X \le \frac{2}{3}\,\mathbb{E}\left[X\right]\right] \le \frac{9}{4}\frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathbb{E}\left[X\right]^2} = O(1/n),$$

ou seja, $|X| \ge 2n(\log n)^2$ com probabilidade $1 - o(1)$.

Portanto o número de cópias aresta disjuntas em $\mathcal{F}$ é pelo menos $2n(\log n)^2 - n(\log n)^2$ quase sempre. ■

Proposição 42 *Considere as hipóteses da proposição acima e seja t um natural. Então quase sempre $G_{n,p}$ contém menos que $n/\log n$ subgrafos de ordem $s \le t$ com mais que $(s-1)m_1(G)$ arestas.*

Prova. Ponha Y o número de subgrafos de $G_{n,p}$ de ordem $s \le t$ com mais que $(s-1)m_1(G)$ arestas e defina

$$\varepsilon = \min\left\{\lceil (s-1)m_1(G)\rceil - (s-1)m_1(G) \colon s \in [t]\right\}.$$

Então, para constantes c, c' e $c'' > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y\right] &\le \sum_{s=1}^{t} \sum_{e=\lceil (s-1)m_1(G)\rceil}^{\binom{s}{2}} 2^{\binom{s}{2}} n^s p^e = \sum_{s=1}^{t} 2^{\binom{s}{2}} n^s \sum_{e=\lceil (s-1)m_1(G)\rceil}^{\binom{s}{2}} p^e \\
&\le c\sum_{s=1}^{t} n^s p^{\lceil (s-1)m_1(G)\rceil} \le c' \sum_{s=1}^{r} n^s (n^{-1/m_1(G)}(\log n))^{\lceil (s-1)m_1(G)\rceil} \\
&\le c' \sum_{s=1}^{r} n^s (n^{-1/m_1(G)}\log n)^{(s-1)m_1(G)+\varepsilon} \\
&\le c' n^{1-\varepsilon/m_1(G)} \sum_{s=1}^{r} (\log n)^{(s-1)m_1(G)+\varepsilon} \le c'' n \frac{(\log n)^r}{n^{\varepsilon/m_1(G)}} = O\left(\frac{n}{(\log n)^2}\right).
\end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Markov $\Pr\left[Y \ge n/\log n\right] \le O(1/\log n)$, ou seja, quase sempre $Y < n/\log n$. ■

Prova do Lema 40. Pelos lemas anteriores, temos que existe um natural positivo N tal que para todo grafo G que não seja uma floresta e para todo natural t, existe um grafo $\widetilde{J}_n$ de ordem n e que contém pelo menos $n(\log n)^2$ cópias disjuntas de G e menos que $n/\log n$ subgrafos de ordem $s \le t$ e pelo menos $(s-1)m_1(G)$ arestas, para todo $n \ge N$.

Ponha $n = \max\left\{N, \exp(t^2), \exp(2m)\right\}$. Dessa forma, o número de cópias aresta disjuntas de G em $\widetilde{J}_n$ é pelo menos $n(\log n)^2 \ge 4nm^2$, e o número de subgrafos de ordem $s \le t$ e pelo menos $(s-1)m_1(G)$ arestas é menor que $n/\log n$. Portanto, o número de arestas que pertencem a grafos pequenos e densos é no máximo $t^2n/\log n \leq n$. Removendo-as ficamos com $4nm^2 - n \geq 3nm$ cópias aresta disjuntas em $J(m,t,G) \subseteq \widetilde{J}_n$. ■

Lembrando a definição do número de Turán, para quaisquer grafos G e H temos

$$\mathrm{ex}(G,H) = \max\left\{\mathrm{e}(J)\colon H \not\subseteq J \subseteq G\right\}.$$

Lema 43 *Seja F uma floresta com t vértices. Então*

$$\mathrm{ex}(G,F) < (t-1)|G|.$$

A prova desse lema faz uso do seguinte resultado.

Proposição 44 *Todo grafo G que contém pelo menos uma aresta contém um subgrafo H tal que*

$$\delta(H) > \frac{\mathrm{e}(H)}{|H|} \geq \frac{\mathrm{e}(G)}{|G|}.$$

Prova. Defina uma seqüência de subgrafos induzidos de $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots$ da seguinte maneira. Se G_i contém um vértice v_i com grau no máximo $\mathrm{e}(G_i)/|G_i|$ então defina $G_{i+1} = G_i - \{v_i\}$, senão tome $H = G_i$.

Assim, para todo i temos

$$\frac{\mathrm{e}(G_{i+1})}{|G_{i+1}|} = \frac{\mathrm{e}(G_i) - \mathrm{grau}(v_i)}{|G_i| - 1} \geq \frac{\mathrm{e}(G_i) - \mathrm{e}(G_i)/|G_i|}{|G_i| - 1} = \frac{\mathrm{e}(G_i)(|G_i| - 1)}{|G_i|(|G_i| - 1)} = \frac{\mathrm{e}(G_i)}{|G_i|},$$

portanto

$$\frac{\mathrm{e}(H)}{|H|} \geq \frac{\mathrm{e}(G)}{|G|}.$$

A desigualdade $\delta(H) > \mathrm{e}(H)/|H|$ segue da escolha de v_i. Como G contém pelo menos uma aresta temos que H não é vazio. ■

Prova do Lema 43. Seja J um subgrafo de G com $\mathrm{e}(J) \geq (t-1)|G|$ arestas. Pela proposição anterior J contém um subgrafo H com $\delta(H) > \mathrm{e}(J)/|J|$ portanto

$$\delta(H) > \frac{\mathrm{e}(J)}{|J|} \geq (t-1)\frac{|G|}{|J|} > (t-1),$$

e pela Proposição 35 o subgrafo $H \subseteq G$ contém qualauer floresta com no máximo t vértices. ■

Agora, vamos provar que para qualquer grafo que contém circuito e qualquer floresta que não é um emparelhamento formam um par Ramsey-infinito.

Prova do Teorema 39. Vamos mostrar que para todo inteiro positivo t existe um grafo de ordem t e Ramsey-crítico com relação à (F, G).

Fixado t, seja $J = J(|F|, t, G)$ dado pelo lema acima e tome $\widetilde{J} \subseteq J$ o grafo gerado pelas $3|F|n$ cópias arestas disjuntas de G em J. Tome $c\colon \mathrm{e}(\widetilde{J}) \to \{0,1\}$ uma 2-coloração qualquer das arestas de $\widetilde{J}$. Vamos mostrar que $\widetilde{J} \to (F, G)$.

Se pelo menos $2|F|n$ arestas são de cor 0, então $\widetilde{J}$ contém uma cópia de F da cor 0, pois para uma floresta F vale que $\mathrm{ex}(J, F) \leq (|F|-1)|J| < 2|F||J|$. Por outro lado, se menos que $2|F||J|$ arestas recebem cor 0, então temos pelo menos $|F||J|$ cópias de G monocromática da cor 1 em $\widetilde{J}$. Logo $\widetilde{J} \to (F, G)$.

Agora, vamos mostrar que qualquer subgrafo de $\widetilde{J}$ que seja Ramsey-minimal com relação à (F, G) tem mais que t vértices.

Seja K um subgrafo de $\widetilde{J}$ de ordem $s \leq t$. Vamos mostrar que existe uma 2-coloração $c\colon E(K) \to \{0,1\}$ das arestas de K tal que $c^{-1}(0)$ forma um emparelhamento e cada cópia de $G \subseteq K$, tem uma aresta de cor 0.

Seja $H \subseteq G$ tal que $e(H)/(|H|-1) = m_1(G)$. Note que H contém circuito pois G contém circuito. Chamamos uma cópia de H em K de *cópia próprias* se essa cópia está contida em uma cópia G, ou seja, desconsideramos cópias de H que encontram mais de uma cópia de G.

Note que a cota superior para a densidade dos subgrafos de J, Lema 40(ii), implica que cada cópia de H em G é induzida e que quaisquer duas cópias próprias têm no máximo um vértice em comum.

Seja $H_1 \subseteq K$ uma cópia própria de H. Se nenhum vértice de H_1 pertence a outra cópia própria de H em K, então alguma aresta de H_1 recebe cor 0 e todas as outras arestas de K que incidem em algum vértice de H_1 recebe cor 1.

Por outro lado, se existe H_2 com vértice em comum com H_1 então temos uma seqüência $H_1, \ldots, H_\ell$ de cópias próprias de H tais que

(a) toda outra cópia H' de H em K não tem vértice em comum com $\bigcup_{i\in[l]} V(H_i)$;

(b) pelo item (ii) do lema, temos que as arestas geradas por $\bigcup_{i\in[\ell]} V(H_i)$ são aquelas de $\bigcup_{i\in[l]} E(H_i)$; e

(c) para cada j, a cópia H_j compartilha um único vértice v_j com $\bigcup_{i\in[j-1]} V(H_i)$.

Para ver (c) suponha o caso em que r cópias de H formam um "circuito" (veja figura 2). Neste caso, o número de arestas é, por (b), $\mathrm{e}(H)r$, enquanto que o número de vértices é $(|H|-1)r$ contradizendo

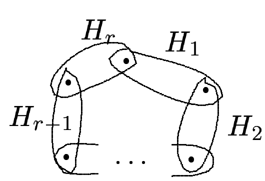

Figura 2:

(ii) do lema.

Agora, tome $e_1 \in H_1$ e para cada $i = 2, \ldots, \ell$ tome $e_i \in H_i$ tal que $v_i \notin e_i$. Isso é possível pois H contém circuito. Por (c), $\{e_i\}_i$ é um emparelhamento. Colorimos essas arestas com a cor 0 e todas as outras arestas adjacentes a vértices de $\bigcup_{i \in [\ell]} V(H_i)$ colorimos com a cor 1. ■

Em [12] é apresentado muito dos resultados conhecidos a respeito de pares de grafos Ramsey-minimais. Alguns resultados recentes incluem: em 1997, Kohayakawa e Kreuter [20] provaram que para quaisquer inteiros $3 \leq l_1 \leq \cdots \leq l_r$, para $r \geq 2$, a r-upla $(C^{l_i})_{i \in [r]}$ é Ramsey-infinita. Também, eles observaram que o Corolário 2 de Rödl e Ruciński [28], de 1995, implica que (G, G) é Ramsey-infinito para todo G que contém um circuito. Esses resultados usam o Lema de Regularidade, no primeiro caso, a versão esparsa.

4 Aspectos algorítmicos

A primeira demonstração algorítmica do Lema de Regularidade foi dada em 1994 por Alon, Duke, Lefmann, Rödl e Yuster [1]. Eles mostraram que, dado um grafo, podemos construir uma partição regular do seu conjunto de vértices em tempo polinomial na ordem do grafo. Esse teorema fornece algoritmos eficientes para muitos dos problemas cuja solução existencial é garantida pelo Lema de Regularidade.

Formalmente, seja $T(n) = O(n^{2.376})$ o tempo necessário para multiplicarmos duas matrizes $n \times n$ com entradas 0 e 1. Então, o seguinte resultado é uma versão construtiva do Lema de Regularidade.

TEOREMA 45 *Dados um inteiro positivo m_0 e $0 < \varepsilon < 1$ existe $M = M(\varepsilon, m_0)$ tal que todo grafo de ordem $n > M$ admite uma partição (ε, k, G)-regular de $V(G)$, para algum $m_0 \leq k \leq M$, e tal partição pode ser construída em tempo $O(T(n))$.*

O ponto central nessa versão algorítmica é o seguinte conceito. Dado um grafo bipartido H com classes A e B de cardinalidade n e grau médio t, para quaisquer $x, y \in B$ definimos a *desvio de vizinhança* de x e y por

$$\sigma(x, y) = |\Gamma_H(x) \cap \Gamma_H(y)| - \frac{t^2}{n}.$$

Para um subconjunto $Y \subseteq B$ definimos o *desvio* de Y por

$$\sigma(Y) = \frac{\sum_{x,y \in Y} \sigma(x, y)}{|Y|^2}.$$

Note que conseguimos calcular os desvios $\sigma(x, y)$ para todo par de vértices de B calculando o quadrado da matriz de adjacências de H, portanto, em tempo $O(T(n))$. Esse será o fator determinante na complexidade do algoritmo que constrói a partição ε-regular.

Lema 46 *Seja H um grafo bipartido com classes A e B de cardinalidade n e grau médio t. Seja $0 < \varepsilon < 1/6$. Se existe $Y \subseteq B$ com $|Y| \geq \varepsilon n$ tal que $\sigma(Y) \geq (\varepsilon^3/2)n$ então ocorre pelo menos um dos seguintes casos:*

1. *$t < \varepsilon^3 n$.*

2. *Em B existe um conjunto maior que $\varepsilon^4 n/8$ cujos vértices desviam de t por pelo menos $\varepsilon^4 n$.*

3. *Existem $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$ com $|A'|$, $|B'| \geq \varepsilon^4 n/4$ e $|\,\mathrm{d}(A', B') - \mathrm{d}(A, B)| \geq \varepsilon^4$.*

Ainda, existe um algoritmo com entradas $H = (A \cup B, E)$ bipartido e $Y \subseteq B$ e que retorna

(i) o fato 1 vale, ou

(ii) o fato 2 vale e um subconjunto de B demonstrando o fato, ou

(iii) o fato 3 vale e os subconjuntos A' e B' que demonstram o fato,

em tempo $O(T(n))$.

Prova. Vamos assumir que *1* e *2* não valem e vamos mostrar *3*. Definimos $Y' = \big\{y \in Y : ||\Gamma(y)| - t| < \varepsilon^4 n\big\}$. Note que, por *2*, esse conjunto não é vazio. Escolha $y_0 \in Y'$ que maximiza $\sum_{y \in Y} \sigma(y_0, y)$; vamos estimar essa quantia.

Temos

$$\sum_{y' \in Y'} \sum_{y \in Y, y \neq y'} \sigma(y', y) = \sigma(Y)|Y|^2 - \sum_{y' \in Y \setminus Y'} \sum_{y \in Y, y' \neq y} \sigma(y', y)$$
$$\geq \frac{\varepsilon^3}{2} n|Y|^2 - \frac{\varepsilon^4}{8} n|Y|n.$$

Como $|Y'| \leq |Y|$ temos que

$$\sum_{y \in Y} \sigma(y_0, y) \geq \frac{\varepsilon^3}{2} n|Y| - \frac{\varepsilon^4}{8} n^2 \geq \frac{3}{8} \varepsilon^3 n|Y|.$$

Vamos provar por contradição à equação acima que existem pelo menos $\varepsilon^4 n/4$ vértices $y \in Y$ cujo desvio de vizinhança de y_0 é maior que $2\varepsilon^4 n$.

De fato, note que se existissem menos vértices como declarado acima, usando o fato do desvio não poder exceder n temos

$$\sum_{y \in Y} \sigma(y, y_0) \leq \frac{\varepsilon^4}{4} n^2 + |Y| 2\varepsilon^4 n \leq \frac{\varepsilon^3}{4} n|Y| + 2\varepsilon^4 n|Y| < \frac{3}{8} \varepsilon^3 n|Y|.$$

Dessa forma, existe um conjunto $B' \subseteq Y$, com $|B'| \geq \varepsilon^4 n/4$ e $y_0 \notin B'$, e para todo $b \in B'$ temos $|\Gamma(b) \cap \Gamma(y_0)| > t^2/n + 2\varepsilon^4 n$. Defina $A' = \Gamma(y_0)$. Claramente, $|A'| \geq t - \varepsilon^4 n > \varepsilon^4 n/4$. Vamos mostrar que $|\,\mathrm{d}(A', B') - \mathrm{d}(A, B)| \geq \varepsilon^4$.

$$\mathrm{e}(A', B') = \sum_{b \in B'} |\Gamma(y_0) \cap \Gamma(b)| > \frac{|B'|t^2}{n} + 2\varepsilon^4 n|B'|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{d}(A', B') - \mathrm{d}(A, B)| &> \frac{t^2}{n|A'|} + \frac{2\varepsilon^4 n}{|A'|} - \frac{t}{n} \\ &\geq \frac{t^2}{n(t + \varepsilon^4 n)} + 2\varepsilon^4 - \frac{t}{n} = 2\varepsilon^4 - \frac{t\varepsilon^4}{t + \varepsilon^4 n} \geq \varepsilon^4, \end{aligned}$$

completando a prova da parte não-algorítmica do lema.

A existência do algoritmo é facilmente provado. Não é difícil ver que *1* e *2* podem ser verificados em tempo $O(n^2)$. Se ambos os casos falharem, prosseguimos da seguinte forma. Para cada $y_0 \in B$ cujo grau desvia de t por menos que $\varepsilon^4 n$ computamos o conjunto $B_{y_0} = \{y \in B : \sigma(y_0, y) \geq 2\varepsilon^4 n\}$. A demonstração acima garante a existência de pelo menos um tal y_0 com $|B_{y_0}| \geq \varepsilon^4 n/4$.

Os subconjuntos $B' = B_{y_0}$ e $A' = \Gamma(y_0)$ são aqueles que procuramos e a computação de $\sigma(y, y')$ para todos y, $y' \in B$ pode ser feito em tempo $O(T(n))$. ∎

LEMA 47 *Seja H um grafo bipartido com classes A e B, cada uma de cardinalidade n. Seja $2n^{-1/4} < \varepsilon < 1/16$. Assuma que no máximo $\varepsilon^4 n/8$ vértices de B desviam do grau médio de pelo menos $\varepsilon^4 n$. Se H não é ε-regular então existe $Y \subseteq B$, com $|Y| \geq \varepsilon n$, tal que $\sigma(Y) \geq \varepsilon^3 n/2$.*

PROVA. Vamos assumir que para todo Y temos $\sigma(Y) \leq \varepsilon^3 n/2$ e vamos mostrar que H é ε-regular. Não é difícil provar que para testar a ε-regularidade do par (A, B) é suficiente sabermos se $|\,\mathrm{d}(X, Y) - \mathrm{d}(A, B)| < \varepsilon$ para todos os subconjuntos $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ com $|X| = \lceil \varepsilon |A| \rceil$ e $|Y| = \lceil \varepsilon |B| \rceil$. Essa afirmação segue do seguinte fato, que dexamos para o leitor verificar,

$$\mathrm{d}(A, B) = \frac{1}{\binom{|A|}{k}\binom{|B|}{l}} \sum \mathrm{d}(X, Y),$$

onde a soma é sobre todos os subconjuntos X de A e Y de B com cardinalidades k e l, respectivamente.
AFIRMAÇÃO:

$$\sum_{x \in X} \left(|\Gamma(x) \cap Y| - t\frac{|Y|}{n} \right)^2 \leq \mathrm{e}(A, Y) + |Y|^2 \sigma(Y) + \frac{2}{5}\varepsilon^5 n^3. \tag{20}$$

Vamos provar a afirmação. Seja $M = (m_{ij})$ a matriz de adjacências do grafo H. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in X}\left(|\Gamma(x)\cap Y| - t\frac{|Y|}{n}\right)^2 &\le \sum_{x\in A}\left(|\Gamma(x)\cap Y| - t\frac{|Y|}{n}\right)^2 \\
&= \sum_{x\in A}\left(\sum_{y\in Y} m_{xy} - t\frac{|Y|}{n}\right)^2 \\
&= \sum_{x\in A}\left(\sum_{y\in Y} m_{xy}^2 + t^2\frac{|Y|^2}{n^2} + \sum_{y_1\neq y_2\in Y} m_{xy_1}m_{xy_2} - 2t\frac{|Y|}{n}\sum_{y\in Y} m_{xy}\right) \\
&= \mathrm{e}(A,Y) + t^2\frac{|Y|^2}{n} + \sum_{y_1\neq y_2\in Y} |\Gamma(y_1)\cap\Gamma(y_2)| - 2\,\mathrm{e}(A,Y)t\frac{|Y|}{n} \\
&= \mathrm{e}(A,Y) + t^2\frac{|Y|^2}{n} + \sum_{y_1\neq y_2\in Y}\left(\sigma(y_1,y_2) + \frac{t^2}{n}\right) - 2\,\mathrm{e}(A,Y)t\frac{|Y|}{n}.
\end{aligned}$$

Resta mostrar que

$$t^2\frac{|Y|^2}{n} - \mathrm{e}(A,Y)t\frac{|Y|}{n} \le \frac{1}{5}\varepsilon^5 n^3.$$

Multiplicando a última igualdade por $1/(t|Y|^2)$ e reescrevendo, temos

$$\mathrm{d}(A,Y) \ge \frac{t}{n} - \frac{\varepsilon^5 n^3/5}{t|Y|^2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(A,B) = \frac{\mathrm{e}(A,Y)}{n|Y|} &\ge \frac{(t-\varepsilon^4 n)(|Y| - \varepsilon^4 n/8)}{n|Y|} \\
&= \frac{t}{n} - \varepsilon^4 - \frac{\varepsilon^4 t/8}{|Y|} + \frac{\varepsilon^8 n/8}{|Y|} \ge \frac{t}{n} - \varepsilon^4 - \frac{1}{8}\varepsilon^3.
\end{aligned}$$

Dos limitantes para ε temos que $1 < \varepsilon^4$ e de $|Y| \le 1 + \varepsilon n$ temos

$$\frac{\varepsilon^5 n^3/5}{t|Y|^2} \ge \frac{\varepsilon^5 n^2/5}{(\varepsilon n + 1)^2} \ge \varepsilon^4 + \frac{1}{8}\varepsilon^3.$$

Com isso, provamos a afirmação. Agora, vamos voltar a demonstração do lema.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (16) temos

$$\sum_{x\in X}\left(|\Gamma(x)\cap Y| - t\frac{|Y|}{n}\right)^2 \ge \frac{1}{|X|}\left(\left(\sum_{x\in X}|\Gamma(x)\cap Y|\right) - t|X|\frac{|Y|}{n}\right)^2.$$

E com a afirmação acima ficamos com

$$\left(\left(\sum_{x\in X}|\Gamma(x)\cap Y|\right)-t|X|\frac{|Y|}{n}\right)^2 \leq |X|\left(\mathrm{e}(A,Y)+|Y|^2\sigma(Y)+\frac{2}{5}\varepsilon^5 n^3\right).$$

Dividindo por $|X|^2|Y|^2$ e depois usando o fato de $\mathrm{e}(A,Y)\leq(t+\varepsilon^4 n)|Y|+\varepsilon^4 n^2/8$ e $\sigma(Y)\leq\varepsilon^3 n/2$ e $\varepsilon>2n^{-1/4}$ temos a estimativa

$$\begin{aligned}
|\,\mathrm{d}(X,Y)-\mathrm{d}(A,B)|^2 &\leq \frac{1}{|X||Y|^2}\left((t+\varepsilon^4 n)|Y|+\frac{\varepsilon^4 n^2}{8}+|Y|^2\frac{\varepsilon^3 n}{2}+\frac{2}{5}\varepsilon^5 n^3\right)\\
&\leq \frac{n+\varepsilon^4 n}{\varepsilon^2 n^2}+\frac{\varepsilon^4 n^2/8}{\varepsilon^3 n^3}+\frac{\varepsilon^3 n}{2\varepsilon n}+\frac{2\varepsilon^5 n^3/5}{\varepsilon^3 n^3}\\
&\leq \frac{\varepsilon^2(1+\varepsilon^4)}{16}+\frac{\varepsilon^5}{128}+\frac{9}{10}\varepsilon^2<\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

portanto, o par (A,B) é ε-regular. ■

COROLÁRIO 48 *Seja H um grafo bipartido com classes A e B, cada uma de cardinalidade n. Seja $2n^{-1/4}<\varepsilon<1/16$. Existe um algoritmo com complexidade de tempo $O(T(n))$ que verifica que H é ε-regular ou descobre $A'\subseteq A$ e $B'\subseteq B$, com $|A'|$, $|B'|\geq\varepsilon^4 n/16$, tal que $|\,\mathrm{d}(A',B')-\mathrm{d}(A,B)|\geq\varepsilon^4$.*

PROVA. Começamos computando o grau médio t de H. Se $t<\varepsilon^3 n$ então de $\mathrm{d}(A,B)=t/n$ temos que H é ε-regular e estamos feitos.

Depois, contamos o número de vértices em B cujos graus desviam de t de no máximo $\varepsilon^4 n$. Se existem mais que $\varepsilon^4 n/8$ tais vértices, então pelo menos metade deles desviam na mesma direção e se denotamos por B' tais vértices sabemos que $|B'|\geq\varepsilon^4 n/16$. Cálculos simples mostram que neste caso $|\,\mathrm{d}(A,B')-\mathrm{d}(A,B)|\geq\varepsilon^4$ e estamos feitos.

Agora, ou existe $Y\subseteq B$ com $|Y|\geq\varepsilon n$ e $\sigma(Y)\geq\varepsilon^3 n/2$ e neste caso, pelo Lema 46, existem A' e B' como procuramos e que podem ser descobertos em tempo $O(T(n))$, ou não existe tal Y como no começo deste parágrafo e assim, pelo Lema 47, H é ε-regular. ■

Vamos reescrever o Lema 3 levando em conta seu aspecto algorítmico.

LEMA 49 *Seja G um grafo de ordem n. Sejam $\gamma\leq 1$ um real positivo e $\mathcal{P}=\{V_0,\dots,V_k\}$ uma partição (ε,k,G)-equipotente de $V(G)$ tal que $4^k>600\gamma^{-5}$. Assuma que $|V_1|>4^{2k}$. Dados testemunhas de que mais de $\gamma\binom{k}{2}$ pares (V_i,V_j) não são γ-regulares, então existe uma $(1+k4^k)$-partição equipotente $\mathcal{Q}$ de $V(G)$ que pode ser construída em tempo $O(n)$ e que refina $\mathcal{P}$ e com menos que $|V_0|+n/4^k$ vértices na classe excepcional e tal que* $\mathrm{ind}(\mathcal{Q})\geq\mathrm{ind}(\mathcal{P})+\gamma^5/32$. ■

Dessa forma, dado ε e m_0 escolhemos b suficientemente grande, ou seja, tal que $b \geq m_0$ e $4^b \geq 600(\varepsilon^4/16)^{-5}$. Tome f a função inteira definida por $f(0) = b$ e $f(i+1) = f(i)4^{f(i)}$. Ponha $Q = f(\lceil 16(\varepsilon^4/16)^{-5} \rceil)$ e ponha $N = \max\{Q4^{2Q}, 32Q/\varepsilon^5\}$. Provaremos o Teorema 45 com $M = N(\geq Q)$.

Dado um grafo $G = (V, E)$ com $n \geq N$ vértices

1. dividimos os vértices de G em uma partição equipotente $\mathcal{P}_1 = \{C_0, \ldots, C_b\}$ tal que $|C_1| = \lfloor n/b \rfloor$ e então $|C_0| < b$; façamos $k_1 = b$,

2. para todo par (C_r, C_s) de $\mathcal{P}_i$, verifique ε-regularidade ou ache $X \subseteq C_r$ e $Y \subseteq C_s$ com $|X|$, $|Y| \geq (\varepsilon^4/16)|C_1|$ tal que $|\operatorname{d}(X, Y) - \operatorname{d}(C_r, C_s)| \geq \varepsilon^4$.

3. se o número de pares ε-irregulares é no máximo $\varepsilon\binom{k_l}{2}$ então PÁRA,

4. usamos o Lema 49 com $\mathcal{P} = \mathcal{P}_i$, $k = k_i$ e $\gamma = \varepsilon^4/16$ para termos uma $(1 + k_i 4^{k_i})$-partição $\mathcal{P}'$ que refina $\mathcal{P}_i$,

5. façamos $k_{i+1} = k_i 4^{k_i}$, $\mathcal{P}_{i+1} = \mathcal{P}'$, $i = i + 1$ e voltemos para o passo 2.

AFIRMAÇÃO: O procedimento acima constrói uma partição (ε, k, G)-regular em tempo $O(T(n))$, onde $m_0 \leq k \leq M$.

PROVA DA AFIRMAÇÃO. Ponha $\gamma = \varepsilon^4/16$. Vamos provar por indução que na i-ésima iteração temos $\operatorname{ind}(\mathcal{P}_i) \geq (i-1)\gamma^5/32$ e que o tamanho da classe excepcional de $\mathcal{P}_i$, a qual denotamos V_0^i, é no máximo $\gamma n(1 - 1/2^i)$. Esta afirmação é verdadeira para $i = 1$ pois o índice é não-negativo e $V_0^i < b < Q \leq n\varepsilon^5/20 < n\gamma/2$.

Assumindo para $i > 0$ vamos provar para $i + 1$. Pelo Lema 49, $\operatorname{ind}(\mathcal{P}_{i+1}) \geq \operatorname{ind}(\mathcal{P}_i) + \gamma^5/32$, logo, $\operatorname{ind}(\mathcal{P}_{i+1}) \geq i\gamma^5/32$. Agora, pelo Lema 49, temos que $|V_0^{i+1}| - |V_0^i| \leq n/4^{k_i} \leq \gamma n/2^{i+1}$.

Desde que o índice de uma partição é no máximo $1/2$, podemos concluir que o algoritmo deve parar após no máximo $\lceil 16\gamma^{-5} \rceil$ iterações produzindo uma partição equipotente $\mathcal{P}_i$ com no máximo Q classes. O tamanho da classe excepcional de $\mathcal{P}_i$ é no máximo $\gamma n < \varepsilon n$.

Finalmente, observe que o numero de iterações é constante, como função de n, e o tempo de execução de cada passo é no máximo $O(M(c))$, onde c é a cardinalidade de uma classe não-excepcional de uma partição equipotente, que é menor que n. ■

Esse algoritmo roda em tempo $O(T(n))$ e pode ser paralelizado; em [1] foi provado que, com número polinomial de processadores no modelo EREW PRAM de computação paralela, o algoritmo roda em tempo $O(\log n)$.

Acabamos de ver que sabemos construir eficientemente uma partição ε-regular do conjunto de vértices de um grafo. E quanto a verificar se uma partição dada é ε-regular? Aqui temos um fenômeno curioso, é mais fácil construir uma partição ε-regular do que verificar sua regularidade!

De fato, em [1] foi provado o seguinte resultado sobre a complexidade do problema de decidir sobre a regularidade de uma partição.

TEOREMA 50 *O seguinte problema de decisão é co-*NP*-completo: dados um grafo G, uma partição $\mathcal{P} = \{V_0, \ldots, V_k\}$ de $V(G)$ e $0 < \varepsilon < 1$, decidir se a partição $\mathcal{P}$ satisfaz as condições de ε-regularidade garantidas pelo Lema de Regularidade de Szemerédi.*

Vamos ver como se demonstra esse teorema. De fato, vamos demostrar o teorema acima para $k = 2$ e $\varepsilon = 1/2$. Note que isso é suficiente para provar o Teorema 50.

Inicialmente, vamos definir três problemas computacionais que farão parte das reduções polinomiais na prova da co-NP-completude do problema de decidir se uma 2-partição é 1/2-regular.

O primeiro problema é o *clique* ($\mathrm{C}(k)$): dados um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro positivo k, decidir se G contém um clique, isto é, um subgrafo completo, com k vértices.

Depois, temos o *half size clique* (HSC): dado um grafo G de ordem n ímpar, decidir se G contém um subgrafo isomorfo ao grafo completo $K^{\frac{n+1}{2}}$.

Finalmente, temos o $K^{k,k}$*-problema* ($\mathrm{K}(k,k)$): dados um inteiro positivo k e um grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ determinar se o grafo G contém um subgrafo isomorfo ao grafo bipartido completo $K^{k,k}$.

Assumimos que é sabido que $\mathrm{C}(k)$ é NP-completo, para todo $k \geq 3$. O leitor pode se referir a [16] para uma demonstração desse fato.

LEMA 51 HSC *é NP-completo.*

PROVA (ESBOÇO). Sejam um grafo G e um inteiro positivo k entradas para $\mathrm{C}(k)$. Podemos supor que k é ímpar.

Se $k \leq (|V|+1)/2$ ponha $G^* = G + K^{|V|+1-2k}$, onde $F + H$ significa que tomamos a união disjunta dos vértices de F e H e colocamos todas as arestas entre vértices de F e H. Caso contrário, tomamos G^* a união disjunta de G com o gafo $E^{2k-|V|-1}$ de ordem $2k - |V| - 1$ e sem arestas.

Dessa forma, G^* contém um clique sobre metade de seus vértices se, e somente se, G contém um subgrafo isomorfo a K^k, ou seja, HSC $\Leftrightarrow$ $\mathrm{C}(k)$. ■

LEMA 52 $\mathrm{K}(k,k)$ *é NP-difícil.*

PROVA (ESBOÇO). Se G é uma entrada para HSC então tomamos a seguinte redução para $\mathrm{K}(k,k)$: ponha H o grafo bipartido $(A \cup B, F)$ dado por $A = \{\alpha_{ij} \colon 1 \leq i,\ j \leq n\}$, e $B = \{\beta_{kl} \colon 1 \leq k,\ l \leq n\}$ e o conjunto de arestas é dado por $F = \{\{\alpha_{ij}, \beta_{k,l}\} : i = k \text{ ou } i \neq l,\ j \neq k \text{ e } \{i,k\} \in E(G)\}$.

O lema segue da seguinte afirmação que não demonstraremos: G contém um clique de ordem $(n+1)/2$ se, e somente se, H contém um subgrafo isomorfo ao grafo bipartido completo $K^{(\frac{n+1}{2})^2, (\frac{n+1}{2})^2}$.
■

LEMA 53 *O seguinte problema é NP-completo: dado um grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$, onde $|A| = |B| = n$, e com $|E| = n^2/2 - 1$, decidir se G contém um subgrafo isomorfo ao grafo bipartido completo $K^{n/2,n/2}$.*

Prova (Esboço). Sejam $G = (A \cup B, E)$ e k entradas para $\mathrm{K}(k,k)$. Se $k > n/2$ adicionamos $2k - n$ vértices isolados em cada classe, caso contrário, adicionamos a cada classe $n - 2k$ vértices, cada um ligado à todos os vértices da outra classe. Podemos assumir que n é par e pomos $k = n/2$.

A demonstração segue em dois casos.

(1)Se $|E| < n^2/2 - 1$. Neste caso, se $|E| < N^2/4 - 1$ estamos feitos, portanto, vamos assumir que $|E| \geq n^2/4 - 1$.

Para $i = 1, 2$ ponha A_i e B_i conjuntos de cardinalidade $n/2$. Ponha

$$A' = A \cup A_1 \cup A_2 \text{ e } B' = B \cup B_1 \cup B_2,$$

com as uniões sendo disjuntas. Para o conjunto de arestas ponha

$$E' = E \cup E(A_1, B_1) \cup E(A_2, B_2) \cup E(A_1, B) \cup E(B_1, A),$$

onde $E(X, Y)$ significa todas as aresta com um extremo em X e o outro em Y. Então

$$|E'| = |E| + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)n < \frac{(2n)^2}{2} - 1.$$

Então se G contém um grafo bipartido completo com $n/2$ vértices em cada classe temos que $G' = (A' \cup B', E')$ contém um grafo bipartido completo com n vértices em cada classe.

Agora, se G' contém um subgrafo H isomorfo ao grafo bipartido completo $K^{n,n}$ então não existem vértices de A_2 e B_2 em H e, removendo de H os vértices de A_1 e B_1 temos um $K^{n/2,n/2}$.

Para termos o número certo de arestas, colocamos arestas entre os vértices de A_2 e B, e entre os de B_2 e A, de forma que o grau dos vértices de A_2 em B e o grau dos vértices de B_2 e A não excedam $n/2 - 1$ (para não criar cópias de $K^{n,n}$ em G') e até que tenhamos $(2n)^2/2 - 1$ arestas em E'. Isto é possível pois

$$|E| + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)n + \frac{2n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right) \geq \frac{(2n)^2}{2} - 1.$$

(2) Se $|E| > n^2/2 - 1$. Neste caso, sejam A_1, A_2, B_1 e B_2 como no caso anterior. Ponha

$$E' = E \cup E(A_1, B_1) \cup E(A_1, B) \cup E(B_1, A),$$

de forma que $|E'| = |E| + 3n^2 < (3n)^2/2 - 1$. Assim, como antes, G' contém um subgrafo isomorfo à $K^{3n/2,3n/2}$ se, e somente se, G contém um subgrafo isomorfo à $K^{n/,n/2}$.

Agora, colocamos arestas entre A_2 e B_2, entre A_2 e B e entre B_2 e A, mantendo o grau dos vértices de A_2 e de B_2 em B e em A, respectivamente, menores que $n/2$ até que $|E'| = (3n)^2/2 - 1$. Isto é possível pois

$$|E| + 3n^2 + n^2 + 2n\left(\frac{n}{2} - 1\right) \geq \frac{(3n)^2}{2} - 1,$$

para todo $n \geq 2$ e $|E| > n^2/2 - 1$. ■

Agora vamos mostrar a co-NP-completude de ε-regularidade: um grafo bipartido G com n vérices em cada classe e $n^2/2 - 1$ arestas contém um subgrafo isomorfo à $K^{n/2,n/2}$ se, e somente se, ele não é ε-regular para $\varepsilon = 1/2$.

Suponha G ε-irregular e sejam X e Y testemunhas de irregularidade de G. Devemos ter

$$\left| \mathrm{d}(X,Y) - \frac{1}{2} + \frac{1}{k^2} \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Essa desigualdade é possível se, e somente se, $\mathrm{d}(X,Y) = 1$. Desde que $|X|, |Y| \geq n/2$ segue que o o subgrafo de G induzido por $X \cup Y$ contém um subgrafo isomorfo à $K^{n/2,n^2}$. Por outro lado, se G contém um subgrafo isomorfo à $K^{n/2,n/2}$ então as classes X e Y desse subgrafo atestam a iregularidade de G. Este fato completa a prova pois verificar que X e Y são testemunhas de ε-irregularidade pode ser feito em tempo linear. Portanto, temos provado o Teorema 50. ■

Entre as aplicações dadas pelos autores em [1] eles enfatizam a seguinte. Para todo $\delta > 0$ existe $c > 0$ tal que para todo m e todo grafo com m arestas, todo grafo G de ordem $n \geq cm$ e com pelo menos δn^2 arestas contém uma cópia topológica de H (isto é, um grafo obtido de H substituindo suas arestas por caminhos dois-a-dois disjuntos) na qual cada aresta é substituida por um caminho de comprimento 4. Podemos descobrir tal cópia em tempo polinomial em n.

De fato, tome

$$c = c(\delta) = \frac{70}{\delta} M\left(\frac{\delta}{20}, \frac{20}{\delta}\right),$$

onde M é com no Lema 49. Ponha $\varepsilon = \delta/20$ e $m_0 = \varepsilon^{-1}$. Aplicando a forma algoritmica do Lema de Szemerédi que acabamos de ver, construímos uma partição (ε, k, G)-regular.

Cada classe não excepcional tem, pela definição de c, mais que $(60/\delta)m$ vértices. Pela equação (2), como G tem pelo menos δn^2 arestas, temos que existem classes, digamos A e B, da partição com densidade $\mathrm{d}(A,B) > \delta/2$.

Seja X o subconjunto dos vértices de A com pelo menos $(\delta/3)|B|$ vizinhos em B. Sabemos que a ε-regularidade implica que $|X| \geq (1-\varepsilon)|A| > (30/\delta)m > 2m$. Afirmamos que unindo quaisquer dois vértices de X existem pelo menos $6m$ caminhos de comprimento quatro e vértices disjuntos com pelo menos 1 vértice em B. Para que vejamos isso, fixe a_1, $a_2 \in X$ e suponha que conhecemos $s < 6m$ tais caminhos. Remova todos os vértices de A e de B que pertençam a esses caminhos e denote por B_1 e B_2 o conjunto dos vizinhos de a_1 e a_2 entre os vértices restantes de B. Claramente, para $i = 1, 2$,

$$|B_i| \geq \frac{\delta}{3}|B| - 12m > \varepsilon|B|,$$

portanto, por ε-regularidade temos que quase todos os vértices de A têm muitos vizinhos em B_1 e B_2 e assim conseguimos um caminho adicional entre os vértices a_1 e a_2.

Voltando para a prova da aplicação do Lema de Szemerédi algoritmico, podemos construir uma cópia de H sobre qualquer conjunto de $|V(H)|$ vértices de X. Note que $|V(H)| \leq 2m$, pois H contém mais vértices no caso de ser um emparelhamento. Vamos construir os caminhos correspondentes às arestas de H um-a-um. Suponha termos construído caminhos correspondentes a $p < m$ arestas, e suponha querermos um caminho entre a_1 e a_2. Vimos acima que existem pelo menos $6m$ caminhos vértice disjuntos ligando esses vértices, e temos até agora usado no máximo $2m + 3p < 5m$ vértices, de forma que pelo menos um daqueles caminhos pode ser escolhido. E, completamos a prova da aplicação. O algoritmo polinomial afirmado é imediato.

Em 1996, Frieze e Kannan [14] demonstraram uma versão construtiva do Lema de Regularidade que, implicitamente, constrói uma partição que satisfaz a regularidade garantida pelo lema. O algoritmo deles é um algoritmo Monte Carlo que roda em tempo constante.

Vejamos uma versão do Lema de Regularidade provada em [14]. Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $V_1, \ldots, V_k$ uma partição de V. Ponha $d_{ij} = \mathrm{d}(V_i, V_j)$. Para todo $X \subseteq V$ e todo $i \in [k]$ ponha $X_i = X \cap V_i$. Para S, $T \subseteq V$ disjuntos defina

$$\Delta(S,T) = \mathrm{e}(S,T) - \sum_{i,j \in [k]} |S_i||T_j| d_{ij}.$$

Note que a somatória acima é aproximadamente $\mathrm{e}(S_i, T_j)$ se (V_i, V_j) é ε-regular. Portanto, $\Delta(S,T)$ mede o devio da regularidade do par (S,T).

Dizemos que uma partição de V é *ε-suficiente* se para todos $S, T \subseteq V$ disjuntos, temos que $|\Delta(S,T)| \leq \varepsilon n^2$. Não é difícil provar que uma k-partição ε-regular sem a classe excepcional é 4ε-suficiente.

Em [14] os autores afirmam que o seguinte resultado, uma versão mais fraca do Lema de Regularidade de Szemerédi mas com melhores constantes[3], resolve aproximadamente *Max-Cut*, *Graph Bisection*, *Min multi-way cuts* e *Graph Separator* em grafos densos.

TEOREMA 54 *Para todo grafo G de ordem n suficientemente grande e todo $\varepsilon > 0$ podemos construir uma k-partição ε-suficiente de $V(G)$ em tempo $n\tilde{O}(\varepsilon^{-2})$[4], onde $\log k = O(\varepsilon^{-2})$.* ■

Note que não estamos assumindo equipotência das partes que pode ser conseguida com um custo adicional $O(\varepsilon^{-2})$. A demonstração deste teorema é baseada nos seguintes lemas.

LEMA 55 *Sejam $0 < \delta < 1$ e G um grafo fixos. Se uma partição de $V(G)$ não é ε-suficiente, então podemos em tempo $O(2^{O(1/\varepsilon^2)}\delta^{-1}\log\delta^{-1})$ construir, com probabilidade pelo menos $1-\delta$, um par A, $B \subseteq V(G)$ de conjuntos disjuntos tais que $|\Delta(A,B)| \geq \varepsilon n^2/40$.* ■

LEMA 56 *Dados um grafo G, uma partição $\mathcal{P}$ de $v(G)$ e A, $B \subseteq V(G)$ com $|\Delta(A,B)| \geq \gamma n^2$, para algum γ positivo, podemos construir um refinamento $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$ tal que $|\mathcal{P}'| \geq 3|\mathcal{P}|$ e $\mathrm{ind}(\mathcal{P}') \geq \mathrm{ind}(\mathcal{P}) + 4\gamma^2$.* ■

[3] No Lema de Szemerédi, apenas $\log^* k$ é polinomial em $1/\varepsilon$. Compare com o resultado de Frieze e Kannan.
[4] $\tilde{O}$ esconde um fator de ordem $\mathrm{polylog}(1/\varepsilon)$

Portanto, segue que com no máximo $200\varepsilon^{-2}$ construções como no Lema 55 temos uma partição ε-suficiente de $V(G)$.

Referências

[1] N. Alon, R. A. Duke, H. Lefmann, V. Rödl, and R. Yuster, *The algorithmic aspects of the regularity lemma*, J. Algorithms **16** (1994), no. 1, 80–109.

[2] László Babai, Miklós Simonovits, and Joel Spencer, *Extremal subgraphs of random graphs*, J. Graph Theory **14** (1990), no. 5, 599–622.

[3] Béla Bollobás, *Random graphs*, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1985.

[4] ______, *Extremal graph theory*, Handbook of combinatorics, Vol. 1, 2, Elsevier, Amsterdam, 1995, pp. 1231–1292.

[5] Béla Bollobás and Paul Erdős, *On a Ramsey-Turán type problem*, J. Combinatorial Theory Ser. B **21** (1976), no. 2, 166–168.

[6] F. R. K. Chung, R. L. Graham, and R. M. Wilson, *Quasi-random graphs*, Combinatorica **9** (1989), no. 4, 345–362.

[7] C. Chvatál, V. Rödl, E. Szemerédi, and Jr. Trotter, W. T., *The Ramsey number of a graph with bounded maximum degree*, J. Combin. Theory Ser. B **34** (1983), no. 3, 239–243.

[8] P. Erdős, A. Hajnal, Vera T. Sós, and E. Szemerédi, *More results on Ramsey-Turán type problems*, Combinatorica **3** (1983), no. 1, 69–81.

[9] P. Erdős and M. Simonovits, *A limit theorem in graph theory*, Studia Sci. Math. Hungar **1** (1966), 51–57.

[10] P. Erdös and A. H. Stone, *On the structure of linear graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 1087–1091.

[11] Paul Erdős, *Some old and new problems in various branches of combinatorics*, Proceedings of the Tenth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1979) (Winnipeg, Man.), Congress. Numer., XXIII–XXIV, Utilitas Math., 1979, pp. 19–37.

[12] R. J. Faudree, C. C. Rousseau, and R. H. Schelp, *Problems in graph theory from Memphis*, The mathematics of Paul Erdős, II, Algorithms Combin., vol. 14, Springer, Berlin, 1997, pp. 7–26.

[13] P. Frankl and V. Rödl, *Large triangle-free subgraphs in graphs without K_4*, Graphs Combin. **2** (1986), no. 2, 135–144.

[14] Alan Frieze and Ravi Kannan, *The regularity lemma and approximation schemes for dense problems*, 37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Burlington, VT, 1996), IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 1996, pp. 12–20.

[15] Zoltán Füredi, *Random Ramsey graphs for the four-cycle*, Discrete Math. **126** (1994), no. 1-3, 407–410.

[16] Michael R. Garey and David S. Johnson, *Computers and intractability*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979, A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.

[17] S. W. Graham and C. J. Ringrose, *Lower bounds for least quadratic nonresidues*, Analytic number theory (Allerton Park, IL, 1989), Progr. Math., vol. 85, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 269–309.

[18] P. E. Haxell, Y. Kohayakawa, and T. Łuczak, *Turán's extremal problem in random graphs: forbidding even cycles*, J. Combin. Theory Ser. B **64** (1995), no. 2, 273–287.

[19] ______, *Turán's extremal problem in random graphs: forbidding odd cycles*, Combinatorica **16** (1996), no. 1, 107–122.

[20] Y. Kohayakawa and B. Kreuter, *Threshold functions for asymmetric Ramsey properties involving cycles*, Random Structures Algorithms **11** (1997), no. 3, 245–276.

[21] Y. Kohayakawa, T. Łuczak, and V. Rödl, *On K^4-free subgraphs of random graphs*, Combinatorica **17** (1997), no. 2, 173–213.

[22] Yoshiharu Kohayakawa, *Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs*, Foudations of Computational Mathematics (Berlim, Heidelberg) (F. Cucker and M. Shub, eds.), Springer-Verlag, January 1997, pp. 216–230.

[23] J. Komlós and M. Simonovits, *Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory*, Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Vol. 2 (Keszthely, 1993), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 2, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996, pp. 295–352.

[24] Tomasz Łuczak, *On Ramsey minimal graphs*, Electron. J. Combin. **1** (1994), Research Paper 4, approx. 4 pp. (electronic).

[25] J. Nešetřil and V. Rödl, *The structure of critical Ramsey graphs*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **32** (1978), no. 3-4, 295–300.

[26] Jaroslav Nešetřil and Vojtěch Rödl, *On Ramsey minimal graphs*, Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976), Colloq. Internat. CNRS, vol. 260, CNRS, Paris, 1978, pp. 307–308.

[27] Vojtěch Rödl, *On universality of graphs with uniformly distributed edges*, Discrete Math. **59** (1986), no. 1-2, 125–134.

[28] Vojtěch Rödl and Andrzej Ruciński, *Threshold functions for Ramsey properties*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 4, 917–942.

[29] I. Z. Ruzsa and E. Szemerédi, *Triple systems with no six points carrying three triangles*, Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Vol. II, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 18, North-Holland, Amsterdam, 1978, pp. 939–945.

[30] Miklós Simonovits and Vera T. Sós, *Szemerédi's partition and quasirandomness*, Random Structures Algorithms **2** (1991), no. 1, 1–10.

[31] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245, Collection of articles in memory of Juriĭ Vladimirovič Linnik.

[32] Endre Szemerédi, *On graphs containing no complete subgraph with* 4 *vertices*, Mat. Lapok **23** (1972), 113–116 (1973).

[33] ———, *Regular partitions of graphs*, Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976), Colloq. Internat. CNRS, vol. 260, CNRS, Paris, 1978, pp. 399–401.

[34] Andrew Thomason, *Pseudorandom graphs*, Random graphs '85 (Poznań, 1985), North-Holland Math. Stud., vol. 144, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 307–331.

A Notações e definições

A.1 Teoria dos grafos. Como já é usual em combinatória, denotamos por $[\mathbf{n}]$ o subconjunto dos naturais $\{1, 2, \ldots, n\}$. Também é usual a seguinte notação, se X é um conjunto finito qualquer e $n \leq |X|$, então usamos $\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{n}}$ para denotar a família de subconjuntos de X de cardinalidade n, ou seja,

$$\binom{X}{n} = \{A \subseteq X \colon |A| = n\}.$$

Um grafo é dado por um par ordenado $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, onde V é um conjunto finito cujos elementos são chamados vértices e $E \subseteq \binom{V}{2}$ é o conjunto de arestas. Em particular, usamos $\mathbf{K}^{\mathbf{r}}$ para o grafo completo com r vértices, isto é, $|V(K^r)| = r$ e $E(K^r)$ é a família de *todos* os subconjuntos de $V(K^r)$ de tamanho 2.

Definimos os vizinhos de $v \in V$ por

$$\mathbf{\Gamma_G(v)} = \{u \in V \colon \{u, v\} \in E\},$$

e $|\Gamma(v)|$ é o **grau do vértice** v. Denotamos por $\mathbf{\Delta(G)}$ o grau máximo em G e por $\delta(\mathbf{G})$ o grau mínimo em G.

Se $|V| = n$ então a matriz de adjacências de G, $\mathbf{A(G)}$, é uma matriz *simétrica* $n \times n$ com entradas 0 e 1 indexada pelos vértices G de forma que, se u, $v \in V(G)$, na posição u, v temos 1 se $\{u, v\} \in E$ e 0 caso contrário.

Uma **árvore** é um grafo sem circuitos e conexo (isto é, todo par de vértices é ligado por um caminho), uma **floresta** é uma união disjunta de árvores e um **emparelhamento** é uma floresta onde todo vértice tem grau 1.

Um **subgrafo** H de G, $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}$, é um grafo $H = (V(H), E(H))$ tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. O subgrafo é **induzido** se $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. Se $U \subseteq V(G)$, então U define naturalmente um subgrafo induzido que denotamos por $\mathbf{G[U]}$.

Se $U \subseteq V$ é tal que $E(G[U]) = \emptyset$, então U é chamado **conjunto independente**. A cardinalidade do maior conjunto independente em G é denotada por $\alpha(\mathbf{G})$.

Uma **r-coloração própria** dos vértices de G é uma função $\psi \colon V(G) \to [r]$ tal que $\psi(u) \neq \psi(v)$ para todo $\{u, v\} \in E(G)$. O menor r para o qual existe uma r-coloração própria dos vértices de G é chamado o **número cromático** de G e é denotado por $\chi(\mathbf{G})$.

A.2 Notação assintótica. Sejam f e g funções definidas nos reais tomando valores nos reais positivos.

$\mathbf{g(n) = o(f(n))}$ se $g/f \to 0$ quando $n \to \infty$.

$\mathbf{g(n) = (1 + o(1))f(n)}$ se $g/f \to 1$ quando $n \to \infty$.

$\mathbf{g(n) = O(f(n))}$ se existe uma constante positiva c tal que $g(n) \leq cf(n)$ para todo n suficientemente grande.