1. Definição. *Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ é um Δ-**sistema** se existe um conjunto r tal que para todos x, y elementos distintos de $\mathcal{F}$ temos $x \cap y = r$.*

2. Lema (Lema dos Δ-sistemas). *Seja $\kappa > \omega$ um cardinal regular. Se $\mathcal{F}$ é uma família tal que $|\mathcal{F}| = \kappa$ e $\forall x \in \mathcal{F}(|x| < \omega)$ então existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ com $|\mathcal{B}| = \kappa$ e $\mathcal{B}$ é um Δ-sistema.*

Demonstração Particione a família $\mathcal{F}$ de modo que dois elementos de $\mathcal{F}$ estão na mesma partição se e só se têm a mesma cardinalidade. Como κ é regular, existe $n < \omega$ tal que a partição contendo os elementos de $\mathcal{F}$ de cardinalidade n tem cardinalidade κ. Portanto, podemos assumir que $\forall x \in \mathcal{F}(|x| = n)$.

A prova agora é por indução em n. Se $n = 0$ nada a fazer. Suponha que o lema vale para famílias de cardinalidade κ na qual todo elemento tem cardinalidade $n-1$ e seja $\mathcal{F}$ uma família com κ elementos de cardinalidade n.

Seja $\mathcal{B}'$ uma subfamília maximal de elementos dois-a-dois disjuntos (use Lema de Zorn no subconjunto das partes de $\mathcal{F}$ das subfamílias de elementos 2-a-2 disjuntos com a ordem da inclusão). Se $|\mathcal{B}'| = \kappa$ estamos feitos. Suponha que $|\mathcal{B}'| < \kappa$. Então, se para todo $x \in \bigcup \mathcal{B}'$, x pertence a $< \kappa$ conjuntos de $\mathcal{F}$, como $\mathcal{B}'$ é família de disjuntos maximal todo $F \in \mathcal{F}$ intersecta algum elemento de $\mathcal{B}'$, então $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{x \in \cup \mathcal{B}'} \{F \in \mathcal{F} \colon x \in F\}$ contra κ é regular.

Logo, existe $x \in \bigcup \mathcal{B}'$ tal que $\{F \in \mathcal{F} \colon x \in F\}$ tem cardinalidade κ. Ponha $\mathcal{F}' = \{F \setminus \{x\} : x \in F \wedge F \in \mathcal{F}\}$. Então, por hipótese de indução, existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}'$ um Δ-sistema de cardinalidade κ com raiz r'. Dessa forma, $\mathcal{B} = \{F \cup \{x\} : F \in \mathcal{C}\}$ é um Δ-sistema em $\mathcal{F}$ de cardinalidade κ com raiz $r' \cup \{x\}$. ■

Exercício [Exercício 2 do capítulo 2 do Kunen] Ache uma família de cardinalidade ω_ω tal que todo elemento é finito e nenhuma subfamília de cardinalidade ω_ω forma um Δ-sistema.

Tome $\bigcup_{i<\omega} \{\{i, i \cdot \alpha\} : 1 < \alpha < \omega_{i-2}\}$.

3. Teorema (1.6). *Sejam $\kappa \geq \omega$ e $\theta > \kappa$ regular tal que $\forall \alpha < \theta(|{}^{<\kappa}\alpha| < \theta)$. Se $\mathcal{F}$ é tal que $|\mathcal{F}| \geq \theta$ e $\forall x \in \mathcal{F}(|x| < \kappa)$ então existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ com $|\mathcal{B}| = \theta$ e $\mathcal{B}$ é um Δ-sistema.*

Demonstração Por truncamento, podemos tomar $|\mathcal{F}| = \theta$. Note que

$$\left|\bigcup \mathcal{F}\right| \leq \sum_{x \in \mathcal{F}} |x| = \theta \otimes \sup\{|x| \colon x \in \mathcal{F}\} = \theta,$$

assim podemos tomar $\bigcup \mathcal{F} \subseteq \theta$. Ainda, $\forall x \in \mathcal{F}_1(|x| < \kappa)$ logo $\operatorname{type}(x) < \kappa$.

Considere a partição de $\mathcal{F}$, para $\alpha < \kappa$

$$\mathcal{A}_\alpha = \{x \in \mathcal{F} \colon \operatorname{type}(x) = \alpha\}.$$

Então $|\mathcal{F}| = |\dot{\bigcup}_{\alpha<\kappa} \mathcal{A}_\alpha|$ e como θ é regular existe $\rho < \kappa$ tal que $\mathcal{A}_\rho$ tem cardinalidade θ.

Então fixemos ρ e $\mathcal{F}_1 = \{x \in \mathcal{F} \colon \operatorname{type}(x) = \rho\}$. Para cada $x \in \mathcal{F}_1$ escrevemos $x = \{x(\xi) \colon \xi < \rho\}$. Agora, observe que

(a). Para todo $\alpha < \theta$ temos $|\{x \in \mathcal{F}_1 \colon x \subseteq \alpha\}| < \theta$. De fato, se $x \subseteq \alpha$ então $\langle x(\xi) \colon \xi \in \rho \rangle$ é um elemento de ${}^{<\kappa}\alpha$ e $|{}^{<\kappa}\alpha| < \theta$.
(b). $\bigcup \mathcal{F}_1$ é ilimitado em θ. De fato, segue de **(a)** e de $|\mathcal{F}_1| = \theta$, que para todo $\alpha < \theta$ existe $x \in \mathcal{F}_1$ não contido em α, i.e. existem $x_\alpha \in \mathcal{F}_1$ e $\xi_\alpha < \rho$ tais que $x_\alpha(\xi_\alpha) \geq \alpha$.

De θ regular, temos que *existe ξ tal que $\{x(\xi) \colon x \in \mathcal{F}_1\}$ é ilimitado em θ.* Caso contrário, para todo $\xi < \rho$ existe $\beta_\xi < \theta$ tal que para todo $x \in \mathcal{F}_1$ temos $x(\xi) < \beta_\xi$. Se $\alpha < \theta$, por **(b)**, existe $x_\alpha(\xi_\alpha) \geq \alpha$. Por outro lado, $x(\xi_\alpha) < \beta_{\xi_\alpha} (\forall x \in \mathcal{F}_1)$, ou seja, os β_ξ's $(\xi < \rho)$ acima são ilimitados em θ, contra o fato de θ ser regular.

Ponha ξ_0 o mínimo desses ξ's e

$$\alpha_0 = \sup \{x(\eta) + 1 \colon x \in \mathcal{F}_1 \wedge \eta < \xi_0\}.$$

Então, $\alpha_0 < \theta$ e $x(\eta) < \alpha_0$ para todo $x \in \mathcal{F}_1$ e todo $\eta < \xi_0$.

Por recursão transfinita sobre $\mu < \theta$ tome $x_\mu \in \mathcal{F}_1$ tal que

$$x_\mu(\xi_0) > \max\big(\alpha_0, \sup\{x_\nu(\eta) \colon \nu < \mu \wedge \eta < \rho\}\big),$$

isso sempre é possível pois $\{x(\xi) \colon x \in \mathcal{F}_1\}$ é ilimitado em θ e $\sup\{x_\nu(\eta) \colon \nu < \mu \wedge \eta < \rho\}$ não atinge θ regular.

Ponha $\mathcal{F}_2 = \{x_\mu \in \mathcal{F}_1 \colon \mu < \theta\}$. Então $|\mathcal{F}_2| = \theta$ e para todos x, y distintos em $\mathcal{F}_2$ temos que $x \cap y \subseteq \alpha_0$. Como $|{}^{<\kappa}\alpha_0| < \theta$ e θ é regular, existem $r \subseteq \alpha_0$ e $\mathcal{B}$ subfamília de $\mathcal{F}_2$ de cardinalidade θ tal que $\forall x \in \mathcal{B}(x \cap \alpha_0 = r)$. Portanto, $\mathcal{B}$ é um Δ-sistema com raiz r. ■

Uma conjectura de US$ 1,000.

Usamos a notação

$$(\lambda, \kappa) \to \Delta(\theta)$$

para dizer que toda família de λ conjuntos de cardinalidade κ contém um Δ-sistema de tamanho θ. Ponha $\lambda(\kappa, \theta) = \min\{\lambda \colon (\lambda, \kappa) \to \Delta(\theta)\}$.

Problema: dados κ e θ quanto vale $\lambda(\kappa, \theta)$? Quando pelo menos um de κ e θ é infinito foi completamente resolvido por P. Erdős e R. Rado. Para finitos, está em aberto. A conjectura de US$ 1,000 de Erdős e Rado é

Conjectura. *Existe uma constante c tal que $\lambda(n, 3) < c^n$.*

O que se sabe é

$$\lambda(n, 3) < n! \left(\frac{c \log n}{\log \log n}\right)^{-n},$$

devido a Kostochka (com um prêmio de consolação de 100 dolares).