



Universidade Federal do ABC

Universidade Federal do ABC

Pós-graduação em Engenharia Elétrica

# Aplicações de Conversores Estáticos de Potência

---

José L. Azcue Puma, Prof. Dr.

- ✓ *Conversores CC/CC*
  - ✓ *Circuito equivalente em CA (modelo para pequenos sinais)*
- ✓ *Revisão – diagramas de Bode*

# Introdução

Objetivo: manter  $v(t)$  no valor constante  $V$ .

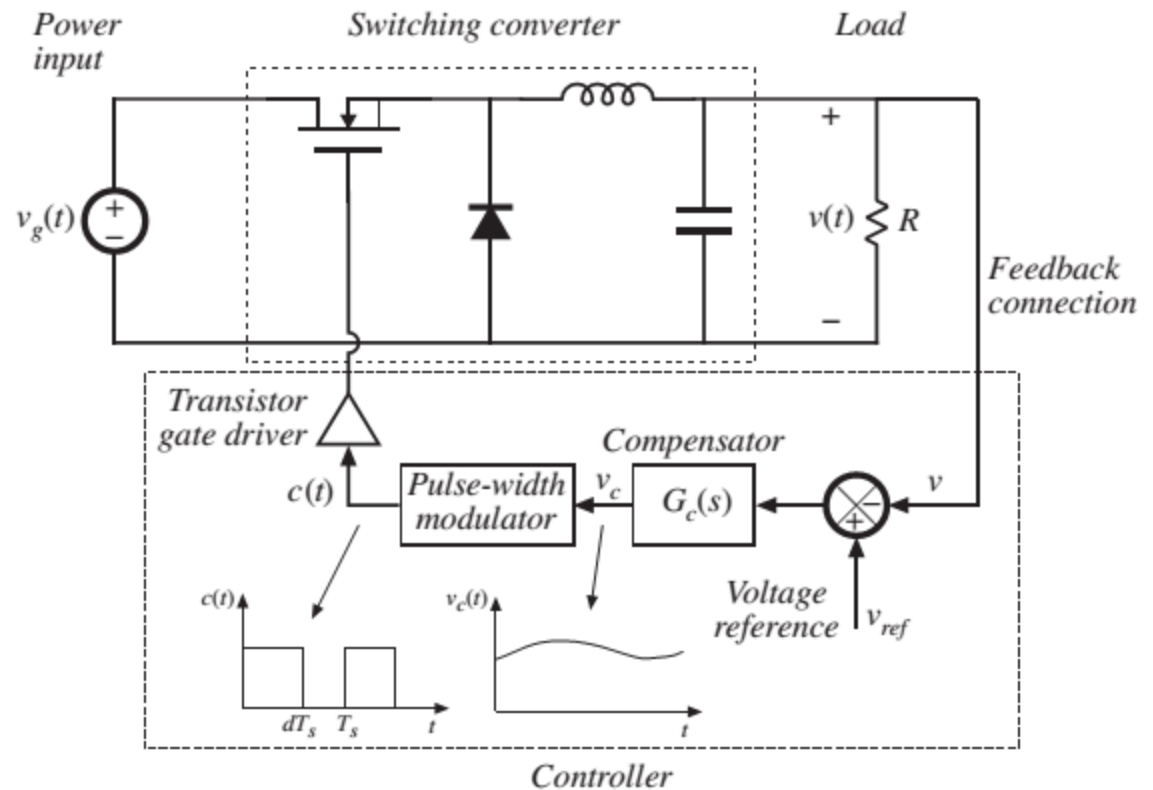
Há distúrbios em:

- $V_g(t)$  (entrada)
- $R$  (carga)

Há incertezas:

- Nos valores dos componentes.
- $V_g(t)$  (entrada)
- $R$  (carga)

## Sistema de controle para conversor Buck



# Resposta às variações CA

Suponha que o sinal de controle varie senoidalmente

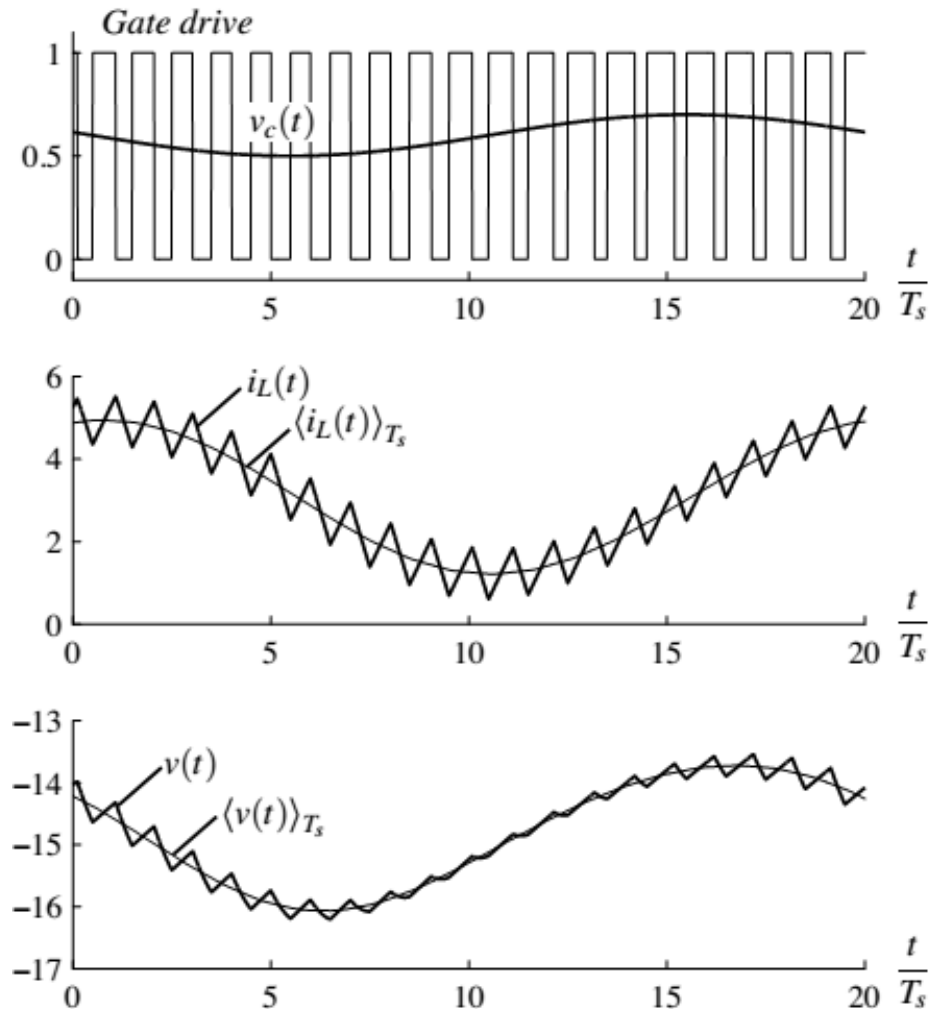
$$v_c(t) = V_c + V_{cm} \cos \omega_m t$$

Em consequencia o ciclo de trabalho será também modulado senoidalmente

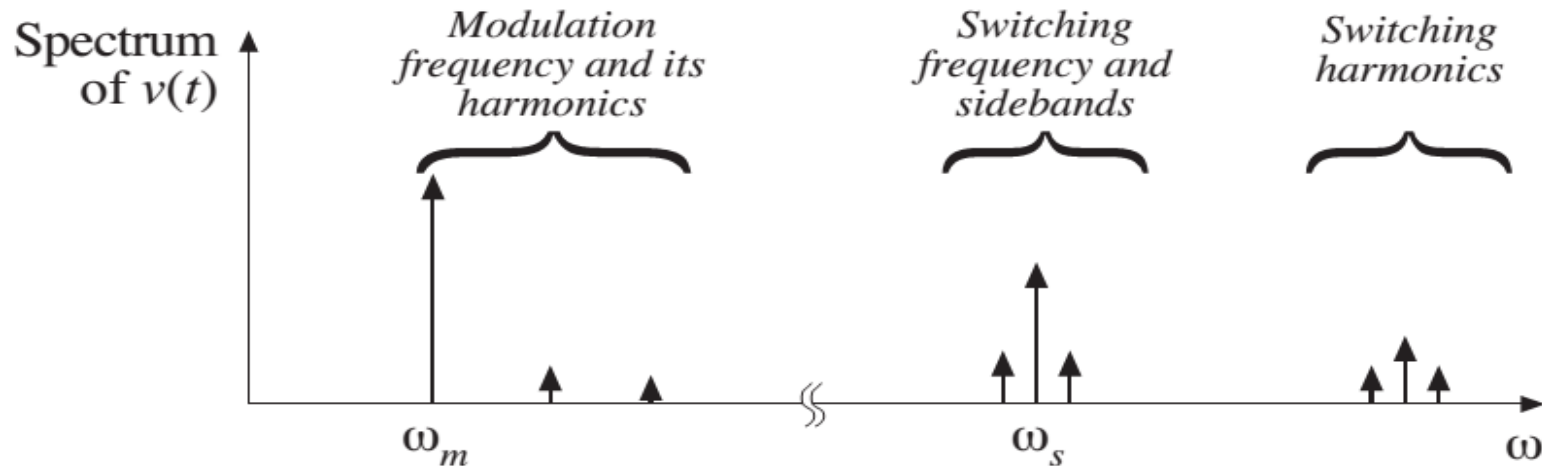
$$d(t) = D + D_m \cos \omega_m t$$

Suponha que  $D$  e  $D_m$  são constantes ( $|D_m| \ll D$ ), e a frequência de modulação ( $\omega_m$ ) é muito menor que a frequência de chaveamento

$$\omega_s = 2\pi f_s$$



# Espectro de Frequências da tensão de saída



Contem frequências na:

- Frequência de modulação e suas harmônicas.
- Frequência de chaveamento e suas harmônicas.
- Bandas laterais da frequência de chaveamento.
- Com uma pequena ondulação de chaveamento, componentes de altas freq. (harmônicas de chaveamento e bandas laterais) são pequenas.
- Se a ondulação é desprezada, então as componentes de baixas freq. se mantem (freq. de modulação e suas harmônicas).

# Modelo dinâmico (modelo CA)

## Objetivos

- Predizer o comportamento das tensões e correntes do conversor com variações (distúrbios) de **baixa frequência** na **razão cíclica** e na **tensão de entrada**.
- Ignorar ondulações e harmônicos produzidos pelo chaveamento dos interruptores.

## Abordagem

- Calcular o **valor médio** das formas de onda em cada período de chaveamento para remover os harmônicos produzidos pelas comutações dos interruptores.
- Obter **modelos lineares** (modelo de pequenos sinais) em torno de um ponto quiescente de operação.

## Cálculo do valor médio

Calcular o **valor médio** em um período de chaveamento para remover a ondulação de chaveamento.

$$L \frac{d\langle i_L(t) \rangle_{T_s}}{dt} = \langle v_L(t) \rangle_{T_s}$$
$$C \frac{d\langle v_C(t) \rangle_{T_s}}{dt} = \langle i_C(t) \rangle_{T_s}$$

Sendo

$$\langle x(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s/2}^{t+T_s/2} x(\tau) d\tau$$

Em **regime permanente**

$$\langle v_L(t) \rangle_{T_s} = 0$$
$$\langle i_C(t) \rangle_{T_s} = 0$$

A tensão média no indutor e a corrente média no capacitor são nulas.

Por causa do balanço de fluxo concatenado no indutor e de carga no capacitor.

## Cálculo do valor médio

No entanto, no **regime transitório** estes princípios **não são validos**. As componentes em baixas frequências das formas de onda no indutor e no capacitor podem ser obtidas usando o valor médio das variáveis em um período de chaveamento:

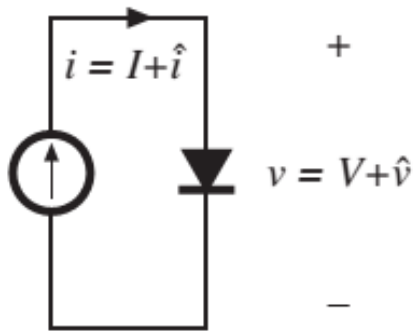
$$L \frac{d\langle i_L(t) \rangle_{T_s}}{dt} = \langle v_L(t) \rangle_{T_s}$$
$$C \frac{d\langle v_C(t) \rangle_{T_s}}{dt} = \langle i_C(t) \rangle_{T_s}$$

Estes valores médios constituem um sistema de equações diferenciais **não lineares**.

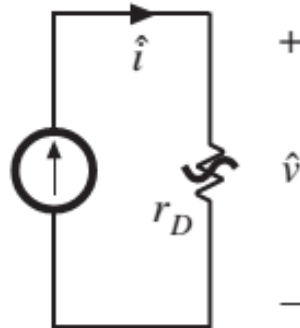
Então, devem ser **linearizadas** para obter o modelo de pequenos sinais do conversor.

# Modelo do diodo para pequenos sinais

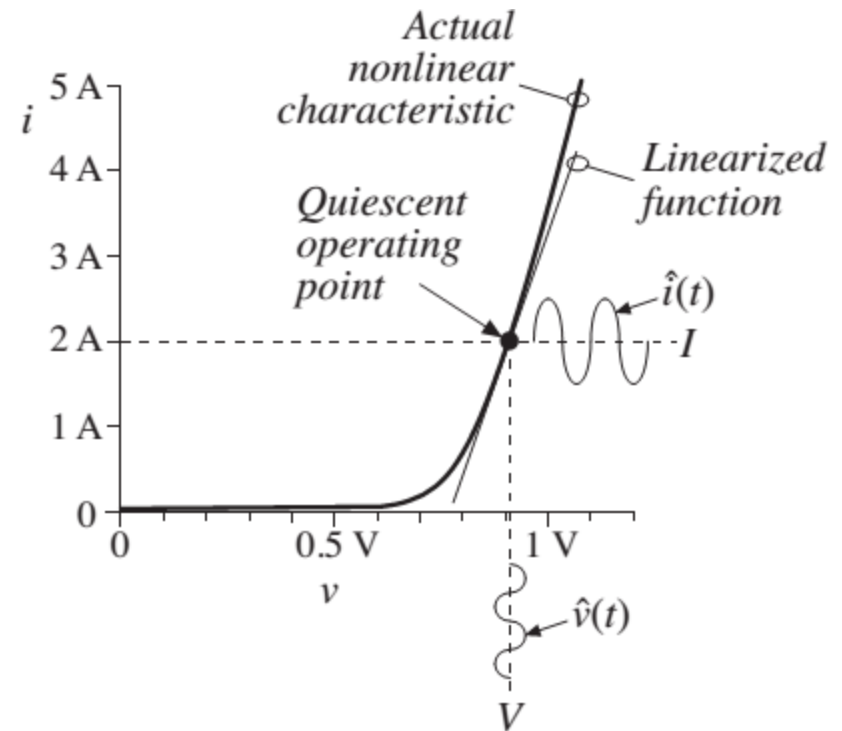
Diodo (não linear), alimentado por uma fonte de corrente CC e uma pequena componente CA



Modelo CA para pequenos sinais



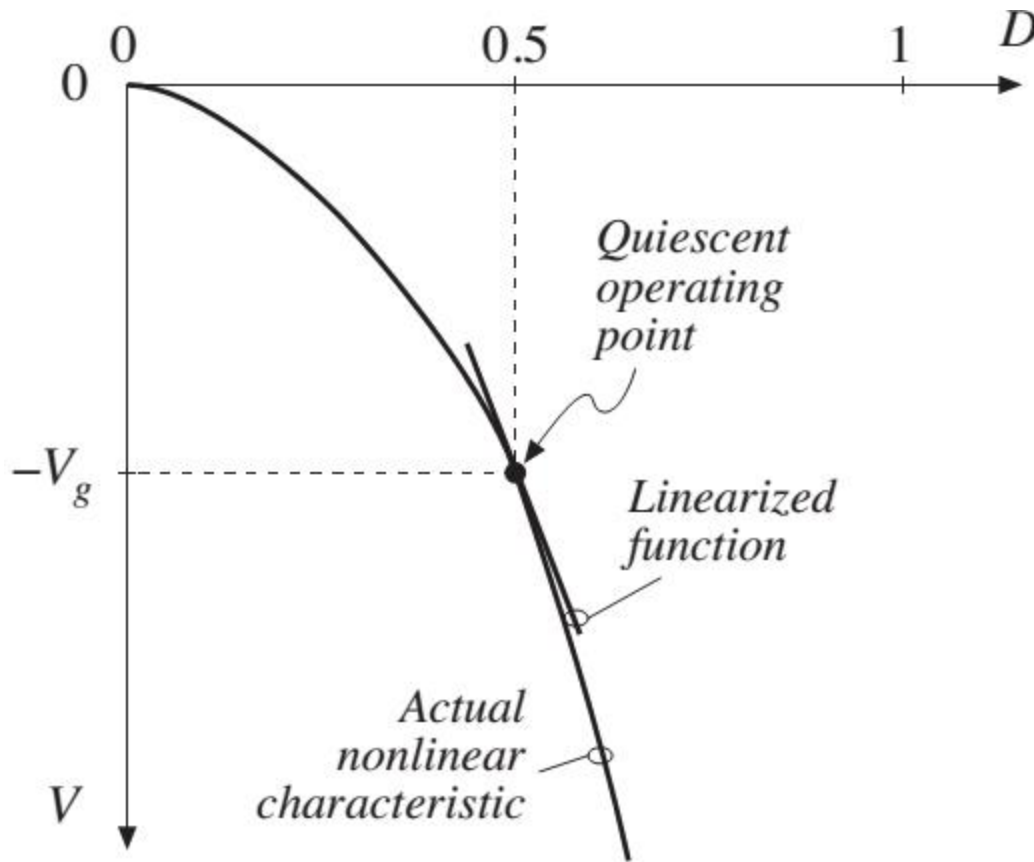
Linearização da característica i-v do diodo no ponto quiescente de operação





# Característica não linear (*Buck-Boost*)

Característica estática não linear entre o sinal de controle e a saída



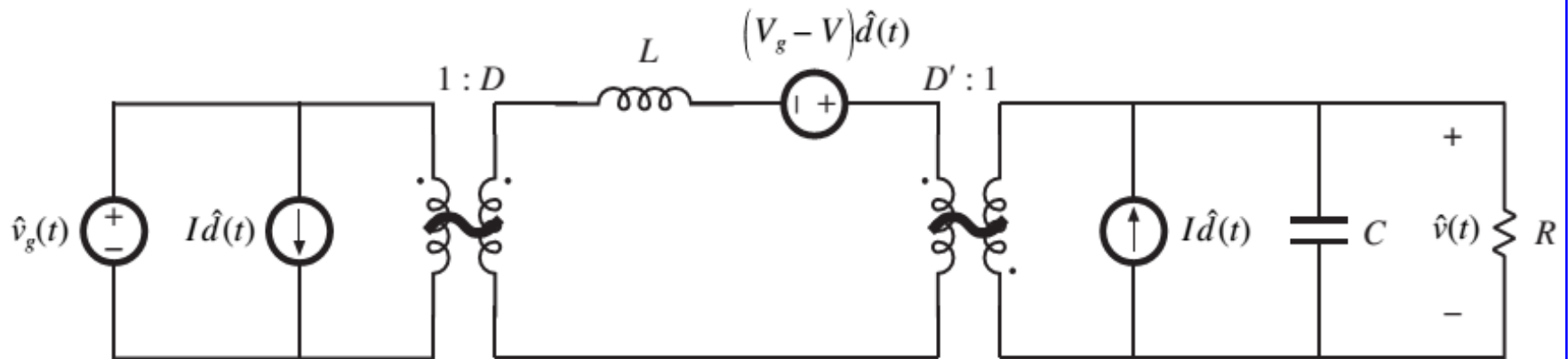
$$V = V_g D / (1 - D)$$

Linearizado no ponto de operação quiescente

$$D = 0.5$$

# Modelo CA para pequenos sinais (*valor médio*)

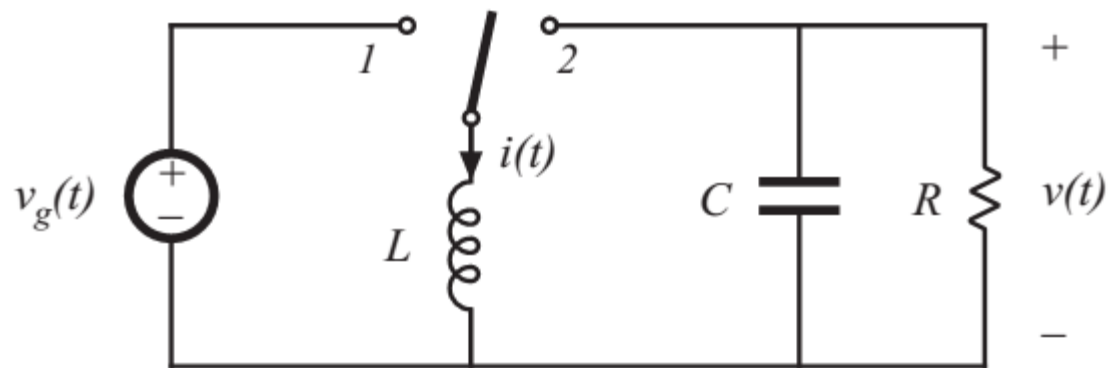
Circuito equivalente do modelo CA de pequenos sinais



*Conversor Buck-Boost*

# Modelo Dinâmico (modelo CA)

Conversor *Buck-Boost*

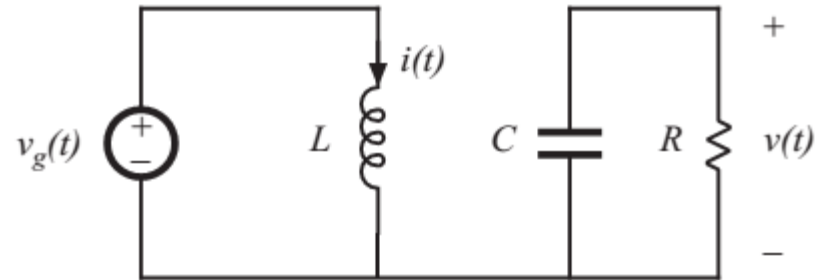


# Chave na posição 1

A tensão no indutor e a corrente no capacitor são:

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = v_g(t)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{v(t)}{R}$$



Substitua as formas de onda por suas componentes de baixa frequência (**obtidas através do valor médio**)

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \approx \langle v_g(t) \rangle_{T_s}$$

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \approx -\frac{\langle v(t) \rangle_{T_s}}{R}$$

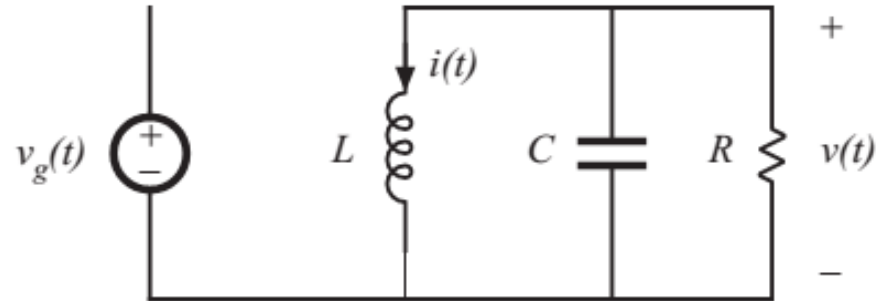
## Chave na posição 2

A tensão no indutor e a corrente no capacitor são:

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = v(t)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = -i(t) - \frac{v(t)}{R}$$

Substitua as formas de onda por suas componentes de baixa frequência (obtidas através do valor médio)



$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \approx \langle v(t) \rangle_{T_s}$$

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \approx -\langle i(t) \rangle_{T_s} - \frac{\langle v(t) \rangle_{T_s}}{R}$$

## Valor médio da tensão no indutor

O valor médio é obtido através de:

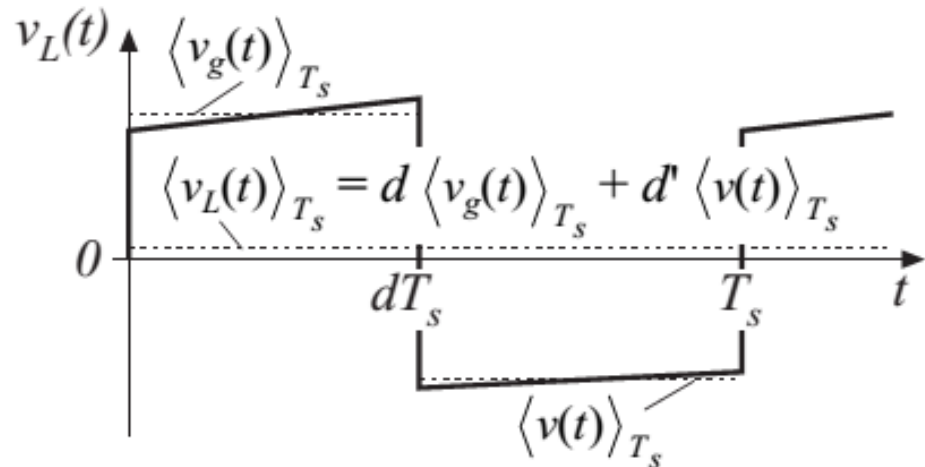
$$\langle x_L(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} x(\tau) d\tau$$

Aplicando a definição na tensão do indutor

$$\langle v_L(t) \rangle_{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_L(\tau) d\tau \approx d(t) \langle v_g(t) \rangle_{T_s} + d'(t) \langle v(t) \rangle_{T_s}$$

Substituindo em:  $L \frac{d\langle i_L(t) \rangle_{T_s}}{dt} = \langle v_L(t) \rangle_{T_s}$

$$L \frac{d\langle i(t) \rangle_{T_s}}{dt} = d(t) \langle v_g(t) \rangle_{T_s} + d'(t) \langle v(t) \rangle_{T_s}$$



Esta equação descreve como as componentes de baixa freq. da forma de onda da corrente no indutor evolui no tempo.

# Valor médio da corrente no capacitor

O valor médio da corrente no capacitor

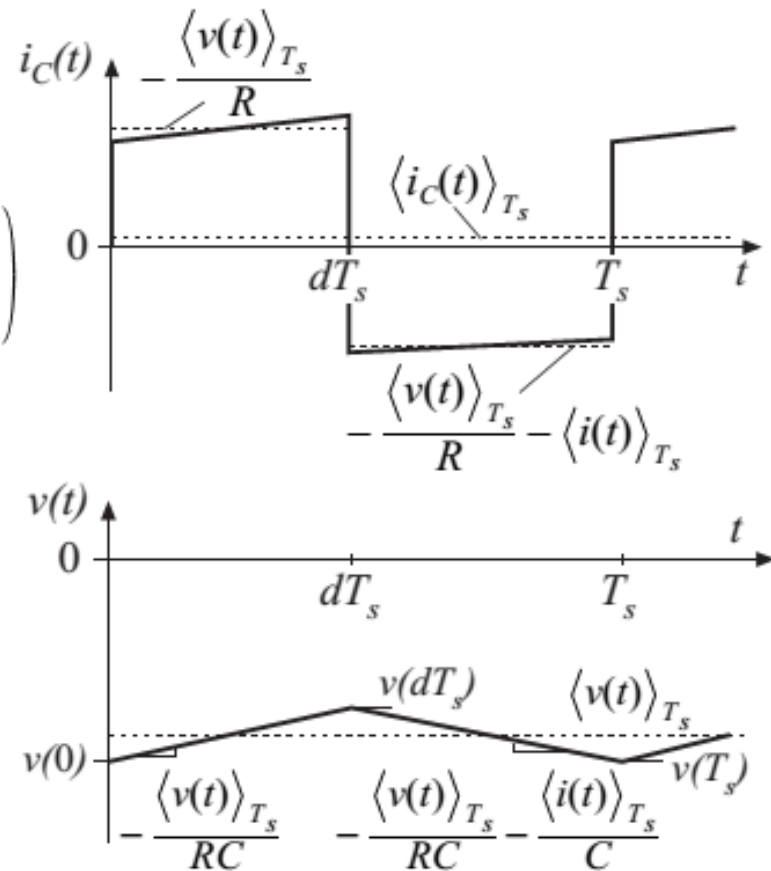
$$\langle i_C(t) \rangle_{T_s} = d(t) \left( -\frac{\langle v(t) \rangle_{T_s}}{R} \right) + d'(t) \left( -\langle i(t) \rangle_{T_s} - \frac{\langle v(t) \rangle_{T_s}}{R} \right)$$

Substituindo em:

$$C \frac{d\langle v_C(t) \rangle_{T_s}}{dt} = \langle i_C(t) \rangle_{T_s}$$

Tem-se:

$$C \frac{d\langle v(t) \rangle_{T_s}}{dt} = -d'(t) \langle i(t) \rangle_{T_s} - \frac{\langle v(t) \rangle_{T_s}}{R}$$



Forma de onda da corrente e tensão no capacitor

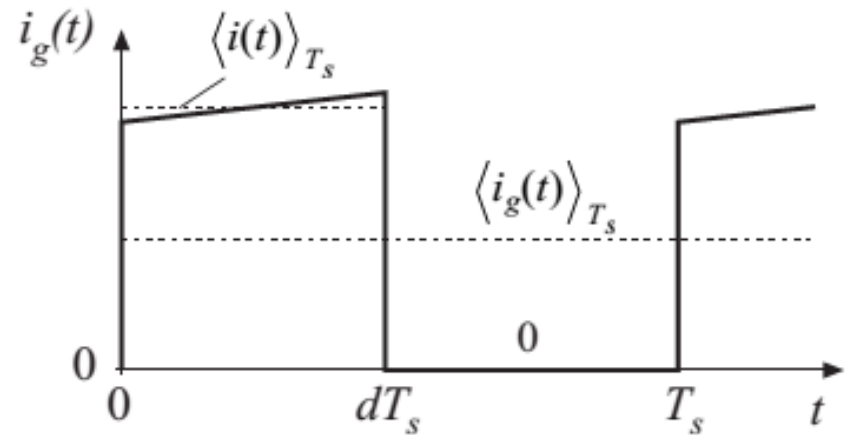
## Valor médio da corrente de entrada

A forma de onda da corrente de entrada do conversor Buck-Boost é:

$$i_g(t) = \begin{cases} \langle i(t) \rangle_{T_s} & \text{during subinterval 1} \\ 0 & \text{during subinterval 2} \end{cases}$$

Valor médio:

$$\langle i_g(t) \rangle_{T_s} = d(t) \langle i(t) \rangle_{T_s}$$



Forma de onda da corrente de entrada



## Linearização

Equação do conversor em valores médios

$$L \frac{d\langle i(t) \rangle_{T_s}}{dt} = d(t) \langle v_g(t) \rangle_{T_s} + d'(t) \langle v(t) \rangle_{T_s}$$
$$C \frac{d\langle v(t) \rangle_{T_s}}{dt} = -d'(t) \langle i(t) \rangle_{T_s} - \frac{\langle v(t) \rangle_{T_s}}{R}$$
$$\langle i_g(t) \rangle_{T_s} = d(t) \langle i(t) \rangle_{T_s}$$

São expressões **não lineares** por causa do **produto de variáveis** que **dependem do tempo**.

## Modelo de pequenos sinais

Linearizar em torno do ponto quiescente de operação:  
Se o conversor está alimentado por algumas entradas em regime permanente (*ponto quiescente de operação*)

$$d(t) = D$$
$$\langle v_g(t) \rangle_{T_s} = V_g$$

Então, após o transitório, tem-se que a corrente no indutor, a tensão no capacitor e a corrente de entrada

$$\langle i(t) \rangle_{T_s}, \langle v(t) \rangle_{T_s}, \langle i_g(t) \rangle_{T_s}$$

Atingiram seus valores quiescentes  $I$ ,  $V$  e  $I_g$  dado pelo análise em regime permanente (aula passada).

$$V = -\frac{D}{D'} V_g$$
$$I = -\frac{V}{D' R}$$
$$I_g = D I$$

## Perturbação

A tensão de entrada e o ciclo de trabalho são iguais a uma componente CC mais uma pequena variação CA.

$$\begin{aligned}\langle v_g(t) \rangle_{T_s} &= V_g + \hat{v}_g(t) \\ d(t) &= D + \hat{d}(t)\end{aligned}$$

Em resposta, as tensões e correntes do conversor serão iguais aos valores quiescentes mais umas pequenas variações CA.

$$\begin{aligned}\langle i(t) \rangle_{T_s} &= I + \hat{i}(t) \\ \langle v(t) \rangle_{T_s} &= V + \hat{v}(t) \\ \langle i_g(t) \rangle_{T_s} &= I_g + \hat{i}_g(t)\end{aligned}$$

## Consideração para pequenas ondulações

Se a variação CA é muito menor em magnitude que o seu respectivo valor quiescente

$$|\hat{v}_g(t)| \ll |V_g|$$

$$|\hat{d}(t)| \ll |D|$$

$$|\hat{i}(t)| \ll |I|$$

$$|\hat{v}(t)| \ll |V|$$

$$|\hat{i}_g(t)| \ll |I_g|$$

Então as equações do conversor podem ser linearizadas.

## Perturbação na equação do indutor

$$L \frac{d\langle i(t) \rangle_{T_s}}{dt} = \underline{d(t)} \langle v_g(t) \rangle_{T_s} + \underline{d'(t)} \langle v(t) \rangle_{T_s}$$

$$L \frac{d(I + \hat{i}(t))}{dt} = \underline{(D + \hat{d}(t))} (V_g + \hat{v}_g(t)) + \underline{(D' - \hat{d}(t))} (V + \hat{v}(t))$$

Observe que

$$d'(t) = (1 - d(t)) = 1 - (D + \hat{d}(t)) = D' - \hat{d}(t) \quad \text{with } D' = 1 - D$$

Multiplicando e agrupando adequadamente

$$L \left( \frac{dI}{dt} + \frac{d\hat{i}(t)}{dt} \right) = \underbrace{(DV_g + D'V)}_{\text{Dc terms}} + \underbrace{(D\hat{v}_g(t) + D'\hat{v}(t) + (V_g - V)\hat{d}(t))}_{\text{1}^{\text{st}} \text{ order ac terms (linear)}} + \underbrace{\hat{d}(t)(\hat{v}_g(t) - \hat{v}(t))}_{\text{2}^{\text{nd}} \text{ order ac terms (nonlinear)}}$$

## Perturbação na equação do indutor

$$L \left( \frac{dI^0}{dt} + \frac{d\hat{i}(t)}{dt} \right) = \underbrace{(DV_g + D'V)}_{\text{Dc terms}} + \underbrace{\left( D\hat{v}_g(t) + D'\hat{v}(t) + (V_g - V) \hat{d}(t) \right)}_{\substack{1^{\text{st}} \text{ order ac terms} \\ \text{(linear)}}} + \underbrace{\hat{d}(t) (\hat{v}_g(t) - \hat{v}(t))}_{\substack{2^{\text{nd}} \text{ order ac terms} \\ \text{(nonlinear)}}$$

Podem ser identificados três termos:

- ✓ Os termos CC, que contêm unicamente quantidades CC.
- ✓ Termos CA de primeira ordem, contêm uma termo CA multiplicada por um termo constante (termo CC).
- ✓ Termos CA de segunda ordem, contêm o produto de dois termos CA (não linear).

## Desprezando os termos CA de segunda ordem

$$L \left( \frac{dI}{dt} + \frac{d\hat{i}(t)}{dt} \right) = \underbrace{(DV_g + D'V)}_{\text{Dc terms}} + \underbrace{\left( D\hat{v}_g(t) + D'\hat{v}(t) + (V_g - V) \hat{d}(t) \right)}_{\substack{1^{\text{st}} \text{ order ac terms} \\ \text{(linear)}}} + \underbrace{\hat{d}(t) (\hat{v}_g(t) - \hat{v}(t))}_{\substack{2^{\text{nd}} \text{ order ac terms} \\ \text{(nonlinear)}}$$

Considerando

$$|\hat{v}_g(t)| \ll |V_g|$$

$$|\hat{d}(t)| \ll |D|$$

$$|\hat{i}(t)| \ll |I|$$

$$|\hat{v}(t)| \ll |V|$$

$$|\hat{i}_g(t)| \ll |I_g|$$

Os termos de segunda ordem são muito mais pequenos que os termos de primeira ordem.

**Exemplo:**

$$|\hat{d}(t) \hat{v}_g(t)| \ll |D \hat{v}_g(t)| \quad \text{when} \quad |\hat{d}(t)| \ll D$$

Por tanto, pode-se desprezar os termos de segunda ordem. Assim também, os termos CC são iguais em ambos os lados da equação.

## Linearizando a equação do indutor

$$L \left( \frac{dI}{dt} + \frac{d\hat{i}(t)}{dt} \right) = \underbrace{(DV_g + D'V)}_{\text{Dc terms}} + \underbrace{\left( D\hat{v}_g(t) + D'\hat{v}(t) + (V_g - V) \hat{d}(t) \right)}_{\substack{1^{\text{st}} \text{ order ac terms} \\ \text{(linear)}}} + \underbrace{\hat{d}(t) (\hat{v}_g(t) - \hat{v}(t))}_{\substack{2^{\text{nd}} \text{ order ac terms} \\ \text{(nonlinear)}}$$

Desprezando o termo CA de segunda ordem e removendo o termo CC (sua soma é igual a zero), tem-se que:

$$L \frac{d\hat{i}(t)}{dt} = D\hat{v}_g(t) + D'\hat{v}(t) + (V_g - V) \hat{d}(t)$$

Esta equação diferencial linear descreve a variação CA de pequeno sinal.

Observe que os valores quiescentes ( $D, D', V, V_g$ ) são consideradas constantes.



## Equação do capacitor

Perturbando a equação do capacitor

$$C \frac{d\langle v(t) \rangle_{T_s}}{dt} = - \underline{d'(t)} \langle i(t) \rangle_{T_s} - \frac{\langle v(t) \rangle_{T_s}}{R}$$

$$C \frac{d(V + \hat{v}(t))}{dt} = - \underline{(D' - \hat{d}(t))} (I + \hat{i}(t)) - \frac{(V + \hat{v}(t))}{R}$$

Multiplicando e agrupando adequadamente

$$C \left( \frac{dV^0}{dt} + \frac{d\hat{v}(t)}{dt} \right) = \underbrace{\left( -D'I - \frac{V}{R} \right)}_{\text{Dc terms}} + \underbrace{\left( -D'\hat{i}(t) - \frac{\hat{v}(t)}{R} + I\hat{d}(t) \right)}_{\substack{1^{\text{st}} \text{ order ac terms} \\ \text{(linear)}}} + \underbrace{\hat{d}(t)\hat{i}(t)}_{\substack{2^{\text{nd}} \text{ order ac term} \\ \text{(nonlinear)}}$$

## Equação do capacitor

$$C \left( \frac{dV^0}{dt} + \frac{d\hat{v}(t)}{dt} \right) = \underbrace{\left( -D'I - \frac{V}{R} \right)}_{\text{Dc terms}} + \underbrace{\left( -D'\hat{i}(t) - \frac{\hat{v}(t)}{R} + I\hat{d}(t) \right)}_{\substack{1^{\text{st}} \text{ order ac terms} \\ \text{(linear)}}} + \underbrace{\hat{d}(t)\hat{i}(t)}_{\substack{2^{\text{nd}} \text{ order ac term} \\ \text{(nonlinear)}}$$

Desprezando os termos CA de segunda ordem e removendo os termos CC (sua soma é igual a zero), tem-se que:

$$C \frac{d\hat{v}(t)}{dt} = -D'\hat{i}(t) - \frac{\hat{v}(t)}{R} + I\hat{d}(t)$$

Esta equação diferencial linear descreve a variação CA de pequeno sinal.

## Valor Médio da Corrente de Entrada

Perturbando a corrente de entrada

$$\langle i_g(t) \rangle_{T_s} = \underline{d(t)} \langle i(t) \rangle_{T_s}$$

$$I_g + \hat{i}_g(t) = \underline{(D + \hat{d}(t))} (I + \hat{i}(t))$$

Multiplicando e agrupando adequadamente

$$\underbrace{I_g}_{Dc \text{ term}} + \underbrace{\hat{i}_g(t)}_{1^{st} \text{ order ac term}} = \underbrace{(DI)}_{Dc \text{ term}} + \underbrace{(D\hat{i}(t) + I\hat{d}(t))}_{1^{st} \text{ order ac terms (linear)}} + \underbrace{\hat{d}(t)\hat{i}(t)}_{2^{nd} \text{ order ac term (nonlinear)}}$$

Desprezando os termos CA de segunda ordem e igualando os termos CC, tem-se que:

$$\hat{i}_g(t) = D\hat{i}(t) + I\hat{d}(t)$$

Esta é a equação diferencial linear de pequeno sinal para a entrada do conversor.

## Circuito equivalente do modelo de pequeno sinal

As equações linearizadas de pequeno sinal são:

$$L \frac{d\hat{i}(t)}{dt} = D\hat{v}_g(t) + D'\hat{v}(t) + (V_g - V) \hat{d}(t)$$

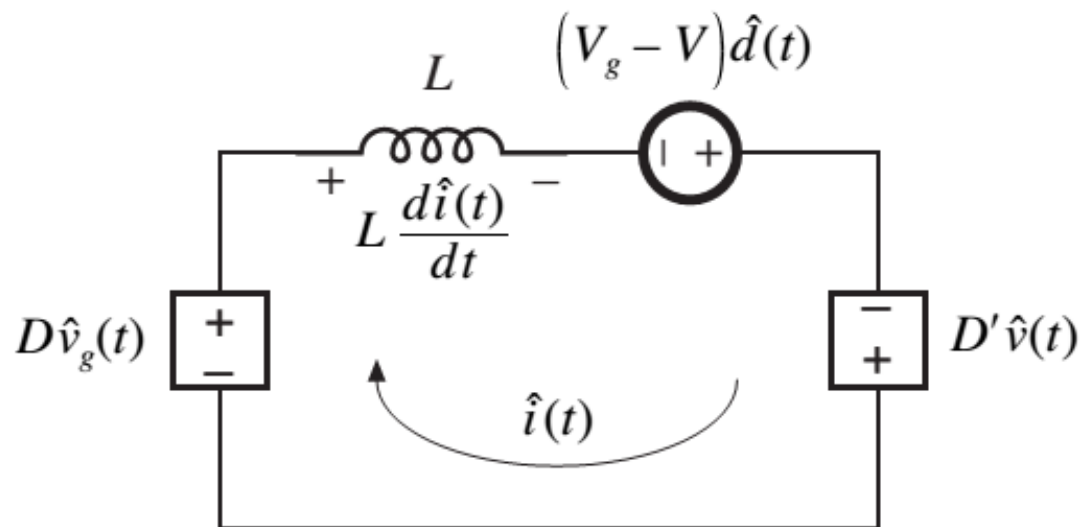
$$C \frac{d\hat{v}(t)}{dt} = -D'\hat{i}(t) - \frac{\hat{v}(t)}{R} + I\hat{d}(t)$$

$$\hat{i}_g(t) = D\hat{i}(t) + I\hat{d}(t)$$

A partir destas equações pode-se deduzir o circuito equivalente.

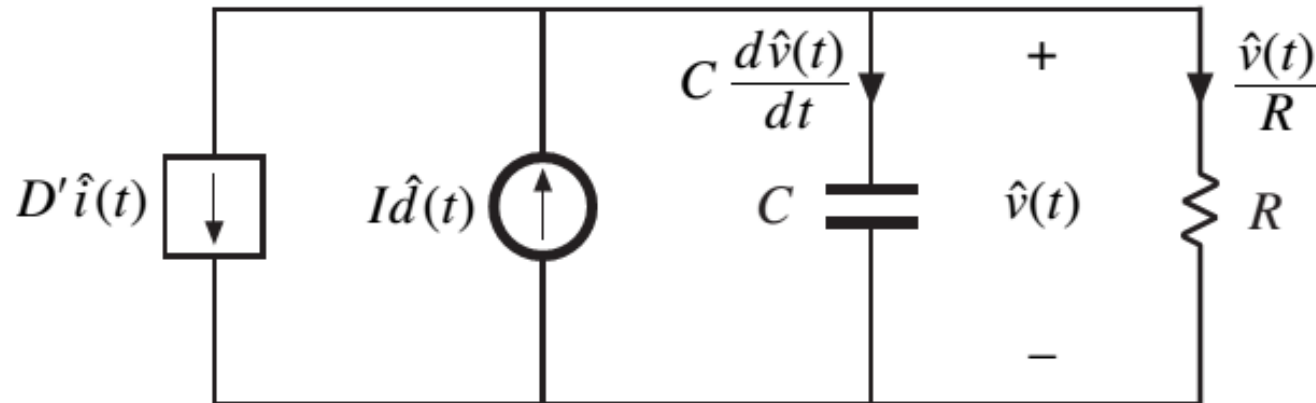
## Tensão do Indutor

$$L \frac{d\hat{i}(t)}{dt} = D\hat{v}_g(t) + D'\hat{v}(t) + (V_g - V)\hat{d}(t)$$



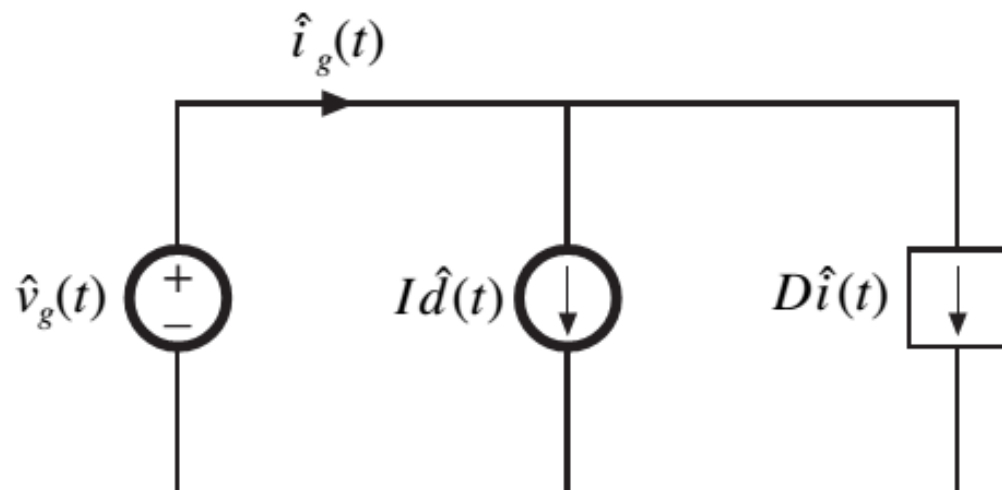
## Corrente do Capacitor

$$C \frac{d\hat{v}(t)}{dt} = -D' \hat{i}(t) - \frac{\hat{v}(t)}{R} + I \hat{d}(t)$$

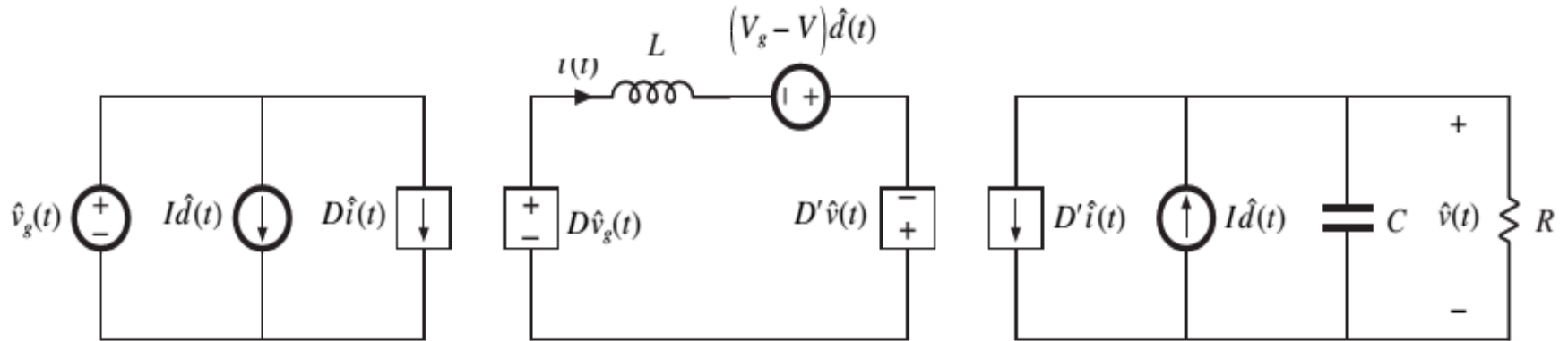


## Corrente de Entrada

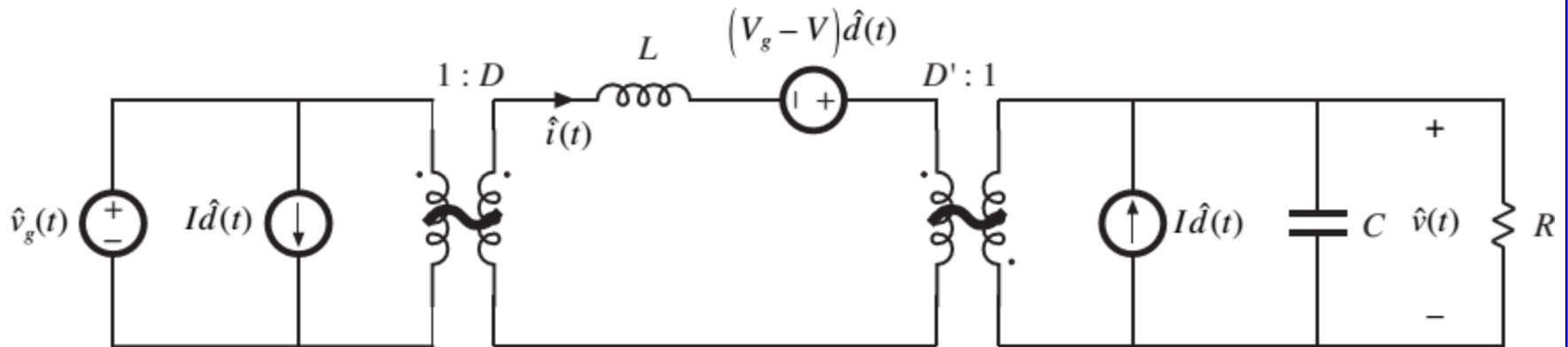
$$\hat{i}_g(t) = D\hat{i}(t) + I\hat{d}(t)$$



# Circuito Equivalente Completo (*Buck-Boost*)



Substituindo as fontes dependentes por transformadores CA ideais

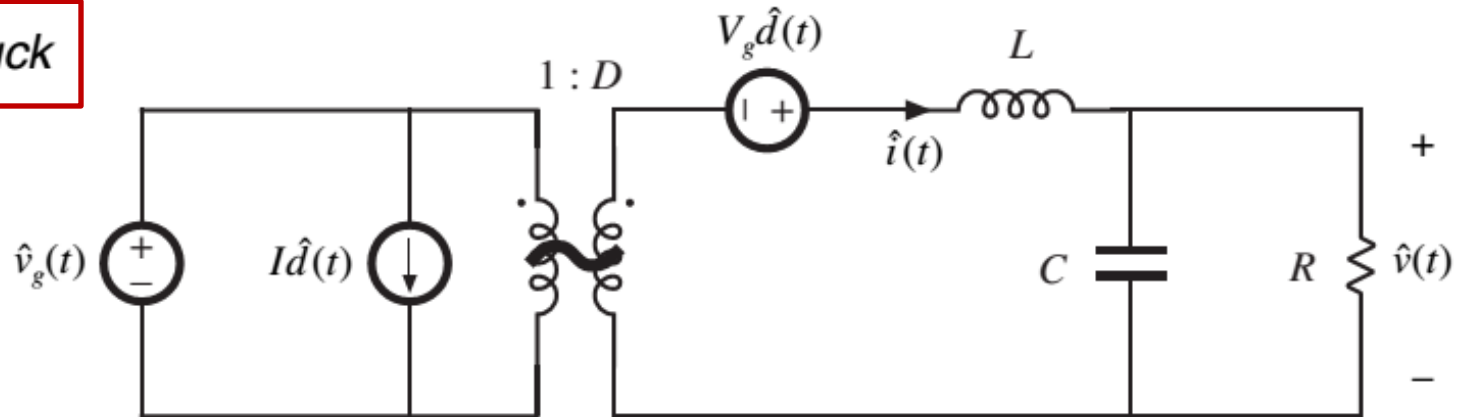


Circuito equivalente do Modelo CA de pequeno sinal (*Buck-Boost*)

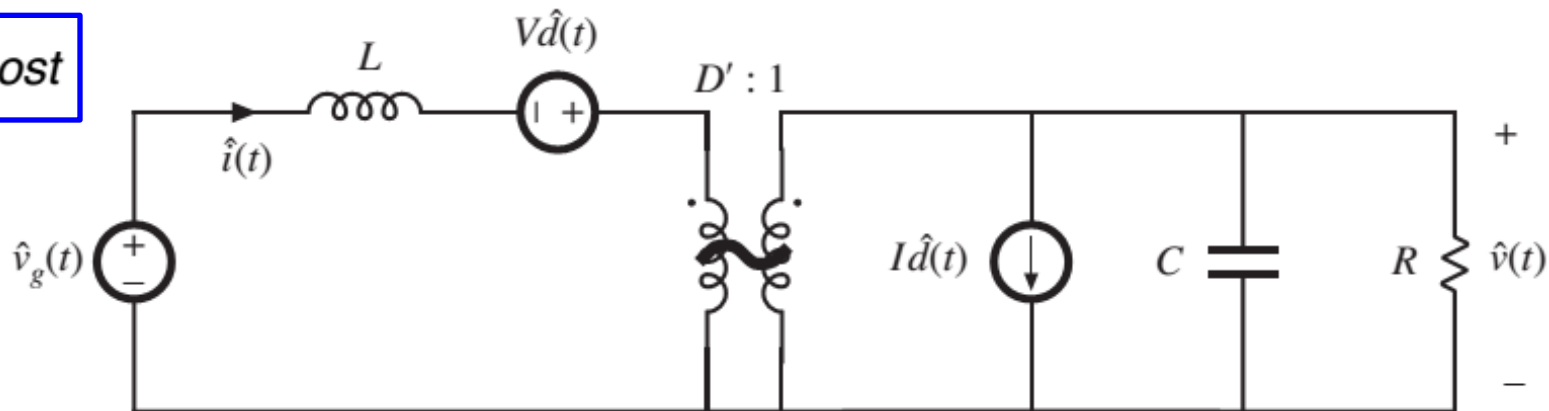


# Circuito Equivalente Completo (*Buck* e *Boost*)

**Buck**



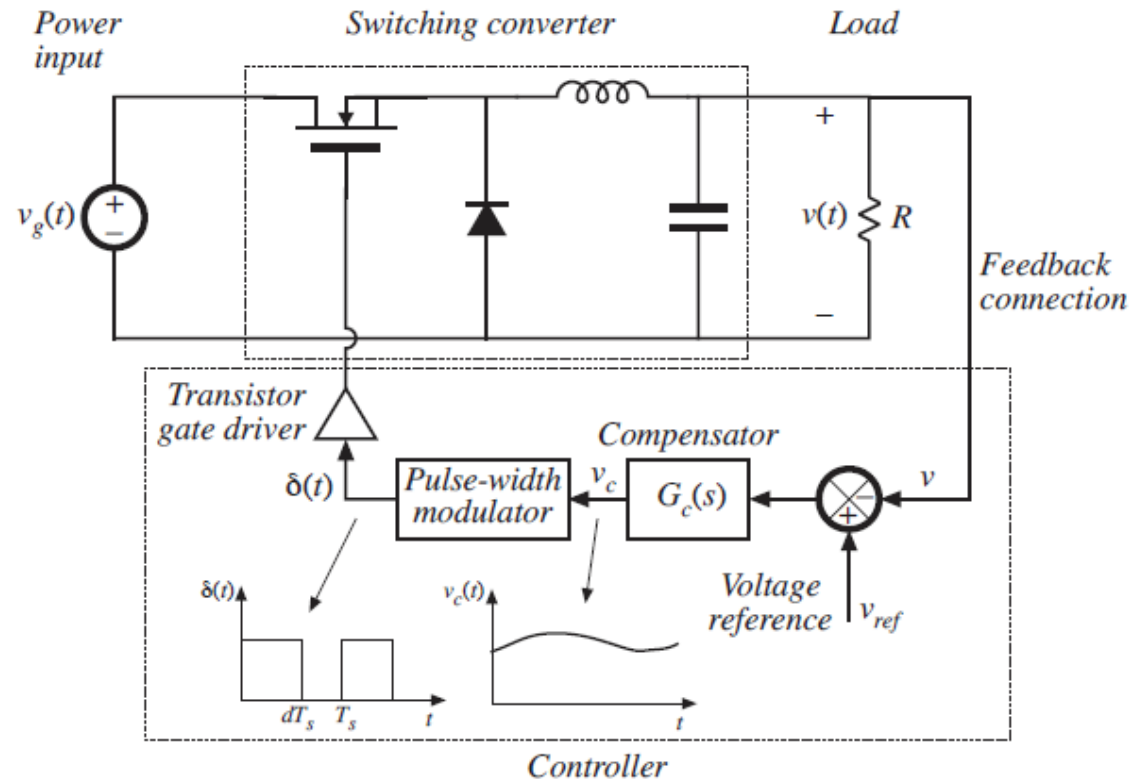
**Boost**



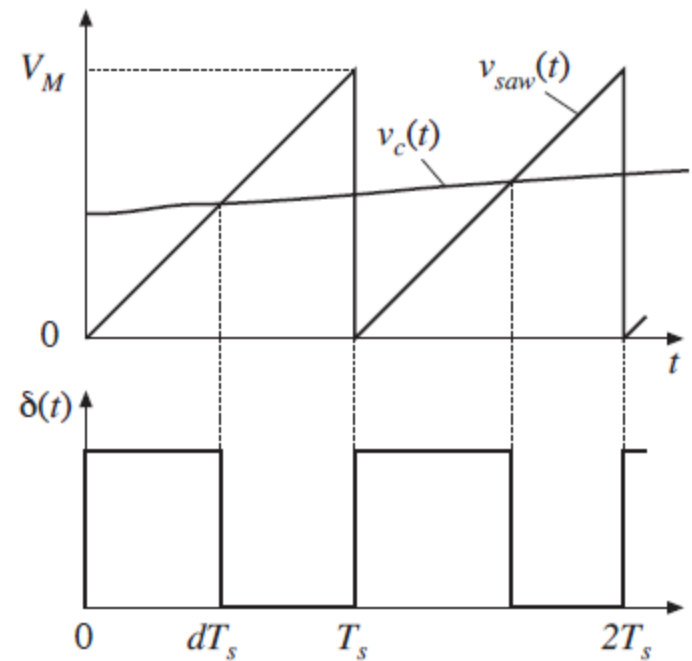
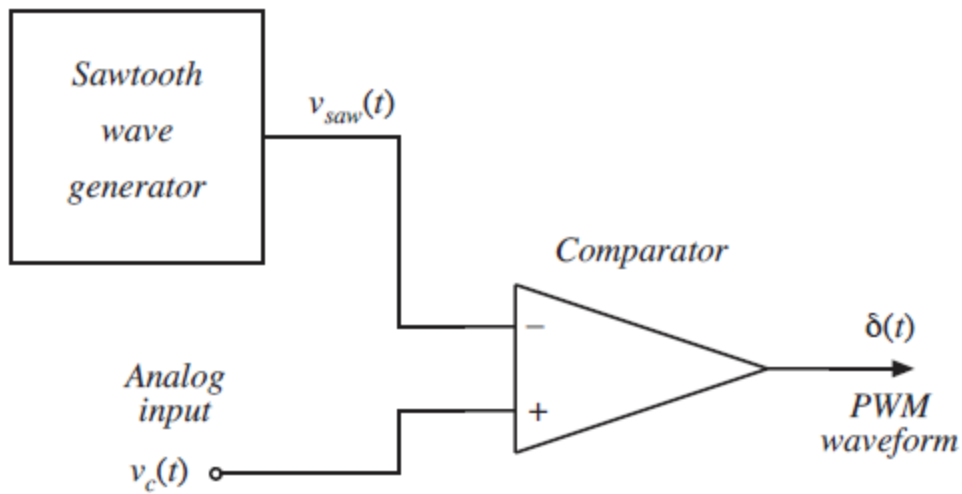
# Modelagem do Modulador de Largura de Pulso

O modulador de largura de pulso converte o sinal de controle ( $v_c(t)$ ) em um sinal de ciclo de trabalho ( $d(t)$ ).

Qual é a relação entre o sinal de controle e o ciclo de trabalho?



# Modulador de Largura de Pulso (MLP)

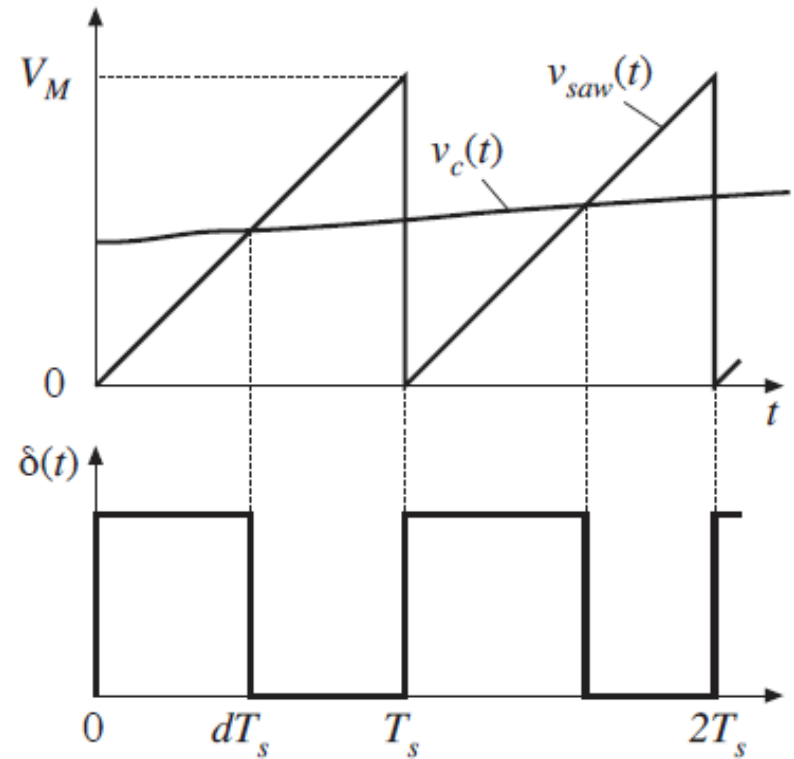


# Equação do MLP

Considerando uma forma de onda dente de serra linear:

$$d(t) = \frac{v_c(t)}{V_M} \quad \text{for } 0 \leq v_c(t) \leq V_M$$

Portanto, o ciclo de trabalho ( $d(t)$ ) é uma função linear do sinal de controle ( $v_c(t)$ )



# Equação Perturbada do MLP

Equação do MLP

$$d(t) = \frac{v_c(t)}{V_M} \quad \text{for } 0 \leq v_c(t) \leq V_M$$

Perturbando:

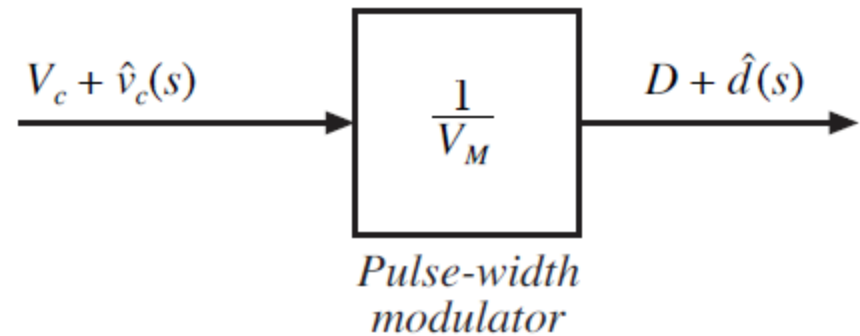
$$v_c(t) = V_c + \hat{v}_c(t)$$

$$d(t) = D + \hat{d}(t)$$

Resultado

$$D + \hat{d}(t) = \frac{V_c + \hat{v}_c(t)}{V_M}$$

Block diagram:

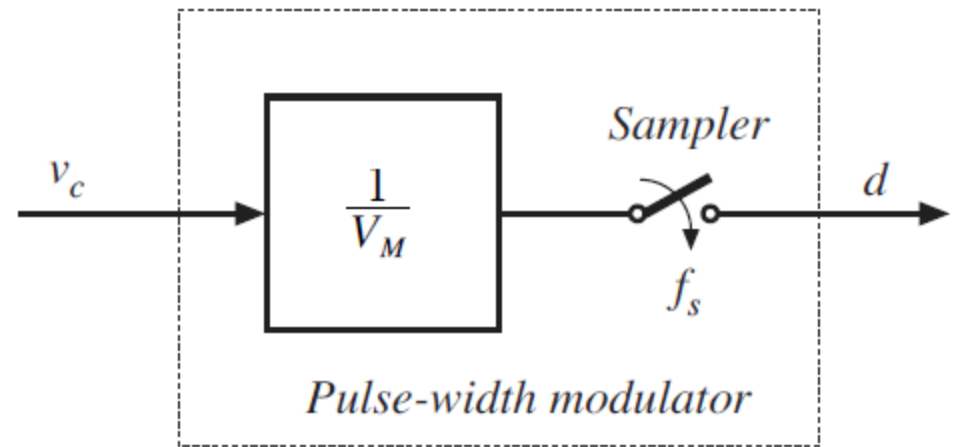


Relações CC e CA:

$$D = \frac{V_c}{V_M}$$
$$\hat{d}(t) = \frac{\hat{v}_c(t)}{V_M}$$

# Amostragem no MLP

A tensão de entrada é uma função contínua no tempo, no entanto, a razão cíclica é atualizada apenas uma vez em cada período de chaveamento.



Portanto, o MLP amostra o sinal de controle, com uma frequência de amostragem igual à frequência de chaveamento.

$$f_{amostragem} > 2 * f_{sinal}$$

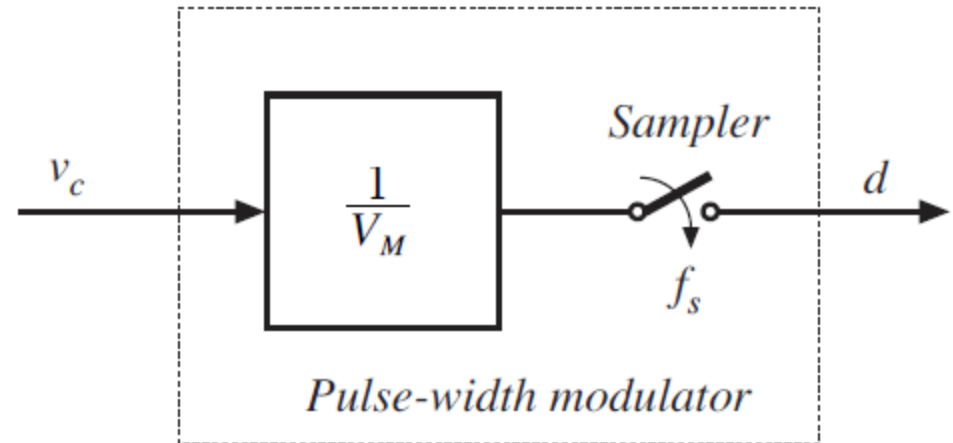
$$f_{sinal} < \frac{f_{amostragem}}{2}$$

$$f_{sinal\ de\ controle} < \frac{f_s}{2}$$

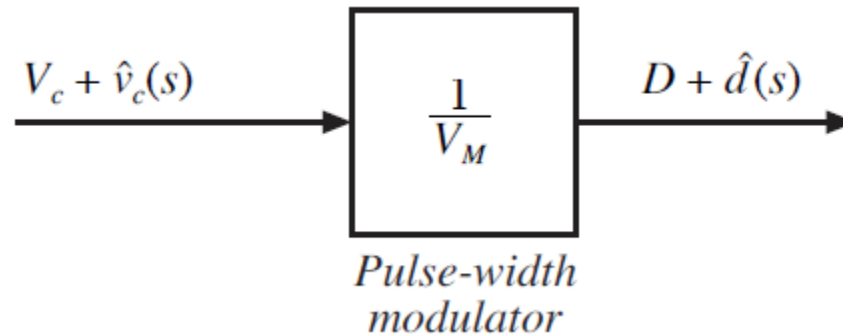
## Amostragem no MLP

Na prática, esse efeito limita as frequências de variação do sinal de controle para valores muito menores que a frequência de chaveamento.

A largura de banda do sistema de controle deve ser suficientemente inferior à freq. de Nyquist ( $f_s/2$ ).



## Amostragem no MLP



Para frequências suficientemente inferiores à frequência de Nyquist ( $\ll f_s/2$ ), pode-se modelar o MLP por um ganho ( $1/V_M$ ).



# Diagramas de Bode

# Revisão - Diagrama de Bode

Decibel

$$\|G\|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(\|G\|)$$

Decibéis de quantidades que tem unidades (por exemplo impedância), padronize antes de calcular o log

$$\|Z\|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}\left(\frac{\|Z\|}{R_{\text{base}}}\right)$$

*Table 8.1. Expressing magnitudes in decibels*

<i>Actual magnitude</i>	<i>Magnitude in dB</i>
1/2	- 6dB
1	0 dB
2	6 dB
5 = 10/2	20 dB - 6 dB = 14 dB
10	20dB
1000 = 10 <sup>3</sup>	3 · 20dB = 60 dB

5Ω é equivalente a 14 dB em relação à impedância base de  $R_{\text{base}} = 1\Omega$ , também conhecido como  $14\text{dB}\Omega$

# Diagrama de Bode de $f^n$

Funções que variam em múltiplos de  $f^n$  são linhas retas, isto é:

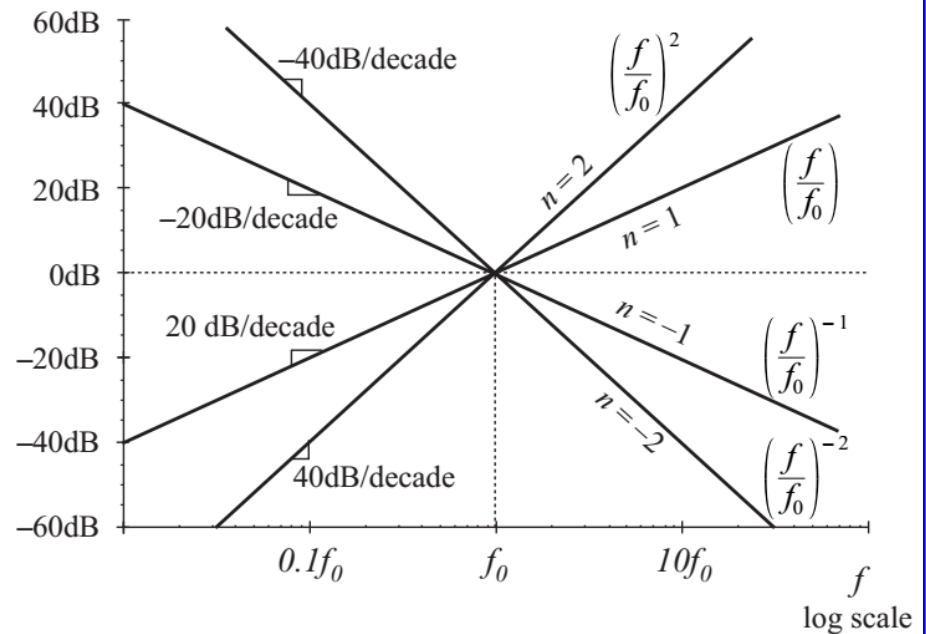
$$\|G\| = \left(\frac{f}{f_0}\right)^n$$

A magnitude em dB é

$$\|G\|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left(\frac{f}{f_0}\right)^n = 20n \log_{10} \left(\frac{f}{f_0}\right)$$

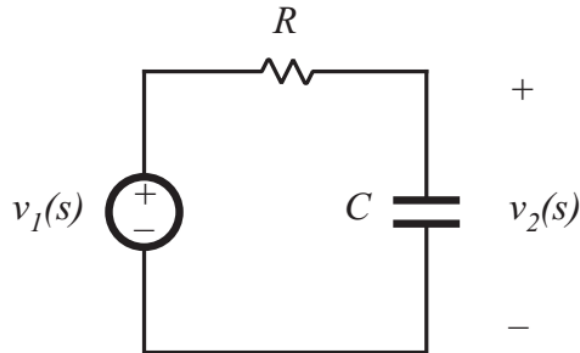
Inclinação é  
20n dB/década

Sua magnitude é 1 ou 0dB, para  $f = f_0$



# Resposta para o caso de um único pólo

Circuito RC



Função de transferência

$$G(s) = \frac{v_2(s)}{v_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R}$$

ou

$$G(s) = \frac{1}{1 + sRC}$$

que coincide com a forma padronizada

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)}$$

com

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

# $G(j\omega)$ e $\|G(j\omega)\|$

Considerando  $s = j\omega$

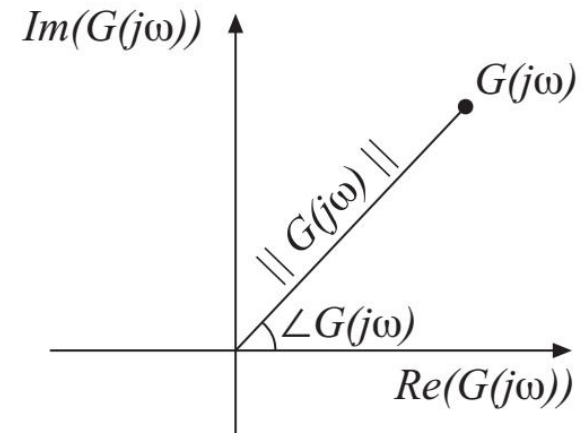
$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)} = \frac{1 - j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Sua magnitude é

$$\begin{aligned} \|G(j\omega)\| &= \sqrt{\left[\operatorname{Re}(G(j\omega))\right]^2 + \left[\operatorname{Im}(G(j\omega))\right]^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \end{aligned}$$

Magnitude em dB

$$\|G(j\omega)\|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right) \text{ dB}$$



# Assíntota: baixa frequência

Para baixas frequências

$$\omega \ll \omega_0 \text{ portanto } f \ll f_0$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \ll 1$$

Então, tem-se que

$$\|G(j\omega)\| \approx \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

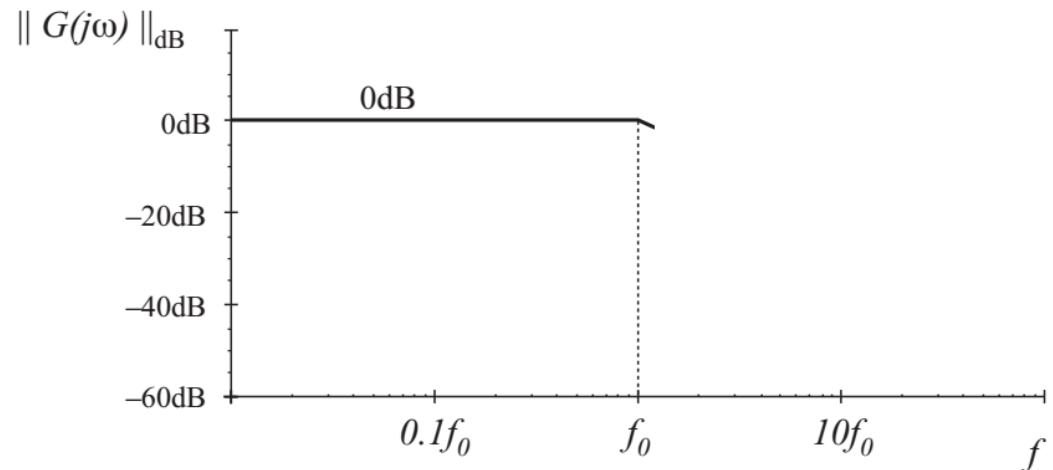
Ou em dB

$$\|G(j\omega)\|_{\text{dB}} \approx 0\text{dB}$$

Esta é a assíntota de baixa frequência de

$$\|G(j\omega)\|$$

$$\|G(j\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$



## Assíntota: alta frequência

Para altas frequências

$$\omega \gg \omega_0 \text{ e } f \gg f_0$$

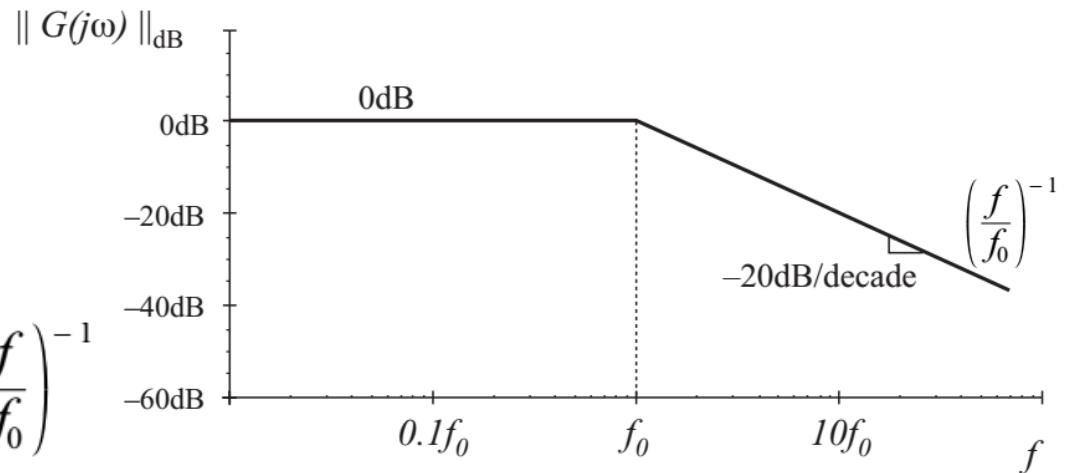
$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \gg 1$$

$$1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

Então, tem-se que

$$\|G(j\omega)\| \approx \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \left(\frac{f}{f_0}\right)^{-1}$$

$$\|G(j\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$



A assíntota de alta frequência varia como  $f^{-1}$ . Então ( $n=-1$ ), tem-se uma linha reta com  $-20\text{dB/década}$  de inclinação. A assíntota tem o valor de 1 ou 0dB para  $f = f_0$ .

## Magnitude para $f = f_o$

O valor exato para a magnitude:  
Quando  $f = f_o$

$$\|G(j\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\|G(j\omega_0)\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\|G(j\omega_0)\|_{dB} = -20 \log_{10} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2} \right) \approx -3 \text{ dB}$$

Para  $f = 0,5f_o$  e  $f = 2f_o$

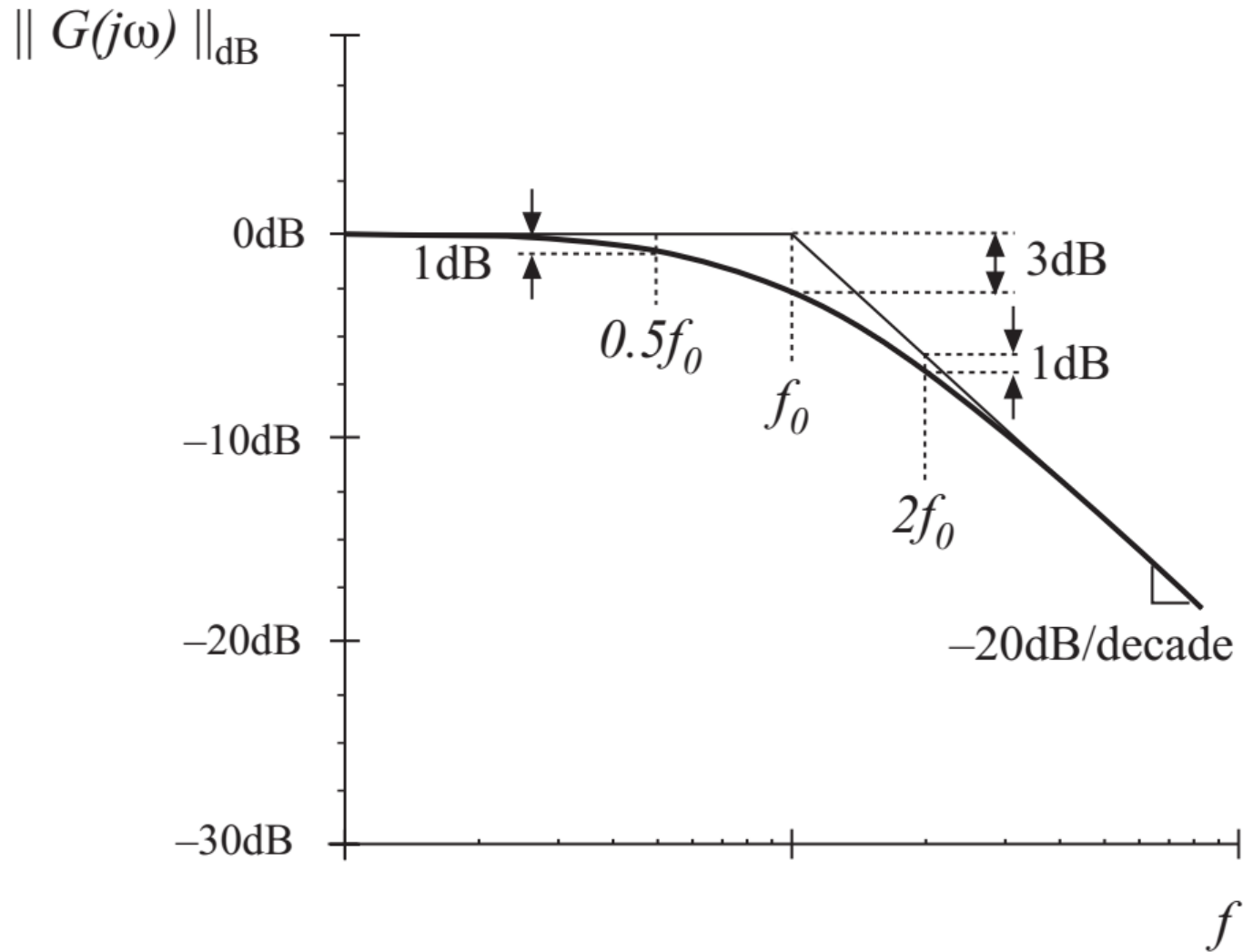
Utilizando um procedimento similar ao anterior mostra que a magnitude neste caso é **1 dB** abaixo das assíntotas.

$$\|G(j\omega)\|_{dB} = -20 \log_{10} \left( \sqrt{1 + 0,5^2} \right) = -0,969 \text{ dB} \quad (\text{para } f = 0,5f_o)$$

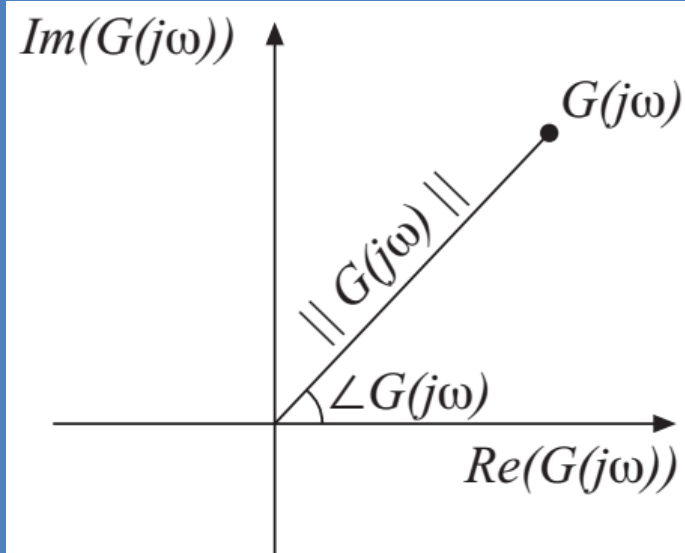
$$\|G(j\omega)\|_{dB} = -20 \log_{10} \left( \sqrt{1 + 2^2} \right) = -6,9897 \text{ dB} \quad (\text{para } f = 2f_o)$$



# Magnitude



## Fase de $G(j\omega)$

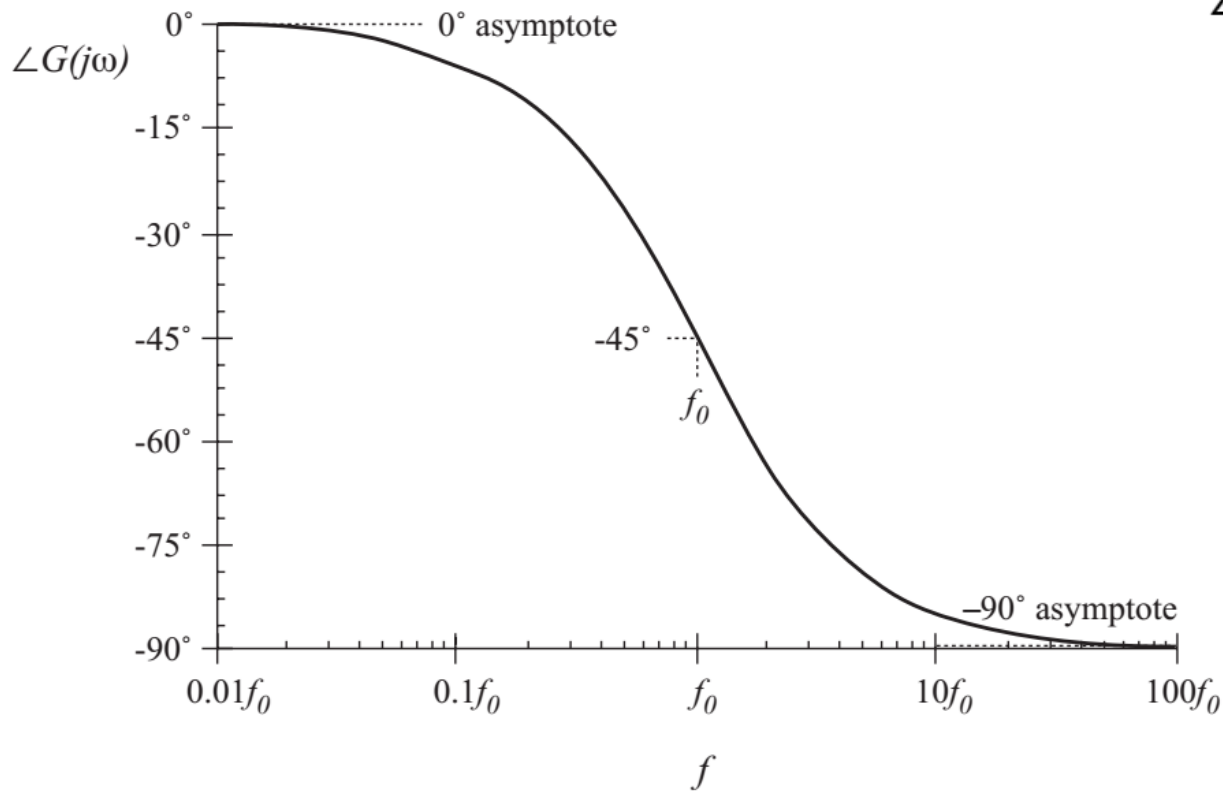


$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im} (G(j\omega))}{\text{Re} (G(j\omega))} \right)$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)} = \frac{1 - j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

# Fase de $G(j\omega)$



$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$\omega$	$\angle G(j\omega)$
0	$0^\circ$
$\omega_0$	$-45^\circ$
$\infty$	$-90^\circ$

## Assíntotas da fase

Baixa frequência :  $0^\circ$

Alta frequência:  $90^\circ$

As assíntotas de baixa e alta frequência **não intersectam**, portanto, é necessário uma assíntota na frequência intermediária.

Escolha **duas frequências em torno da frequência de corte**, de forma que a inclinação da assíntota na frequência de corte seja a mesma inclinação da reta tangente à curva da fase.

Estas frequências são:

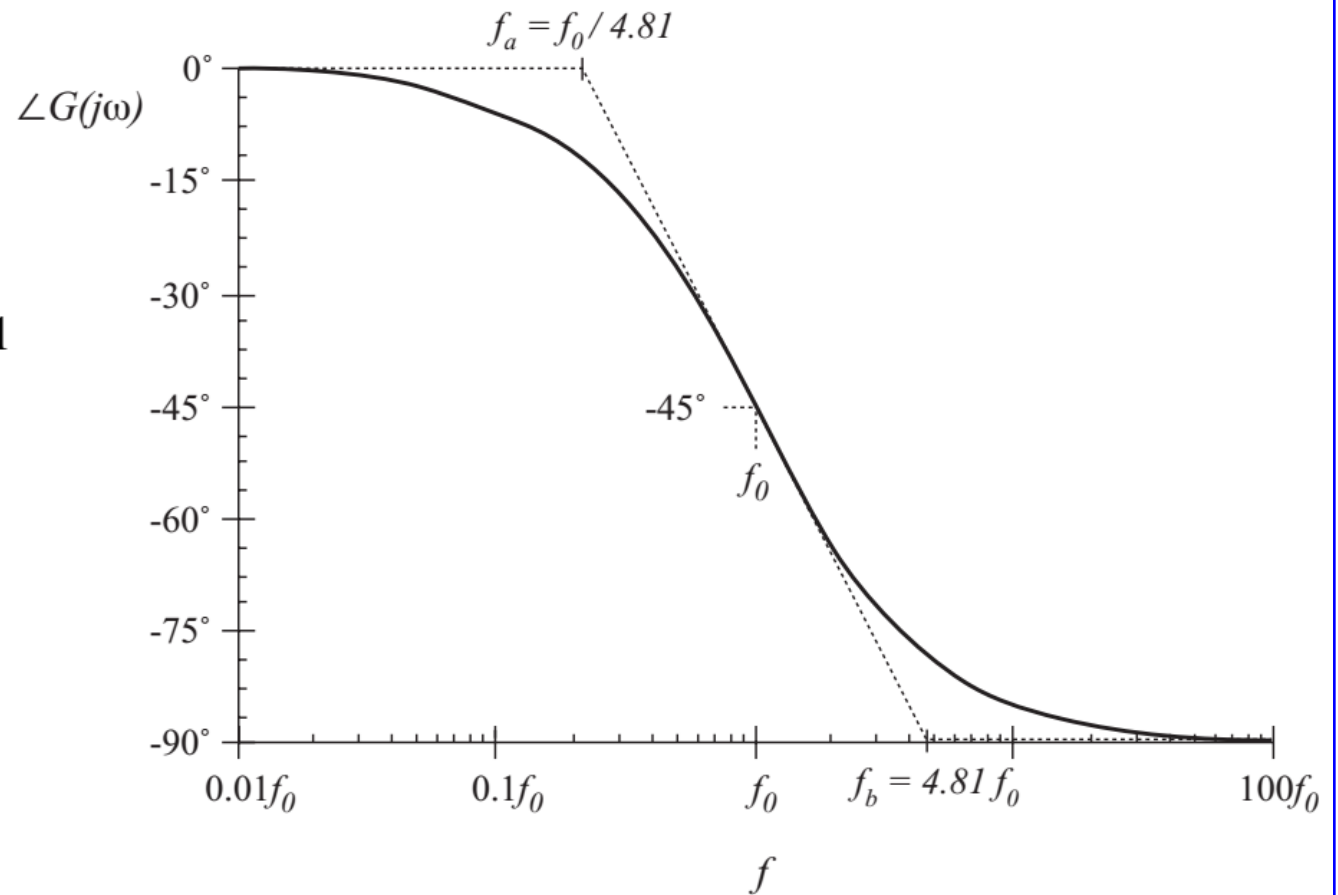
$$f_a = f_0 e^{-\pi/2} \approx f_0 / 4.81$$

$$f_b = f_0 e^{\pi/2} \approx 4.81 f_0$$

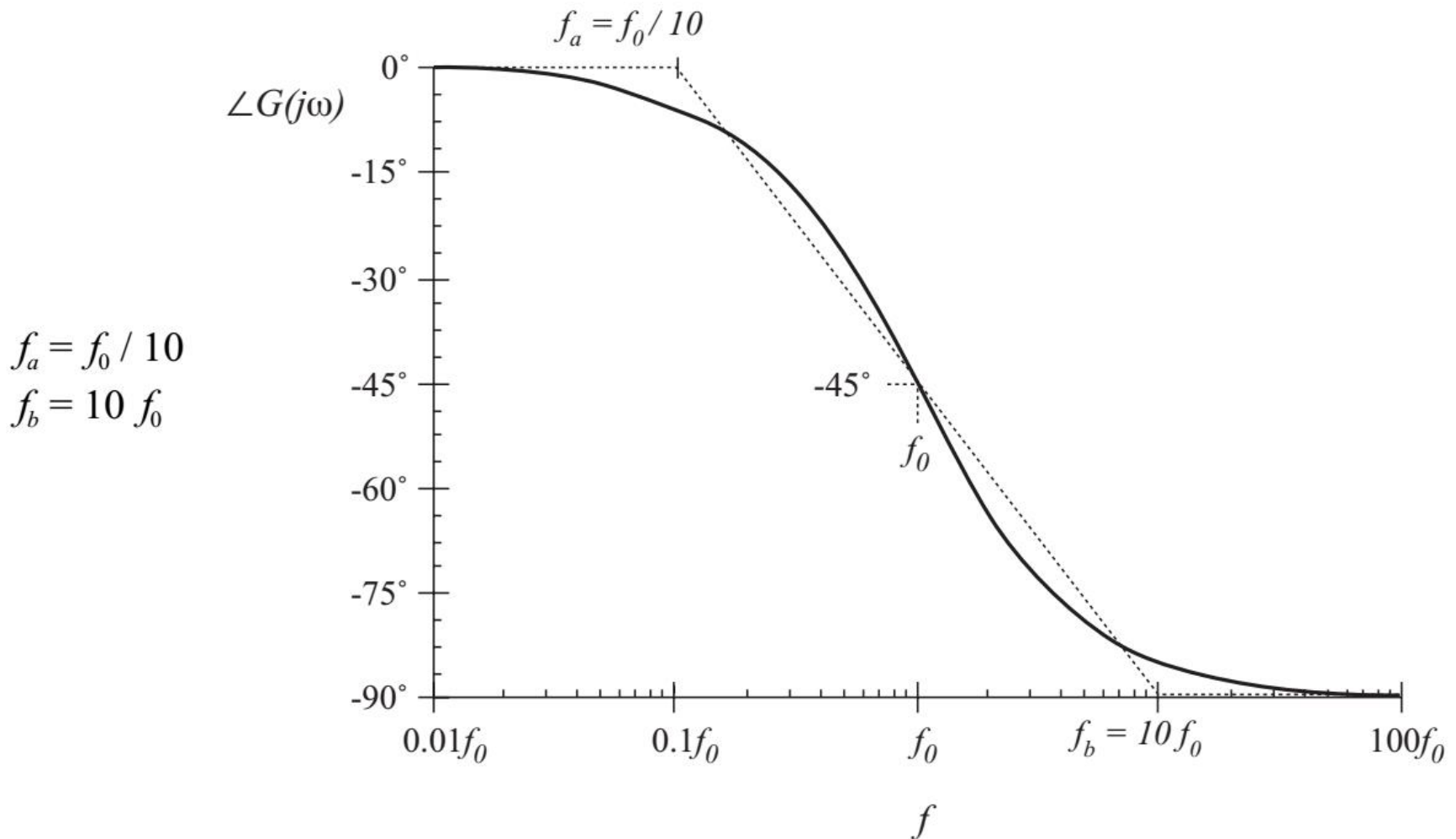
# Assíntotas da fase

$$f_a = f_0 e^{-\pi/2} \approx f_0 / 4.81$$

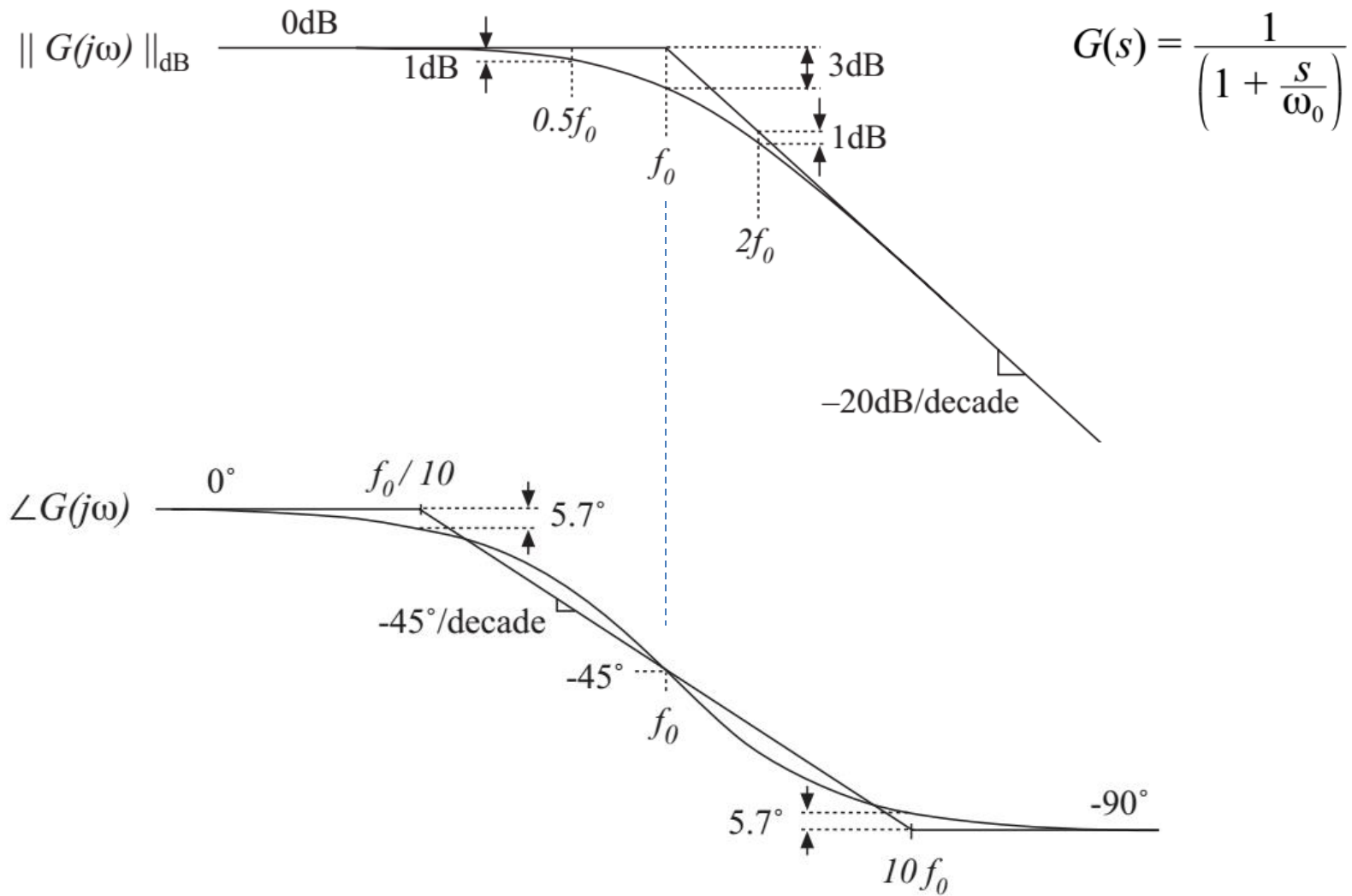
$$f_b = f_0 e^{\pi/2} \approx 4.81 f_0$$



# Assíntotas da fase: uma escolha simples



# Resumo: Diagrama de Bode – pólo real



## Resposta para o caso de um único zero

Forma padronizada

$$G(s) = \left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)$$

Magnitude

$$\|G(j\omega)\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Utilize os mesmos procedimentos adotados para o caso de um único pólo de forma a determinar as assíntotas:

**0 dB** para baixas frequências,  $\omega \ll \omega_0$

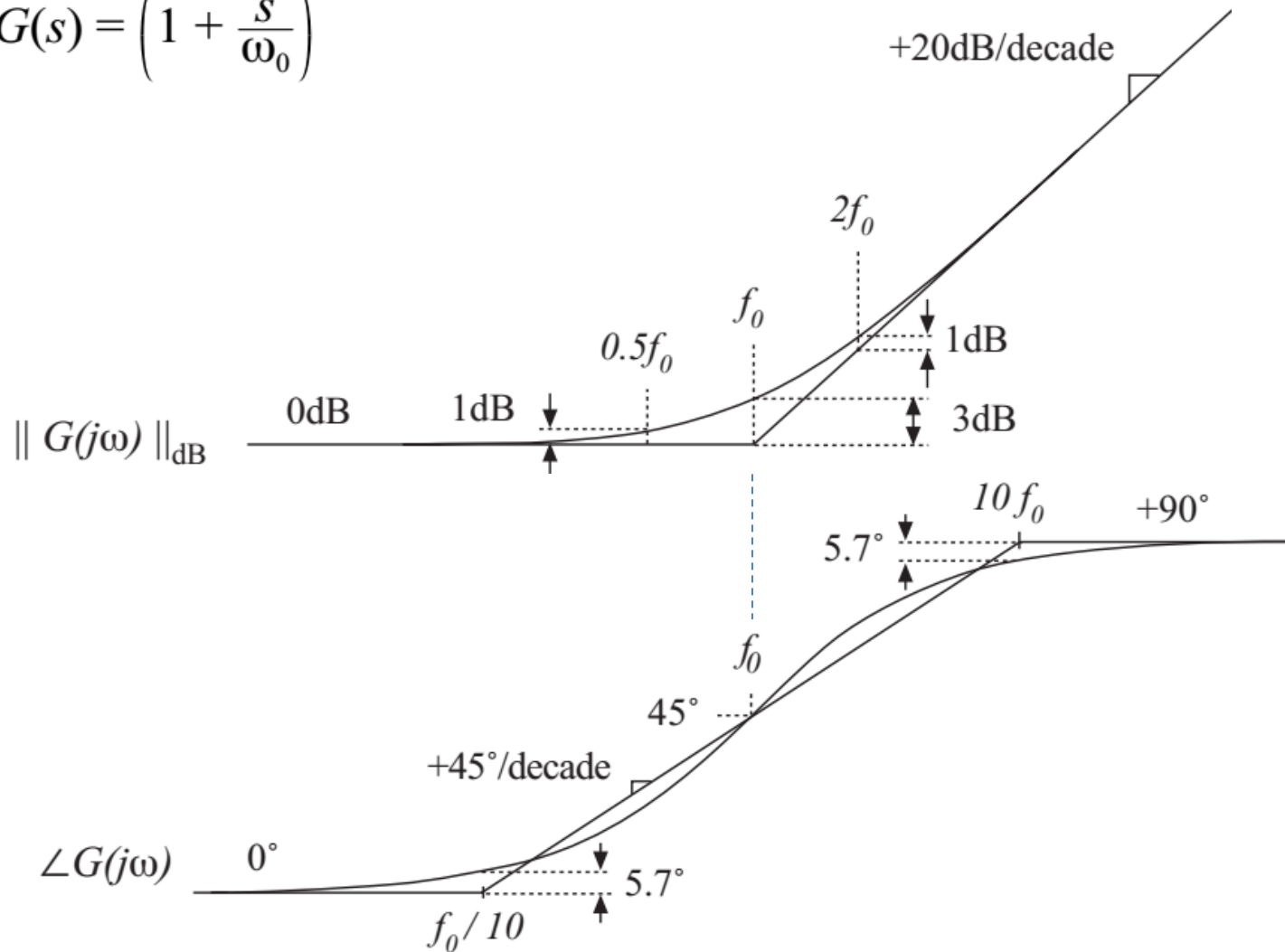
**+20 dB/década** de inclinação para altas frequências,  $\omega \gg \omega_0$

Fase:  $\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$  (parecido com a fase do pólo único porém sem o sinal negativo)



# Resumo: Diagrama de Bode – zero real

$$G(s) = \left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)$$



## Zero no semiplano direito

Forma padronizada

$$G(s) = \left(1 - \frac{s}{\omega_0}\right)$$

Magnitude

$$\|G(j\omega)\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Magnitude igual ao caso de zero real. Portanto, as assíntotas da magnitude são as mesmas.

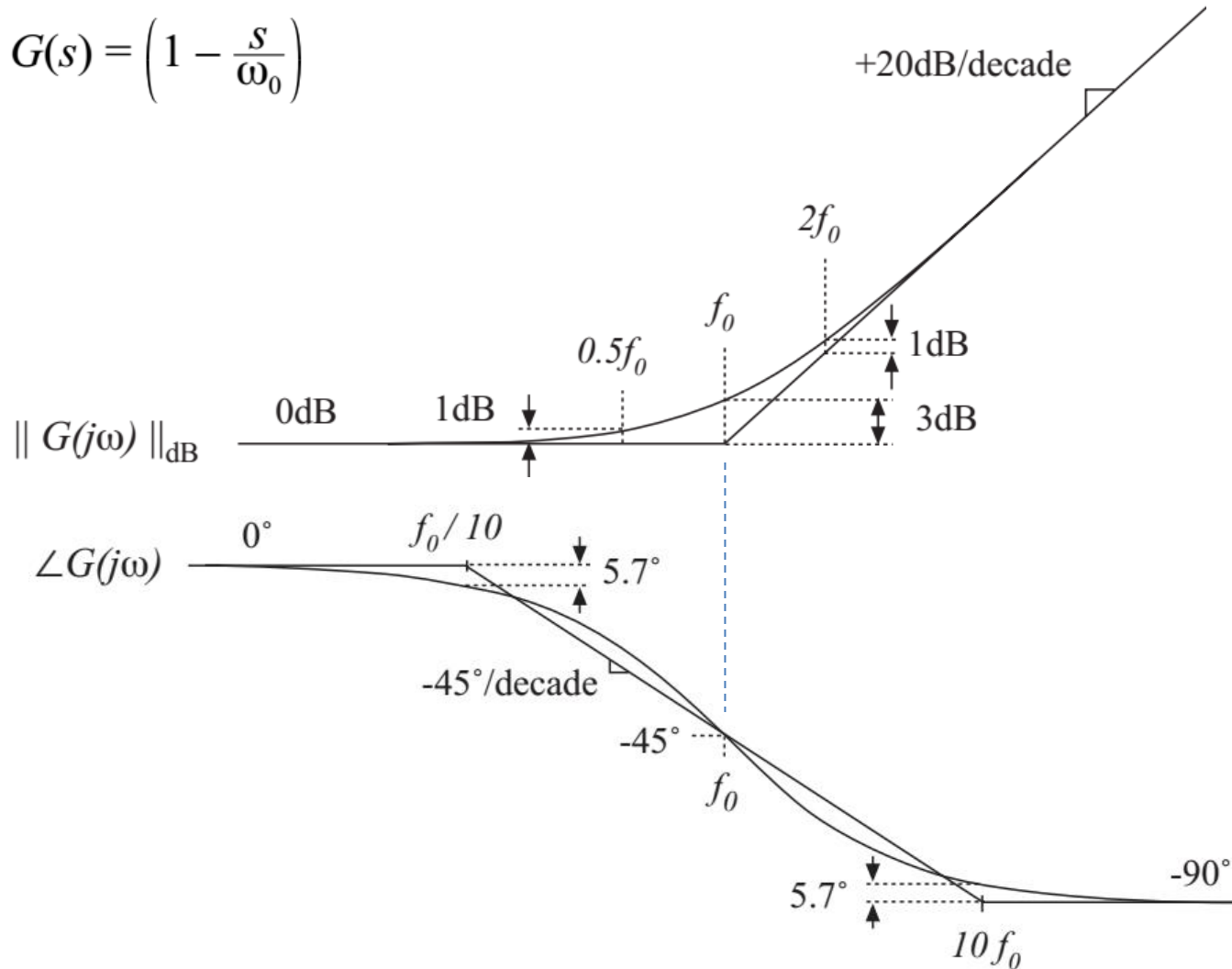
Fase:  $\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$  (igual ao pólo real)

O zero no semiplano direito tem:

- As assíntotas da magnitude igual ao caso do zero real.
- As assíntotas da fase igual ao caso do pólo real

# Resumo: Bode – zero no semiplano direito

$$G(s) = \left(1 - \frac{s}{\omega_0}\right)$$



## Inversão de frequência

**Pólo invertido** – uma forma muito útil quando se descreve assíntotas planas para frequências médias e altas.

Forma padronizada

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\omega_0}{s}\right)}$$

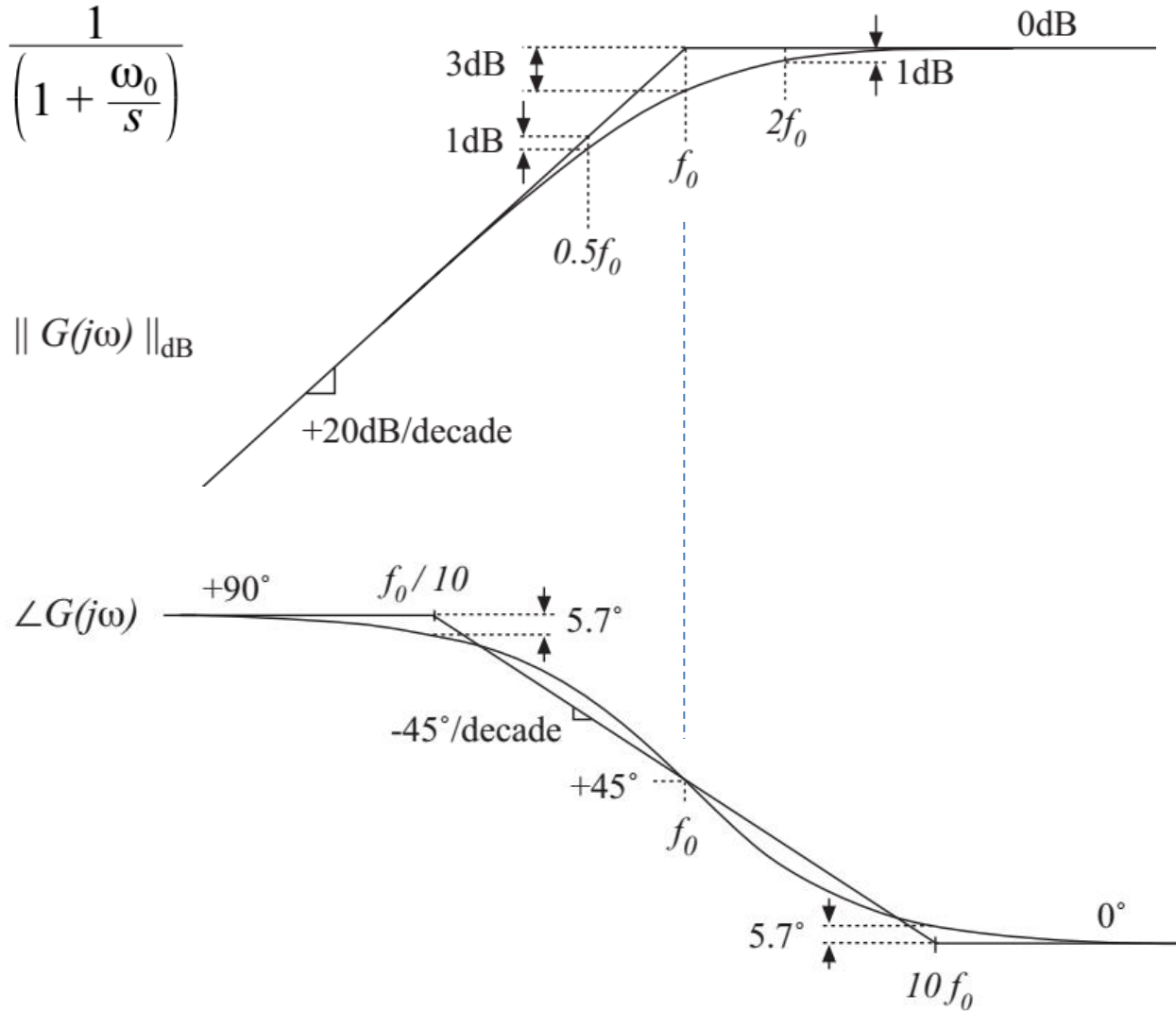
Uma outra forma algébrica equivalente:

$$G(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)}$$

O pólo invertido atenua as frequências inferiores à frequência de corte.

# Assíntotas - pólo invertido

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\omega_0}{s}\right)}$$



## Zero invertido (PI)

Forma padronizada

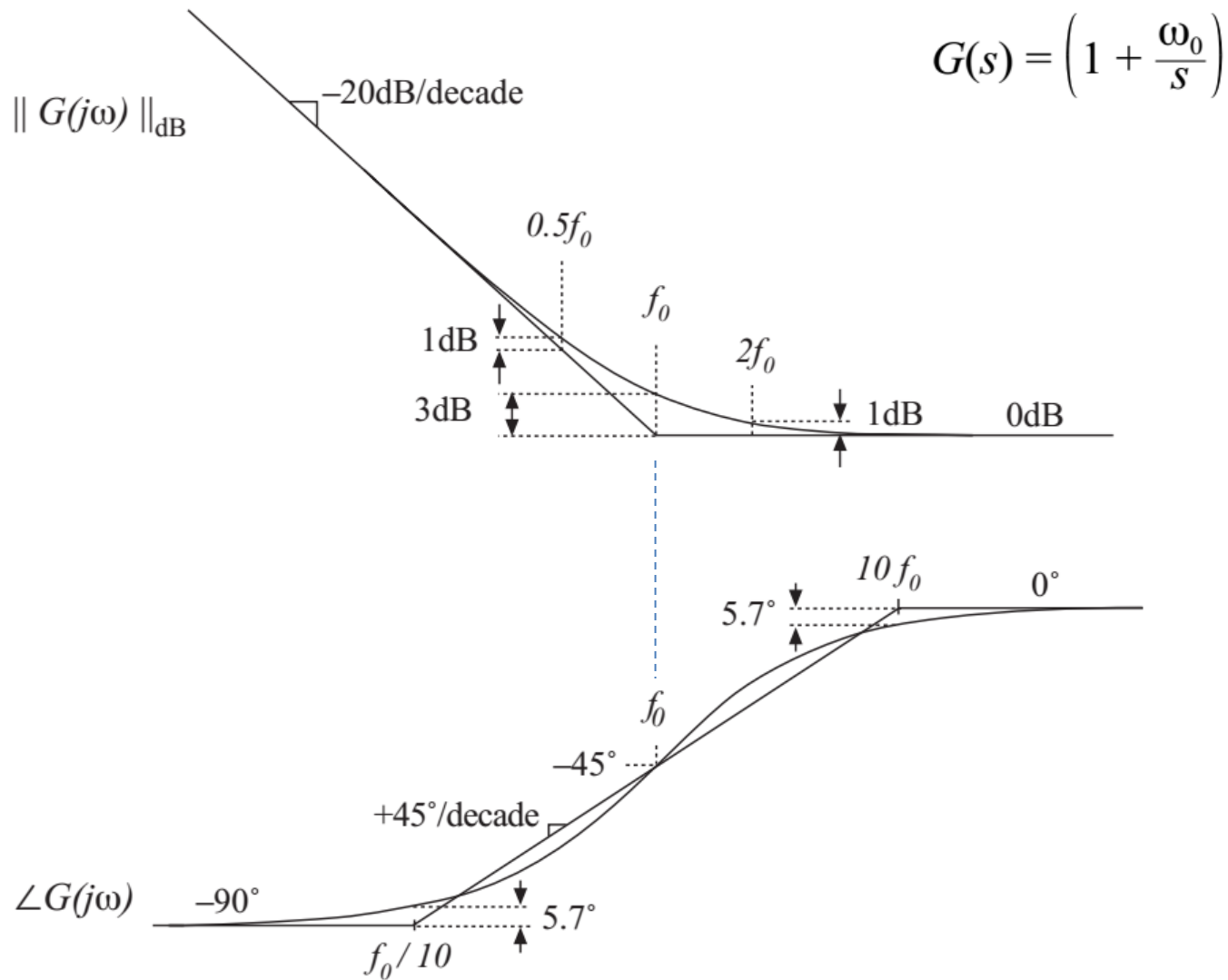
$$G(s) = \left( 1 + \frac{\omega_0}{s} \right)$$

Uma outra forma algébrica equivalente:

$$G(s) = \frac{\left( 1 + \frac{s}{\omega_0} \right)}{\left( \frac{s}{\omega_0} \right)}$$

Outra vez, o zero invertido enfatiza o ganho em baixas frequências.

# Assíntotas - zero invertido



## Combinação de Respostas

$$G_3(\omega) = \left( R_1(\omega) R_2(\omega) \right) e^{j(\theta_1(\omega) + \theta_2(\omega))}$$

A fase composta é a soma das fases individuais

$$\theta_3(\omega) = \theta_1(\omega) + \theta_2(\omega)$$

A magnitude composta é a soma das magnitudes individuais quando representadas em dB

$$R_3(\omega) = R_1(\omega) R_2(\omega)$$

$$\left| R_3(\omega) \right|_{\text{dB}} = \left| R_1(\omega) \right|_{\text{dB}} + \left| R_2(\omega) \right|_{\text{dB}}$$



## Exemplo 1

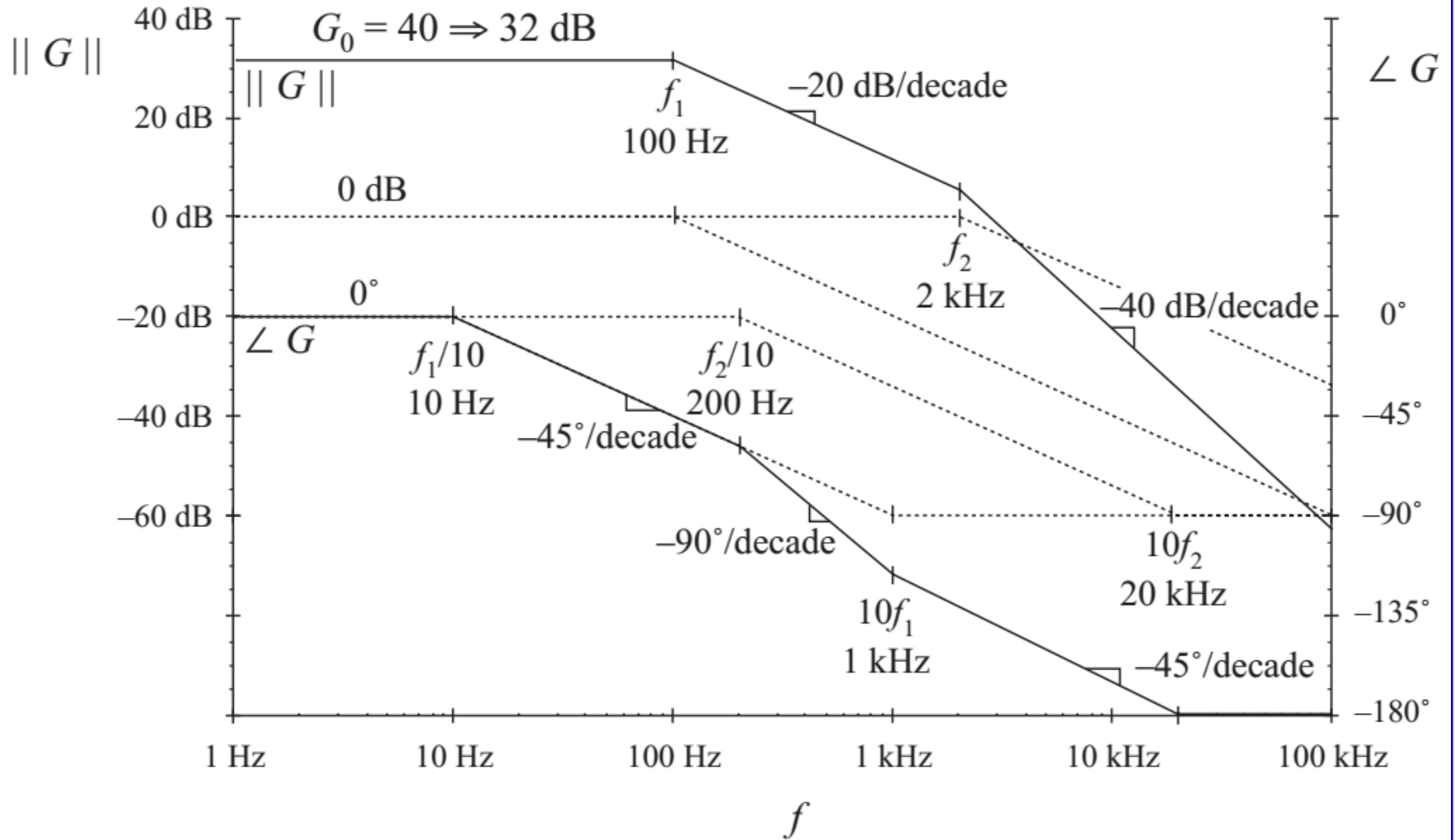
$$G(s) = \frac{G_0}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}$$

Considere:

$$G_0 = 40 \Rightarrow 32 \text{ dB}, f_1 = \omega_1/2\pi = 100 \text{ Hz}, f_2 = \omega_2/2\pi = 2 \text{ kHz}$$

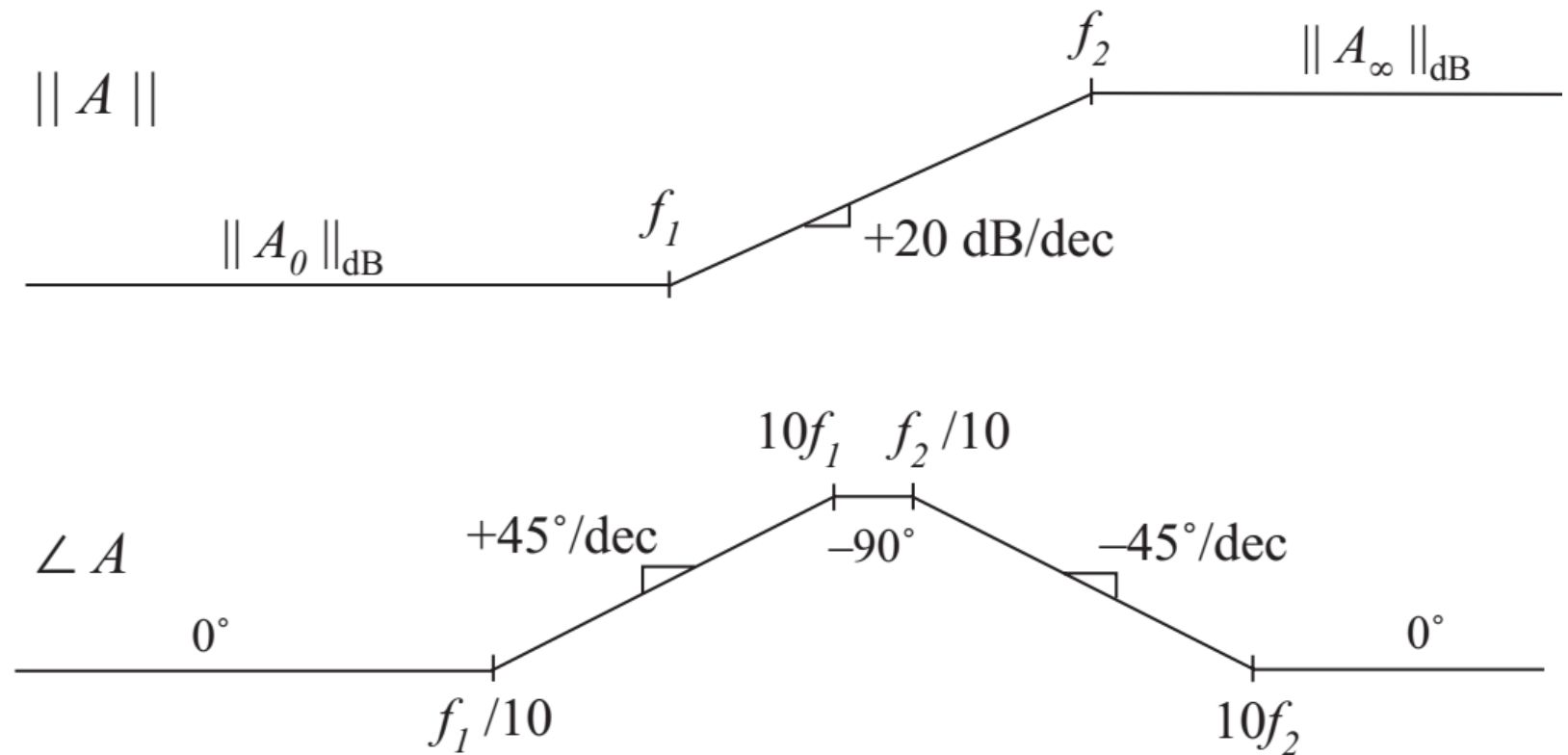
A magnitude composta é a soma das magnitudes individuais quando representadas em dB

# Exemplo 1 - continuação



## Exemplo 2

Determine a função de transferência  $A(s)$  correspondente as seguintes assíntotas



## Exemplo 2 - continuação

Uma solução

$$A(s) = A_0 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}$$

Expressões analíticas para as assíntotas

Para  $f < f_1$

$$\left\| A_0 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)} \right\|_{s=j\omega} = A_0 \frac{1}{1} = A_0$$

Para  $f_1 < f < f_2$

$$\left\| A_0 \frac{\left(\frac{s}{\omega_1} + 1\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)} \right\|_{s=j\omega} = A_0 \frac{\left\| \frac{s}{\omega_1} \right\|_{s=j\omega}}{1} = A_0 \frac{\omega}{\omega_1} = A_0 \frac{f}{f_1}$$

## Exemplo 2 - continuação

Para  $f > f_2$

$$\left\| A_0 \frac{\left( \blacktriangleright + \frac{s}{\omega_1} \right)}{\left( \blacktriangleright + \frac{s}{\omega_2} \right)} \right\|_{s=j\omega} = A_0 \frac{\left\| \frac{s}{\omega_1} \right\|_{s=j\omega}}{\left\| \frac{s}{\omega_2} \right\|_{s=j\omega}} = A_0 \frac{\omega_2}{\omega_1} = A_0 \frac{f_2}{f_1}$$

Portanto, a assíntota para altas frequências é

$$A_\infty = A_0 \frac{f_2}{f_1}$$

## Resposta do polo quadrático: ressonância

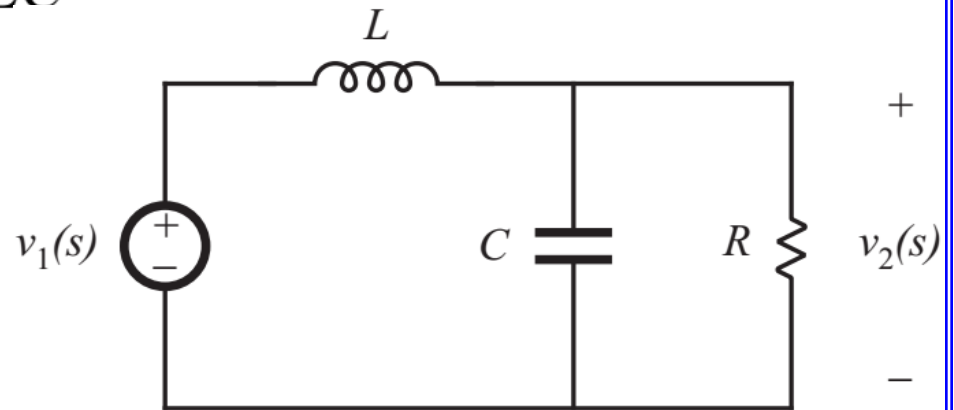
Por exemplo

$$G(s) = \frac{v_2(s)}{v_1(s)} = \frac{1}{1 + s\frac{L}{R} + s^2LC}$$

Denominador de segunda ordem, da forma:

$$G(s) = \frac{1}{1 + a_1s + a_2s^2}$$

Com  $a_1 = L/R$  e  $a_2 = LC$



*Two-pole low-pass filter example*

Como esboçar o diagrama de Bode?

## Método 1: Fatore o denominador

$$G(s) = \frac{1}{1 + a_1s + a_2s^2}$$

Pode-se fatorar o denominador utilizando a fórmula de Bhaskara, então esboce o diagrama de Bode de dois pólos reais.

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 - \frac{s}{s_1}\right)\left(1 - \frac{s}{s_2}\right)} \quad \text{com} \quad s_1 = -\frac{a_1}{2a_2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4a_2}{a_1^2}} \right]$$
$$s_2 = -\frac{a_1}{2a_2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4a_2}{a_1^2}} \right]$$

- Se  $4a_2 \leq a_1^2$ , as raízes são reais. Pode-se esboçar o diagrama de Bode como a combinação de dois polos reais.
- Se  $4a_2 > a_1^2$ , as raízes são complexas, neste caso será necessário um trabalho adicional para esboçar o diagrama de Bode.

## Método 2: Defina a forma padronizada

Defina a forma padronizada para o caso quadrático

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{ou} \quad G(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

Quando os coeficientes de  $s$  são reais e positivos, então  $\zeta$ ,  $\omega_0$  e  $Q$  são também positivos e reais.

- O parâmetro  $\omega_0$  é a frequência de corte, e  $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ .
- O parâmetro  $\zeta$  é denominado **fator de amortecimento**.  $\zeta$  controla a forma da curva exata em torno de  $f = f_0$ . **As raízes são complexas quando  $\zeta < 1$ .**
- Na forma alternativa, o parâmetro  $Q$  é denominado **fator de qualidade**.  $Q$  também controla a forma da curva exata em torno de  $f = f_0$ . **As raízes são complexas quando  $Q > 0,5$ .**



## O fator Q

Nos sistemas de segunda ordem,  $\zeta$  e  $Q$  estão relacionados

$$Q = \frac{1}{2\zeta}$$

$Q$  é uma medida da dissipação no sistema. A definição mais geral de  $Q$ , para uma excitação senoidal de um elemento passivo ou sistema é

$$Q = 2\pi \frac{\text{(peak stored energy)}}{\text{(energy dissipated per cycle)}}$$

Para um sistema passivo de segunda ordem, as duas equações acima são equivalentes.

## Expressões analíticas para $f_o$ e $Q$

No exemplo do filtro passa-baixa de dois pólos, tem-se que

$$G(s) = \frac{v_2(s)}{v_1(s)} = \frac{1}{1 + s\frac{L}{R} + s^2LC}$$

Considerando a forma padronizada

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

Tem-se que:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$
$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

# Assíntotas para a Magnitude

Para a forma  $G(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$

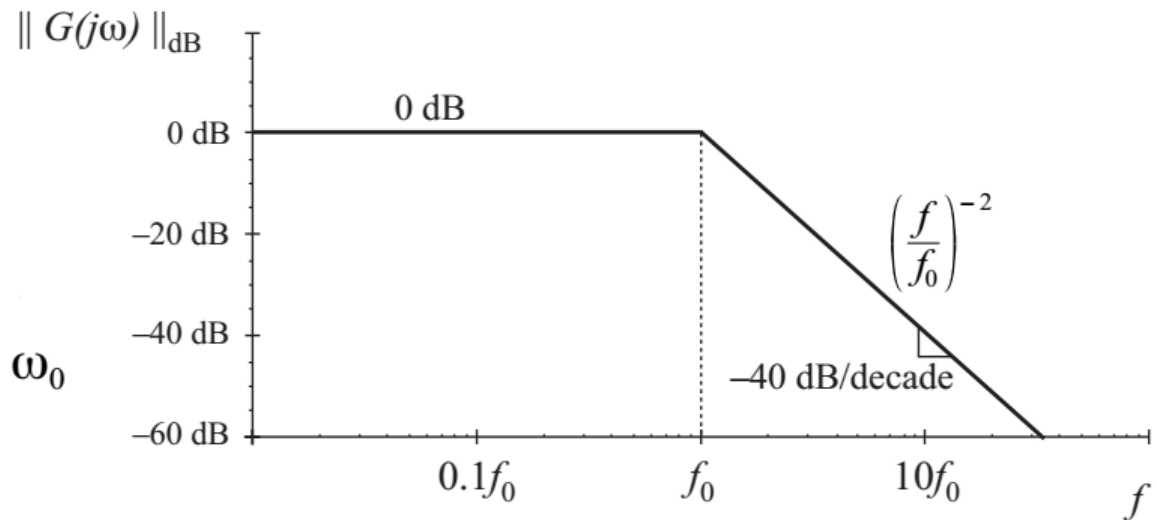
Se  $s = j\omega$  encontre a magnitude

$$\|G(j\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

As assíntotas são

$$\|G\| \rightarrow 1 \quad \text{for } \omega \ll \omega_0$$

$$\|G\| \rightarrow \left(\frac{f}{f_0}\right)^{-2} \quad \text{for } \omega \gg \omega_0$$

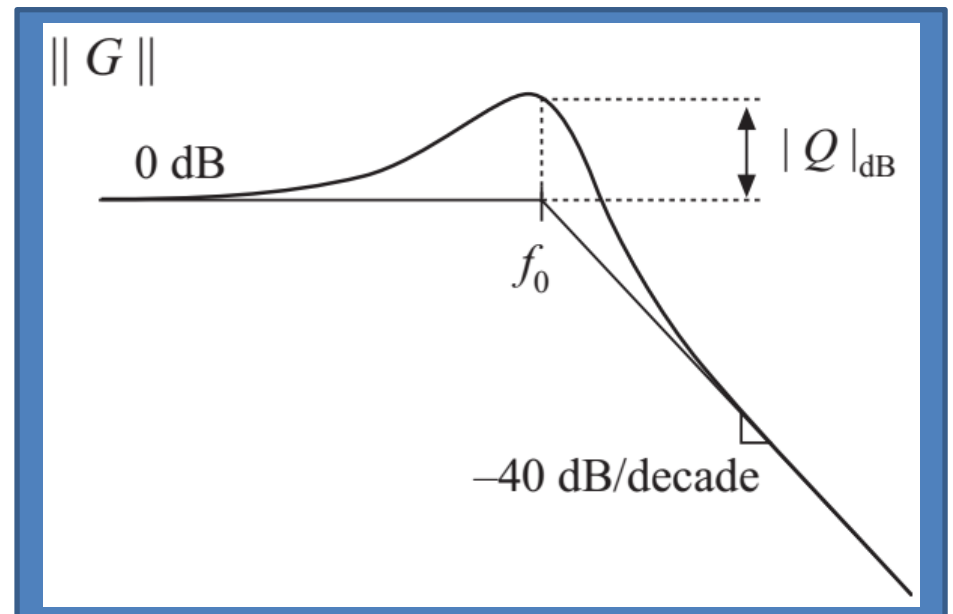


## Curva exata a partir das assíntotas

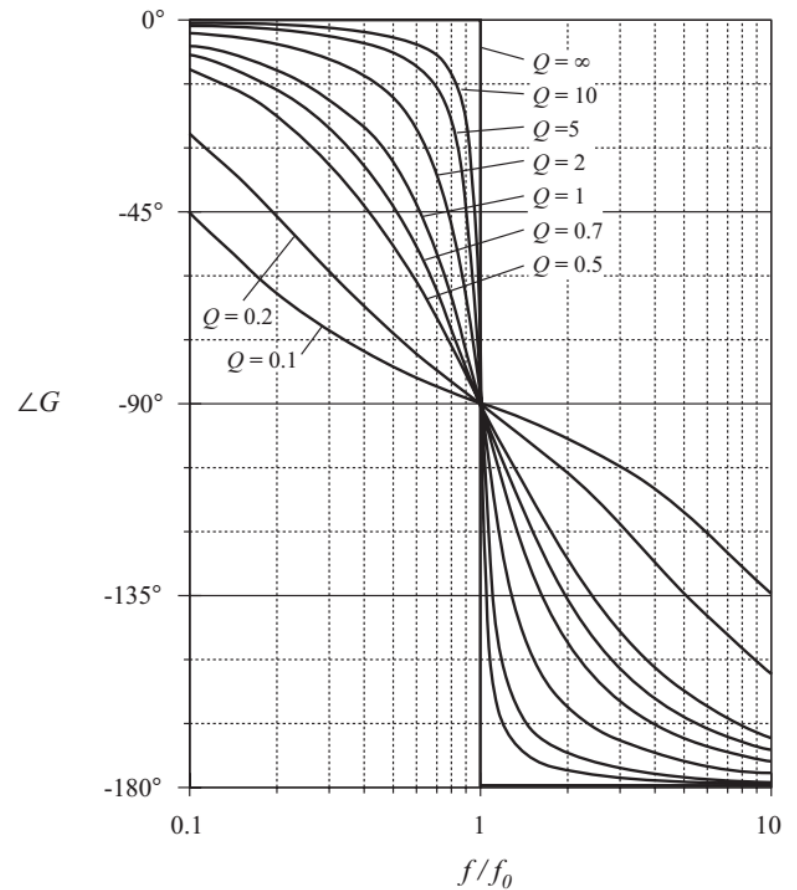
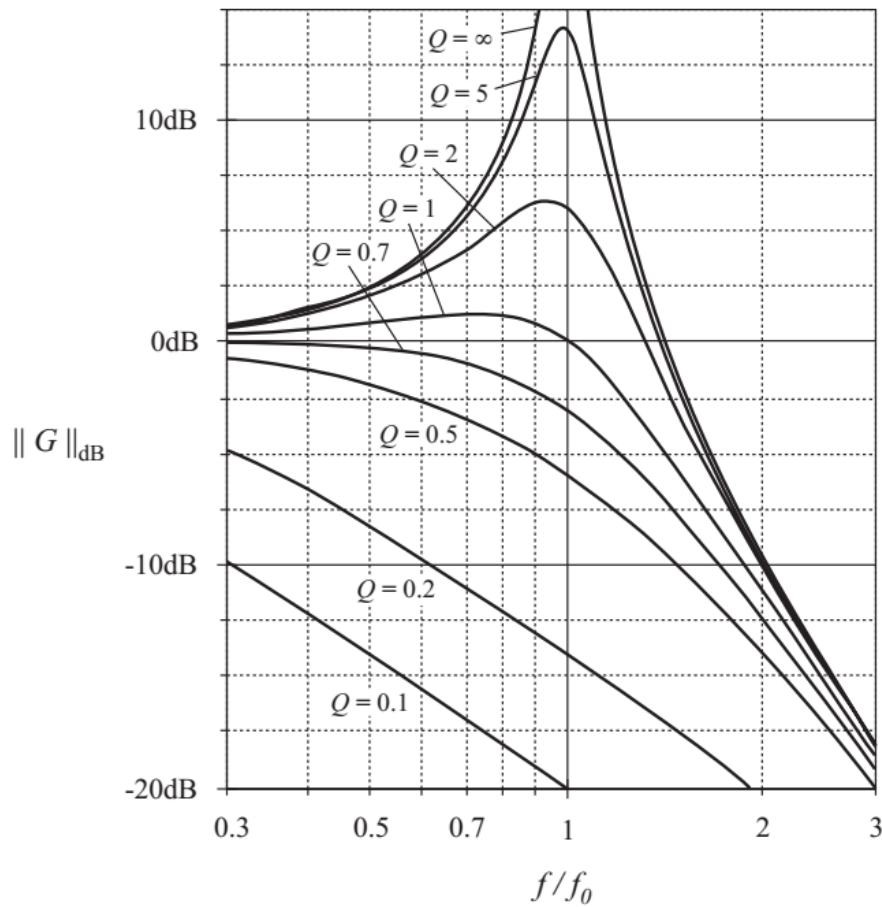
$$\|G(j\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Em  $\omega = \omega_0$ , a magnitude exata é

$$\|G(j\omega_0)\| = Q \quad \text{or, in dB:} \quad \|G(j\omega_0)\|_{\text{dB}} = |Q|_{\text{dB}}$$



# Resposta de dois pólos: curva exata



## Aproximação para Q pequeno

Considere-se o polinômio de segunda ordem no denominador, da forma:

$$G(s) = \frac{1}{1 + a_1s + a_2s^2} \quad \text{ou} \quad G(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

Quando as raízes são reais, isto é, quando  $Q < 0,5$ , pode-se fatorar o denominador, e esboçar o diagrama de Bode utilizando as assíntotas dos pólos reais. Pode-se utilizar a seguinte forma padronizada:

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}$$

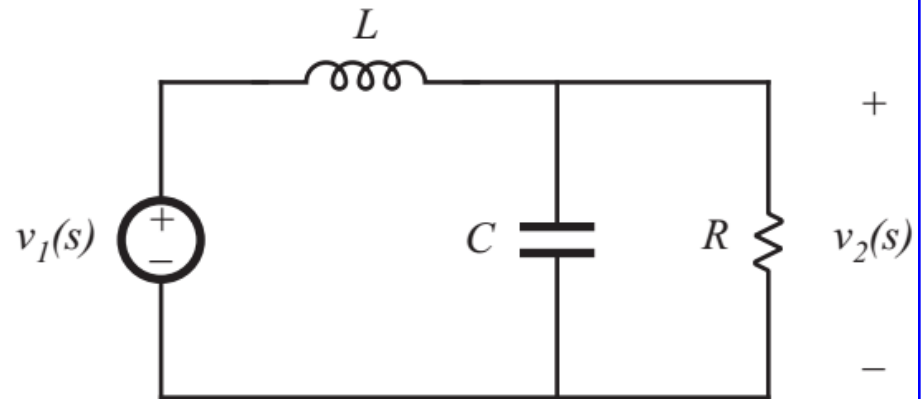
Esse é o método desejável quando  $Q \ll 0,5$ , isto é, quando as frequências de corte  $\omega_1$  e  $\omega_2$  estão bem separados.

## Exemplo 3

O problema com este procedimento é a complexidade da fórmula quadrática utilizada para encontrar as frequências de corte.

Exemplo: rede R-L-C

$$G(s) = \frac{v_2(s)}{v_1(s)} = \frac{1}{1 + s\frac{L}{R} + s^2LC}$$



Aplicando-se Bhaskara, tem-se:

$$\omega_1, \omega_2 = \frac{L/R \pm \sqrt{(L/R)^2 - 4LC}}{2LC}$$

## Exemplo 3 (cont.)

$$\omega_1, \omega_2 = \frac{L/R \pm \sqrt{(L/R)^2 - 4LC}}{2LC}$$

Esta expressão complexa pouco nos diz sobre a dependência de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  em relação aos componentes R, L e C.

Quando as frequências de corte estão bem separadas em valor, pode-se aproximar estas frequências por:

$$\omega_1 \approx \frac{R}{L}, \quad \omega_2 \approx \frac{1}{RC}$$

$\omega_1$  independe de C e  $\omega_2$  independe de L.

Estas expressões são derivadas através da aproximação para Q pequeno.



## Exemplo 3 (cont.)

Considerando

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

Utilize a fórmula de Bhaskara para expressar as frequências de corte  $\omega_1$  e  $\omega_2$  em função de  $Q$  e  $\omega_0$ , isto é:

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \frac{1 - \sqrt{1 - 4Q^2}}{2} \qquad \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q} \frac{1 + \sqrt{1 - 4Q^2}}{2}$$

## Frequência de corte $\omega_2$

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{Q} \frac{1 + \sqrt{1 - 4Q^2}}{2} \quad F(Q)$$

Pode ser expressado na forma

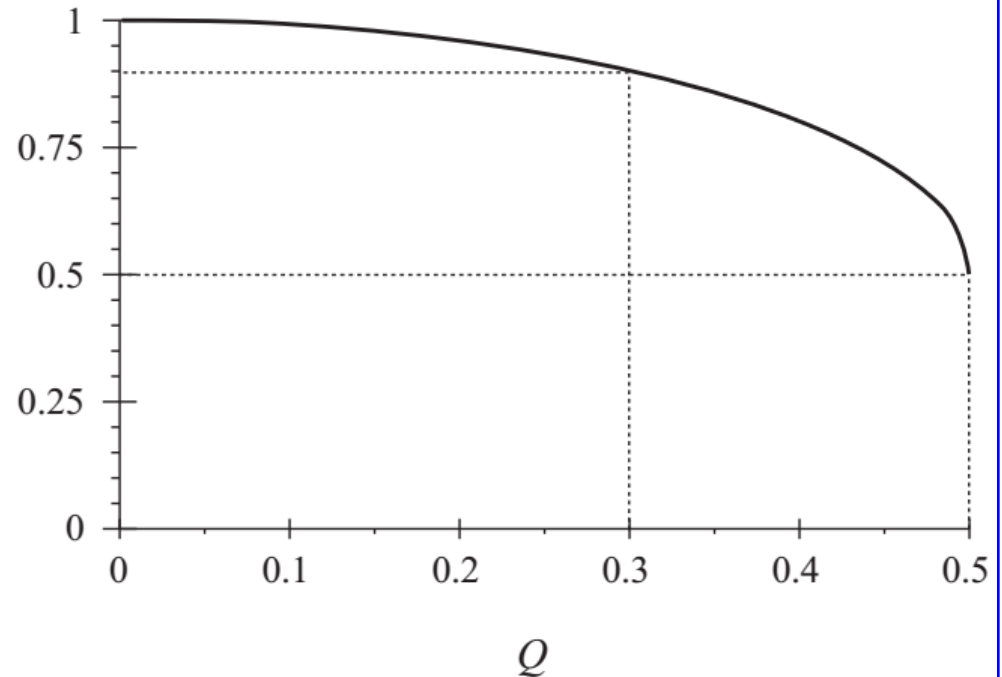
$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{Q} F(Q)$$

Sendo

$$F(Q) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4Q^2} \right)$$

Para  $Q$  pequeno,  $F(Q)$  tende a um. Então, tem-se:

$$\omega_2 \approx \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{for } Q \ll \frac{1}{2}$$



Para  $Q < 0,3$ ; a aproximação  $F(Q)=1$  Tem um erro menor a 10%.

## Frequência de corte $\omega_1$

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \frac{1 - \sqrt{1 - 4Q^2}}{2}$$

Pode ser expressado na forma

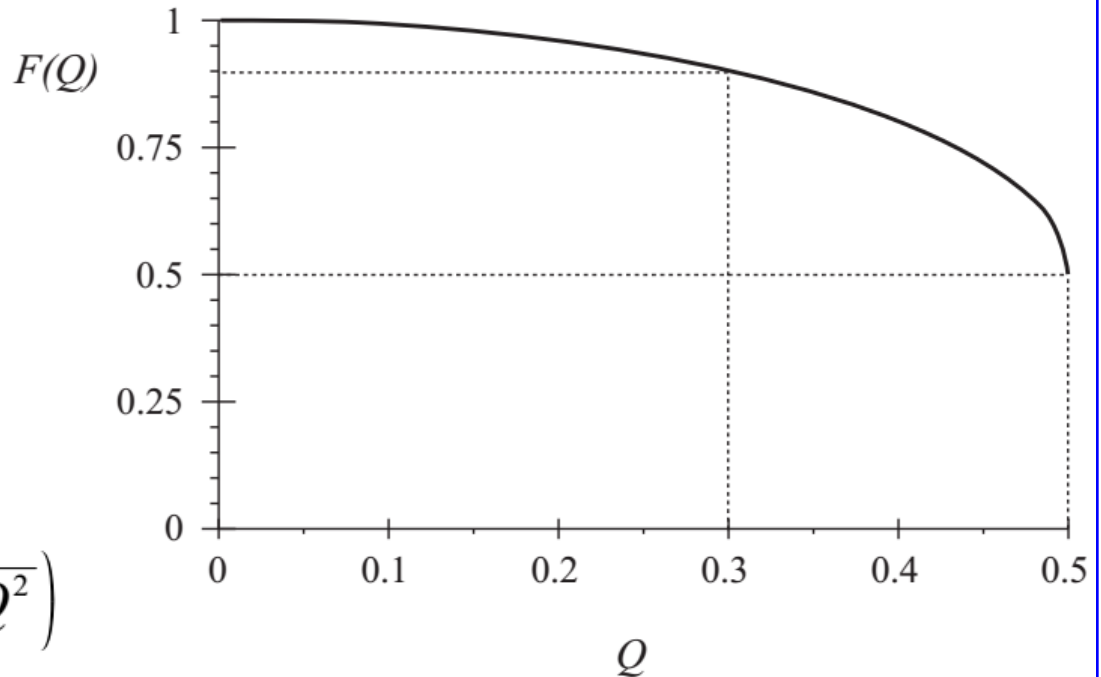
$$\omega_1 = \frac{Q \omega_0}{F(Q)}$$

Sendo

$$F(Q) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4Q^2} \right)$$

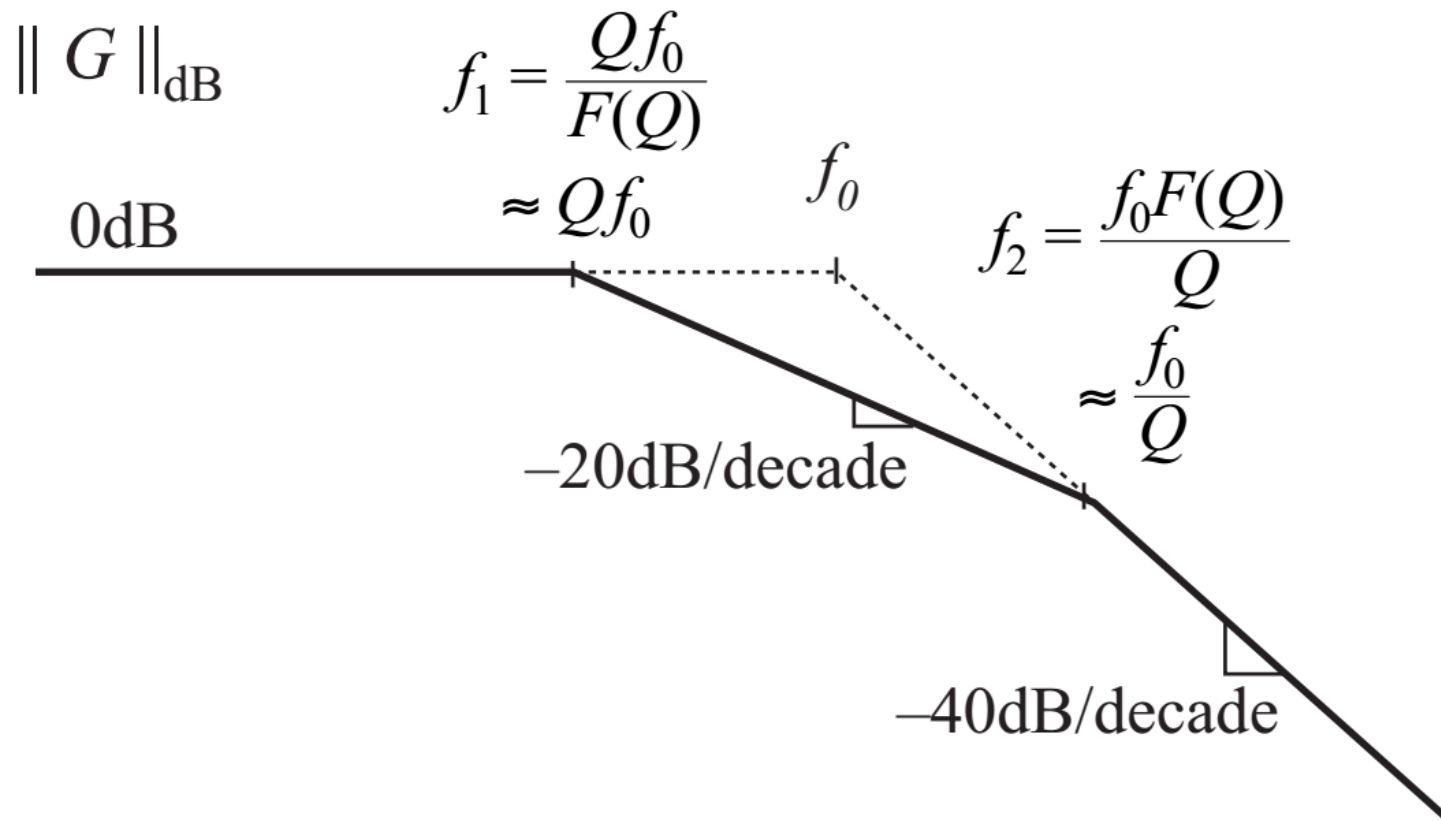
Para  $Q$  pequeno,  $F(Q)$  tende a um. Então, tem-se:

$$\omega_1 \approx Q \omega_0 \quad \text{for } Q \ll \frac{1}{2}$$



Para  $Q < 0,3$  ; a aproximação  $F(Q)=1$  Tem um erro menor a 10%.

## Aproximação para Q pequeno



## Exemplo: circuito R-L-C

Para o exemplo anterior

$$G(s) = \frac{v_2(s)}{v_1(s)} = \frac{1}{1 + s\frac{L}{R} + s^2LC}$$

Utilizando a aproximação de Q pequeno

$$\omega_1 \approx Q \omega_0 = R \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{L}$$

$$\omega_2 \approx \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{R \sqrt{\frac{C}{L}}} = \frac{1}{RC}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

# Próxima Aula

1. Função de transferência e projeto do controlador

# Referências Bibliográficas

1. **Erickson, R.W.; Fundamentals of power electronics, 2 Ed. Kluwer Academic Publisher, 2001.**
2. RASHID, M.H. Eletrônica de Potência - Circuitos, Dispositivos e Aplicações. Ed. São Paulo: Makron Books, 1999.
3. MOHAN, N.; UNDELAND, T.M.; ROBBINS, W.P. Power Electronics: Converters Applications and Design 2. Ed. New York: Editora John Wiley & Sons, 1995.
4. Pomilio, J.A.; Apostilas da disciplina de Eletrônica de Potência, <http://www.dsce.fee.unicamp.br/~antenor/>
5. Rech, C.; Slides da disciplina Controle de Conversores Estáticos, <http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/cassiano>