MNPEF

Laboratório: introdução e Conceitos básicos.

Medidas e Incertezas

Medir é um procedimento experimental em que o valor de uma grandeza é determinado em termos do valor de uma unidade definida através de um padrão.

Uma medição começa com a especificação apropriada do mensurando e do procedimento de medição.

Todo processo de medição tem uma incerteza associada ao valor medido.

Sendo assim, uma medida deve conter as seguintes informações:

- **o valor da grandeza**
- **a incerteza da medição**
- **a unidade**

→ Sistemas de unidades

- **MKS**

Sistema metro-kilograma-segundo (MKS) que, mais tarde, deu origem ao Sistema Internacional de Unidades (SI) que é o sistema de unidades de físicas medidas mais utilizado na atualidade;

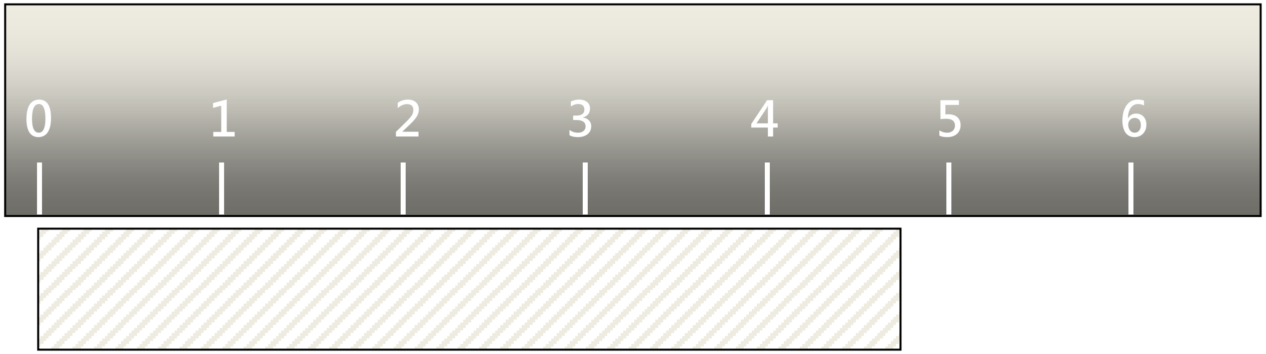
- **CGS**

É um sistema de unidades de medidas físicas, ou sistema dimensional, de tipologia LMT (comprimento, massa tempo), cujas unidades-base são o centímetro para o comprimento, o grama para a massa e o segundo para o tempo;

Medidas e Incertezas

→ Algarismos significativos

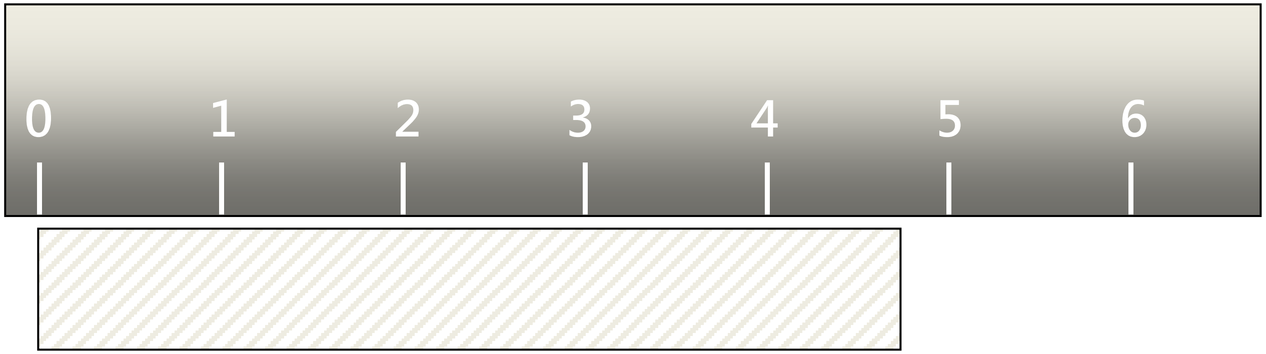
Exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **centímetros**



- O comprimento da barra está certamente entre 4cm e 5cm;

→ Algarismos significativos

Exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **centímetros**

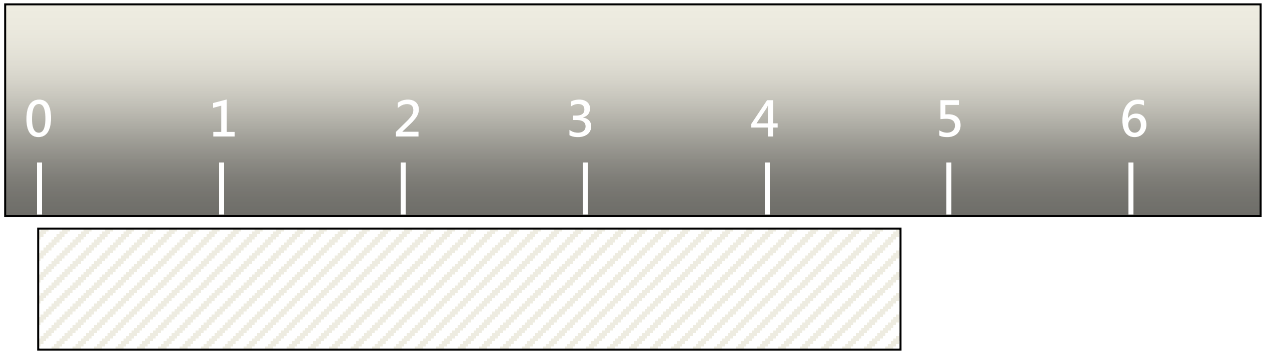


• O comprimento da barra está certamente entre 4cm e 5cm;

• Qual seria o algarismo que viria depois do 4?

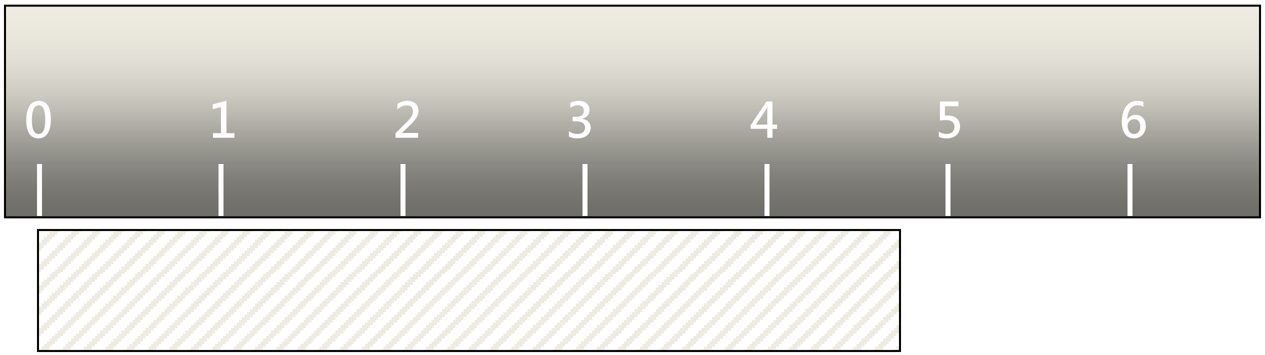
→ Algarismos significativos

Exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **centímetros**



- O comprimento da barra está certamente entre 4cm e 5cm;
- Qual seria o algarismo que viria depois do 4?
- Leitura possível: L=4,7cm (ou 4,6cm ou, ainda, 4,8cm).

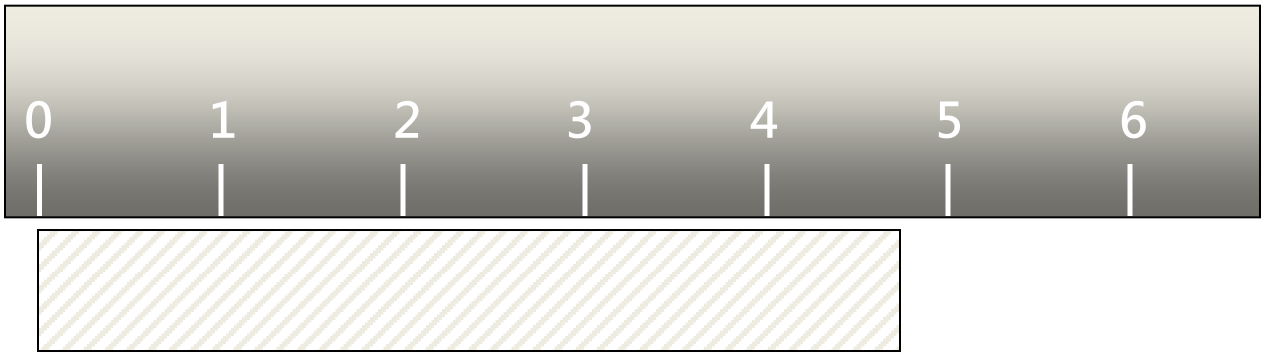
→ Algarismos significativos



algarismo duvidoso

$$L = \underbrace{4{,}7}_{\text{algarismos significativos}}\ \text{cm}$$

→ Algarismos significativos



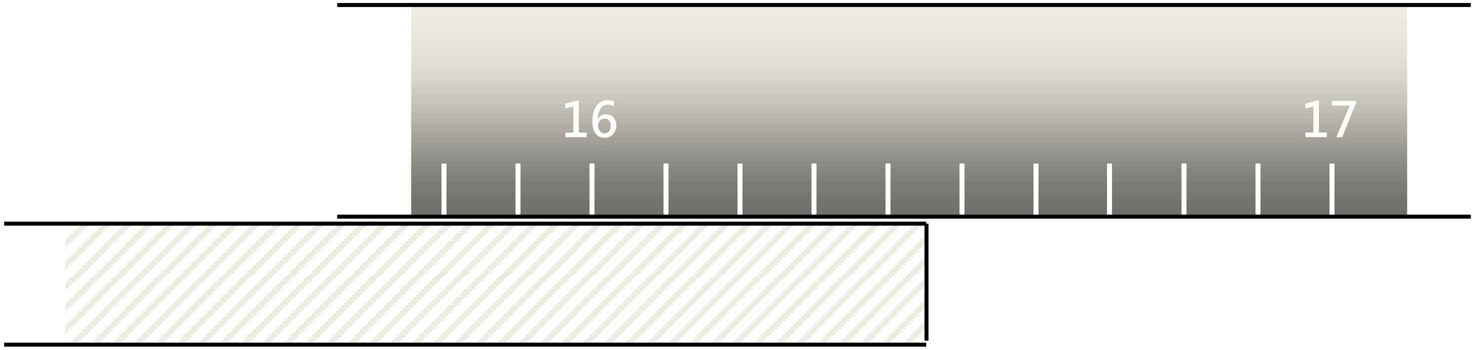
algarismo duvidoso

$$L = \underbrace{4{,}7}_{\text{algarismos significativos}}\ \text{cm}$$

• **Regra geral**: Os algarismos significativos de uma medida são todos os algarismos lidos com certeza mais o primeiro algarismo duvidoso;

→ Algarismos significativos

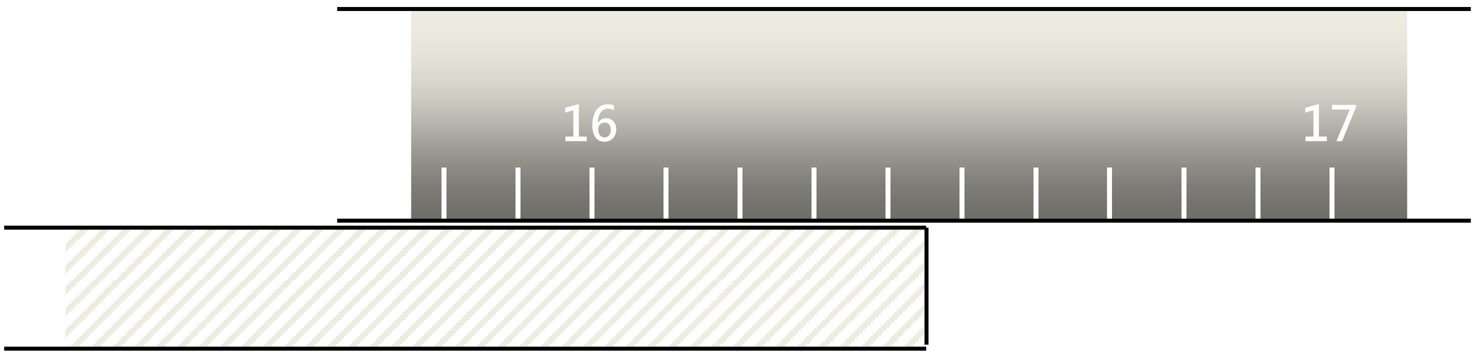
Mais um exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **milímetros**



- Leitura possível: L=16,45cm;

→ Algarismos significativos

Mais um exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **milímetros**



• Leitura possível: L=16,45cm;

• Na referida medida todos os algarismos são significativos;
• O algarismo 5 foi avaliado, porém, sendo ele o primeiro algarismo duvidoso, ele também é significativo;

→ Algarismos significativos

(Regras básicas)

- Ao efetuar qualquer operação matemática com grandezas expressas com diferentes números de algarismos significativos, é necessário exprimir o resultado segundo a norma de que o número obtido pode ter apenas <u>um algarismo duvidoso</u>;

- Assim sendo, é preciso arredondar o resultado obtido no primeiro algarismo duvidoso;

→ Algarismos significativos

• Os zeros à esquerda do número não são significativos. Exemplos:

1. **a medida 0,0023cm tem somente dois algarismos significativos,**
2. **a medida 0,348s tem apenas três algarismos significativos, e**
3. **a medida 0,0040000m tem cinco algarismos significativos.**

• Alguns autores não utilizam esta definição de algarismos significativos. No entanto, optou-se por ela por ser a definição adotada pela maioria dos autores consultados;

→ Algarismos significativos

(Definição e resumo das regras básicas)

- Algarismos significativos representam o número de algarismos que compõe o valor de uma grandeza, excluindo eventuais zeros à esquerda;

- Zeros à direita são significativos;

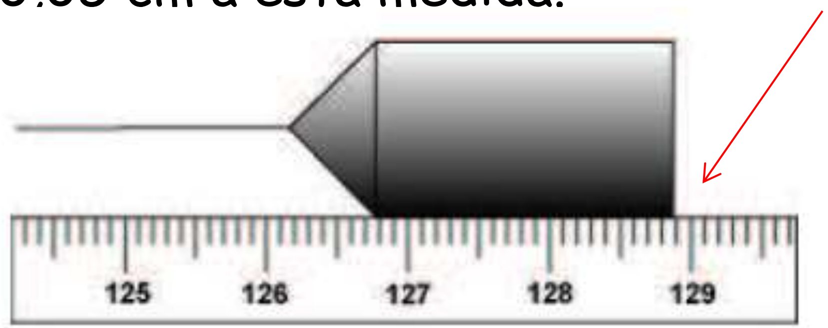
- O algarismo significativo mais à direita é denominado algarismo significativo duvidoso e é sobre ele que em geral reside a nossa incerteza;

Incerteza

Como expressar o resultado de uma medida?

Veja o seguinte exemplo:

A leitura da régua mostra 128,9 cm.
Podemos associar uma incerteza de 0.05 cm a esta medida.



Sendo assim, devemos escrever

$$L = 128{,}90 \pm 0{,}05 \text{ cm}$$

Especifica o intervalo em que se tem confiança de ser onde a quantidade se encontra, entre 128,85 e 128,95.

Especifica o valor mais plausível da medida.

Em geral:

$$\boxed{\text{Valor medido de x} = x_{médio} \pm \delta x}$$

Algarismos significativos da Incerteza

Como δx é só uma estimativa da incerteza, não faz sentido expressá-lo com muita precisão.

Exemplo
É um ABSURDO expressar a medida da aceleração da gravidade como $g = 9{,}82 \pm 0{,}02385\ m.s^{-2}$.

Mesmo em trabalhos de altíssima precisão, utilizam-se no máximo DOIS algarismos significativos para expressar a incerteza de uma medida.

No nosso caso, vamos trabalhar com apenas 1 algarismo significativo na incerteza, o que resulta em

$$g = 9{,}82 \pm 0{,}02\ m.s^{-2} .$$

Algarismos significativos da Incerteza

Outro exemplo:
A velocidade medida de um foguete é 6050,78 $m.s^{-2}$.

Como expressar essa medida se a incerteza for

- $\pm$ 30 ?
- $\pm$ 3 ?
- $\pm$ 0,3 ?

Algarismos significativos da Incerteza

Outro exemplo:
A velocidade medida de um foguete é 6050,78 m.s^{-2}.

Como expressar essa medida se a incerteza for

- $\pm$ 30 ? $\boxed{6051 \pm 30}$

  Faixa de confiança entre 6020 e 6080 m.s^{-2}

- $\pm$ 3 ? $\boxed{6051 \pm 3}$

  Faixa de confiança entre 6048 e 6054 m.s^{-2}

- $\pm$ 0,3 ? $\boxed{6050{,}8 \pm 0{,}3}$

  Faixa de confiança entre 6050,5 e 6051,1 m.s^{-2}

Regras práticas para apresentação de resultados

- Para expressar a incerteza, use apenas 1 algarismo significativo, conforme discutido anteriormente;
- O último algarismo significativo do valor medido deve ser da mesma ordem de grandeza (mesma casa decimal) que a incerteza;
- A notação científica pode ser usada para se evitar ambigüidades. Neste caso, deve-se usar a mesma potência de dez tanto para o valor da grandeza quanto para sua incerteza.

NOTAÇÃO ERRADA	NOTAÇÃO CORRETA
$5{,}30 \pm 0{,}0572$	$5{,}30 \pm 0{,}06$
$124{,}5 \pm 10$	120 ± 10
$0{,}00002002 \pm 0{,}0000005$	$(200 \pm 5)\text{X}10^{-7}$
$(45 \pm 2{,}6)\text{X}10^{1}$	$(45 \pm 3)\text{X}10^{1}$

Incerteza

Todo processo de medição tem imperfeições que dão origem a uma incerteza em seu resultado.

A incerteza é definida como a diferença entre o valor medido e o valor verdadeiro (em geral, não acessível) do mensurando.

Teoria de erros

Tipos de erros

Podem ser basicamente: **estatístico, sistemático e instrumental**:

- **Erro estatístico**
  - Origem: variações imprevisíveis no processo de medida. Não pode ser compensado, mas pode ser reduzido, aumentando-se o número de observações ou repetições da mesma medida.
- **Erro sistemático**
  - Origem: má calibração do instrumento ou de um erro de medida repetitivo. Não pode ser eliminado, mas pode ser reduzido ou corrigido. Ex: uma balança mal aferida que apresenta sempre uma leitura 50 g maior do que o valor real do objeto medido.
- **Erro instrumental**
  - Depende de cada instrumento

Teoria de erros

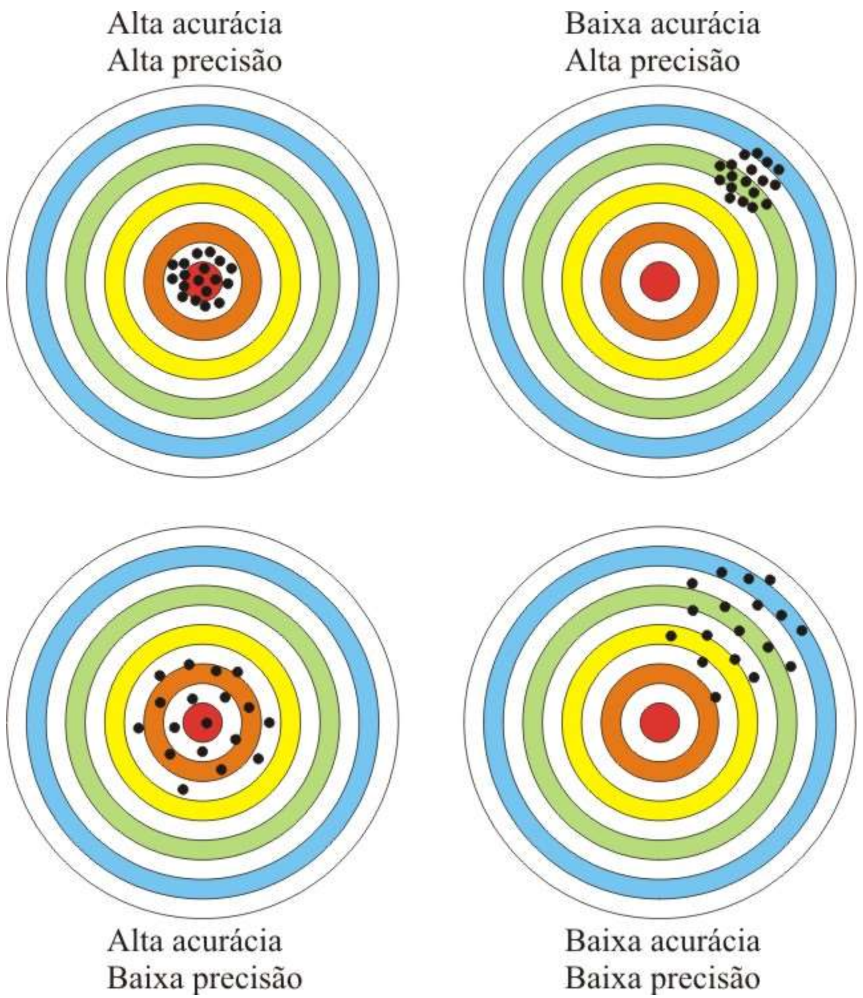
Conceitos básicos

Precisão

Medida de quão bem o valor de uma medida foi determinado, sem considerar se este está próximo ou não do valor real.
Também é uma medida da reprodutibilidade do resultado de um experimento.

Acurácia ou **exatidão**

Medida de quão próximo o valor medido está do valor verdadeiro da grandeza.



Como estimar incertezas

A incerteza pode ser de dois tipos, segundo o método utilizado para estimar o seu valor:

Avaliação tipo A

A incerteza é avaliada por meio de uma análise estatística de uma série de medidas.

Avaliação tipo B

A incerteza é avaliada levando em conta o instrumento utilizado.

Cálculo de incertezas

Avaliação tipo B

- Conhecimento sobre o instrumento utilizado
- Especificações do fabricante
- Dados de calibração

Exemplos:

- Metade da menor divisão de um instrumento
- Faixa de oscilação do ponteiro de um medidor analógico
- Faixa de variação do último algarismo de um medidor digital

Avaliação tipo A

Quando efetuamos várias medidas de uma mesma grandeza e obtemos valores diferentes, a incerteza da medida está associada ao desvio padrão.

Exemplo:
Tempo de queda livre de uma bolinha de tênis, lançada a uma altura de $h = 2,00 \pm 0,05$ *m*, medido com o cronômetro.

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Precisamos de um tratamento estatístico nesses casos!

Cálculo de incertezas

Definições

- Estimativa do valor correto da grandeza medida ou Valor Médio

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

- Estimativa do Desvio Padrão de cada medida

$$\Delta x = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

- Desvio padrão da média

$$\Delta\bar{x} = \sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Cálculo de incertezas

De volta ao exemplo...

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Valor médio $$t_m = \frac{1}{N}\sum t_i \quad = 0{,}627\, s$$

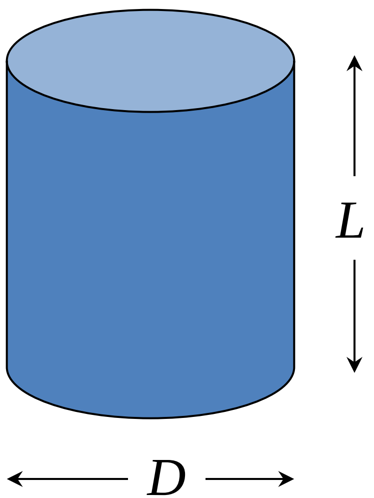
Incerteza da média $$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum (t_i - t_m)^2}{N(N-1)}} \quad = 0{,}010651\, s$$

Apresentação do Resultado: $$t = t_m \pm \sigma_m \quad = (0{,}63 \pm 0{,}01)\, s$$

Propagação de erros

Como determinar a incerteza de uma grandeza que é obtida por meio de um cálculo usando medidas diretas?

Exemplo: Vamos considerar um cilindro de diâmetro da base D e altura L.



Medindo D e L, o volume do cilindro será estimado por:

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L$$

Aí vem a seguinte questão:

Qual a incerteza envolvida nessa determinação indireta do volume?

O diâmetro e a altura são determinados experimentalmente e, consequentemente essas grandezas possuem incertezas associadas a sua determinação:

$$D = \overline{D} \pm \sigma_D, \qquad L = \overline{L} \pm \sigma_L$$

Propagação de erros

Vamos considerar um caso concreto

$$D = 5{,}00 \pm 0{,}05 \text{ cm} \qquad L = 12{,}50 \pm 0{,}05 \text{ cm}$$

Considerando a expressão para a determinação do volume

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L \; = \pi \frac{(5{,}00 \pm 0{,}05)^2}{4} (12{,}50 \pm 0{,}05) cm^3$$

O valor médio do volume é dado simplesmente pelos valores médios do diâmetro e da altura:

$$\overline{V} = \pi \frac{(5{,}0)^2}{4} (12{,}5) cm^3 = 245{,}44 cm^3$$

Mas, qual a incerteza nessa determinação do volume?

Qual o valor que obteríamos se considerássemos os valores máximos do diâmetro, 5,05 cm, e da altura, 12,55 cm?
E se considerássemos os valores mínimos?

Assim, com esses dados de diâmetro e altura, podemos concluir que

$$V = (245 \pm 6) \text{ cm}^3$$

Propagação de erros

Esse procedimento de considerar "valores máximos e mínimos" nos dá uma ideia grosseira da incerteza na variável determinada indiretamente.

Existe um método mais rigoroso e apropriado para se encontrar a incerteza de uma variável determinada indiretamente.

Esse método é denominado PROPAGAÇÃO DE ERROS

Vamos considerar o caso de uma variável dependente geral

$$F(x, y, z, ...)$$

A incerteza em F é determinada indiretamente pela propagação dos erros das outras variáveis

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 (\sigma_x)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 (\sigma_y)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 (\sigma_z)^2 + ...}$$

Propagação de erros

Voltando ao exemplo anterior do volume de um cilindro:

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 (\sigma_D)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 (\sigma_L)^2} = \bar{V}\sqrt{4\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}$$

$$= 245\sqrt{4\left(\frac{0{,}05}{5{,}00}\right)^2 + \left(\frac{0{,}05}{12{,}5}\right)^2}$$

Resultando num erro propagado de **5 cm³**

$$V = (245 \pm 5)\ \text{cm}^3$$

Exercício

Determine a aceleração gravitacional *g* considerando o exemplo do experimento de queda livre caseiro:

O tempo de queda livre de uma bolinha de tênis, lançada a uma altura de *h = 2,00 ± 0,05 m*, foi medido com o cronômetro do meu telefone celular.

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Tratando os dados: $t = t_m \pm \sigma_m \quad = (0{,}63 \pm 0{,}01)\ s$

Cálculo de g: $g = 2\dfrac{h}{t^2}$ $\qquad \bar{g} = 2\dfrac{\bar{h}}{\bar{t}^2} = 10{,}406\ m/s^2$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)^2 (\sigma_h)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 (\sigma_t)^2} = \bar{g}\sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{\bar{h}}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_t}{\bar{t}}\right)^2} \quad = 0{,}425\ m/s^2$$

Apresentação do Resultado: $g = 10{,}4 \pm 0{,}4\ m/s^2$

Quadro resumo

w = w (x, y, ...)	Expressões para σ_w
w = x ± y soma e subtração	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ somar as incertezas absolutas em quadratura
w = axy multiplicação	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
w = a (y / x) divisão	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
w = x^m potência simples	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert m\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$
w = ax multiplicação por constante	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$ **ou** $\sigma_w = \lvert a\rvert\sigma_x$
w = ax + b	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$ **ou** $\sigma_w = \lvert a\rvert\sigma_x$
w = ax^py^q	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
w = a sen(bx) função qualquer aplicar a definição	$\sigma_w = \lvert ab\cos(bx)\rvert\sigma_x \quad b\sigma_x$ em radianos

Identifique o tipo de expressão que você precisa para determinar a incerteza.

Exemplo: Um objeto percorreu a distância de D = (2,4 ± 0,2) m em um tempo de t = (1,2 ± 0,1)s. Determine a velocidade média do objeto e sua incerteza.

$$v = \frac{D}{t} = \frac{2{,}4}{1{,}2} = 2$$

Para o cálculo da incerteza, observamos na tabela que:

$$\boxed{\begin{gathered}\left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 \\ \sigma_v = v\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} = 0{,}23\end{gathered}}$$

Logo: **v = (2,0 ± 0,2) m/s**

Gráficos

Muitas vezes a simples medição e obtenção de um valor para uma grandeza não é suficiente para uma boa descrição de um fenômeno.

Frequentemente, há um interesse em analisar a dependência entre duas grandezas, ou seja, saber como varia uma grandeza quando variamos controladamente uma outra.

Podemos dizer que um **gráfico** é como um instrumento que possibilita **ver** a relação entre grandezas diferentes e obter respostas imediatas apenas com o olhar sobre o comportamento de uma grandeza física em função de outra grandeza.

Regras para construção de gráficos

O que todo gráfico deve ter:

1. Título ou legenda do gráfico

2. Eixos das variáveis com os nomes das variáveis, escalas e unidades

3. Dados experimentais e incertezas

4. Funções teóricas ou curvas médias (esse último item é opcional e, dependendo das circunstâncias, pode ser omitido)

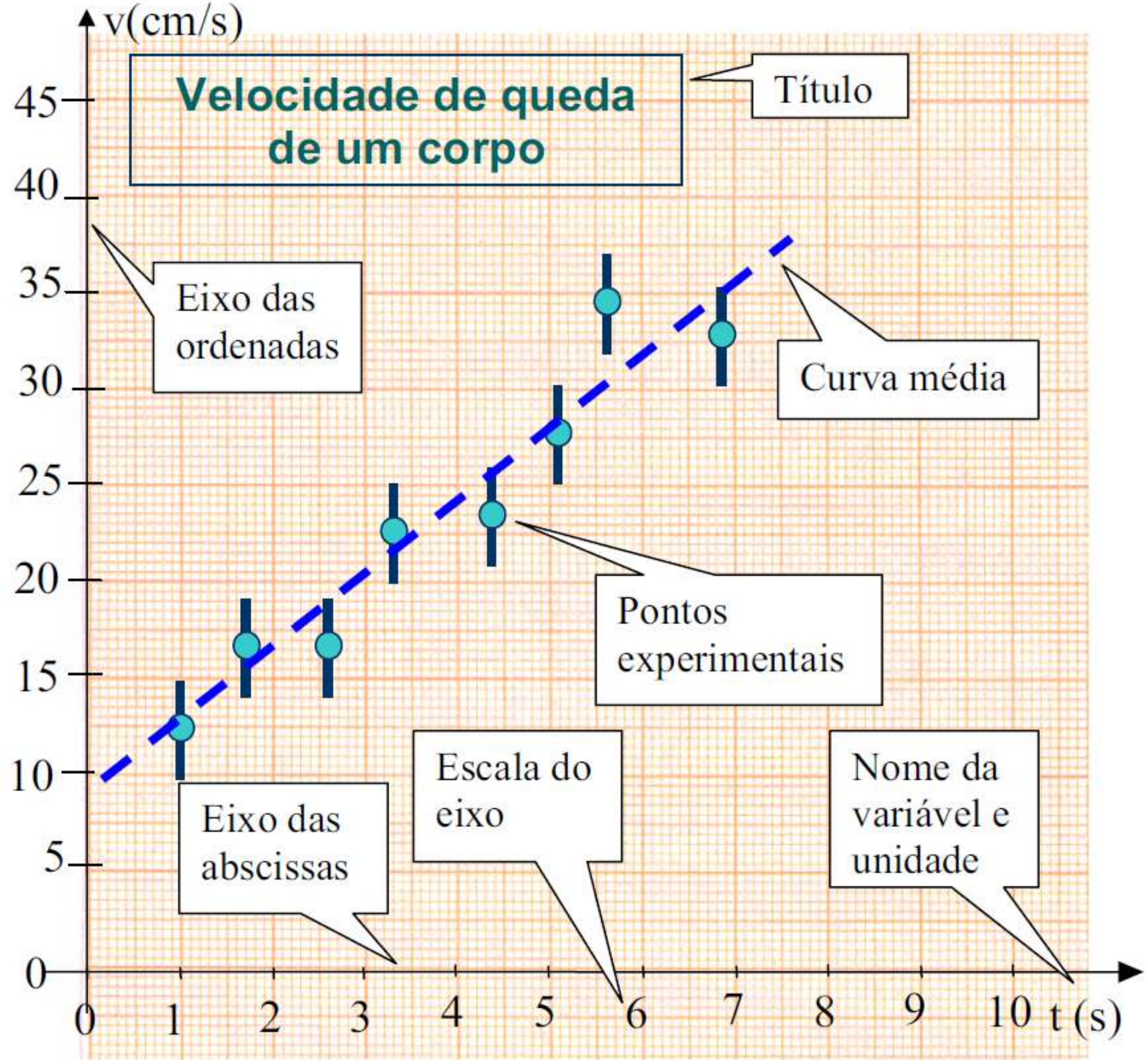
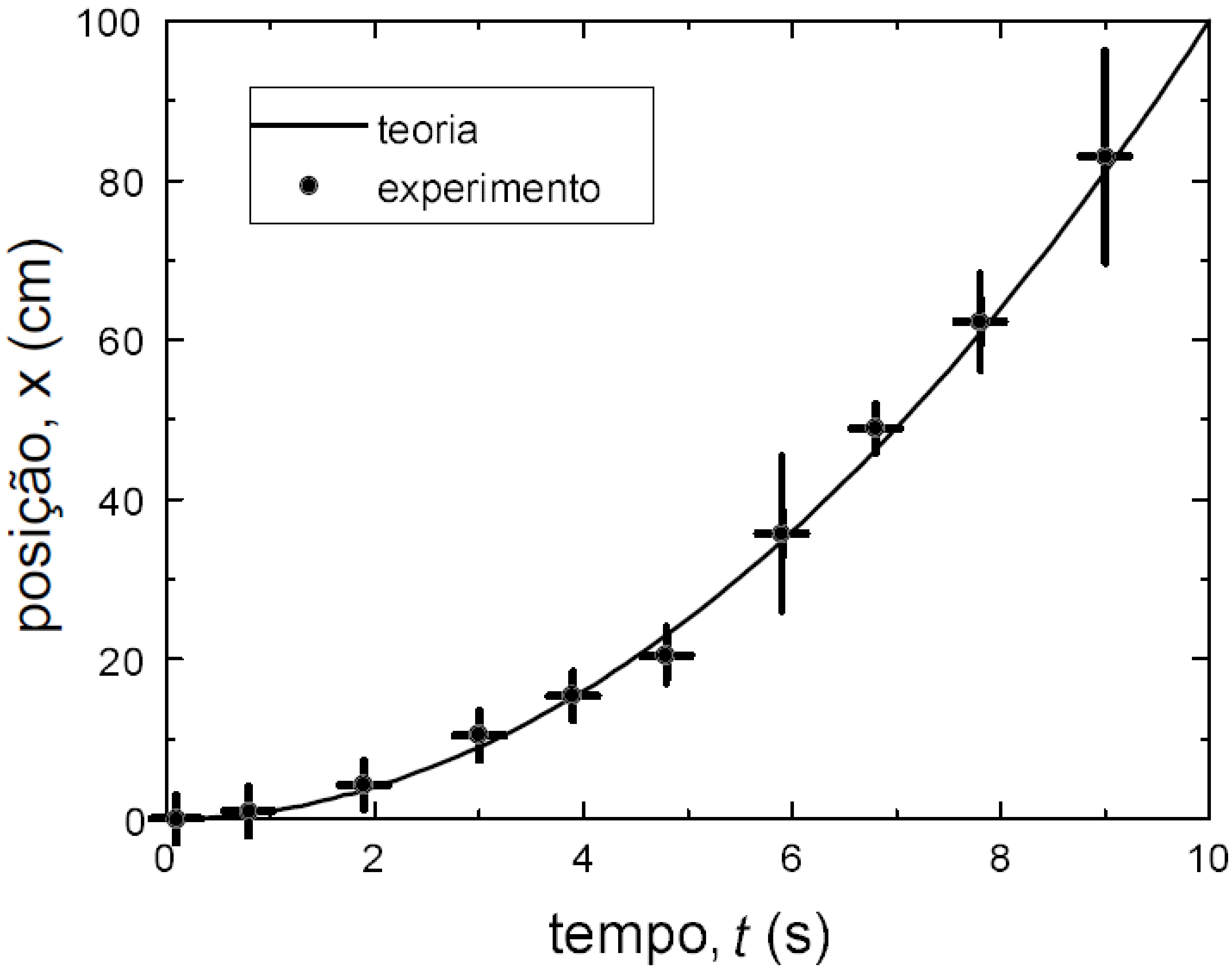


Figura 3.1. Componentes típicos de um gráfico científico padrão.

Exemplo de gráfico bem feito



Exemplo de gráfico bem feito

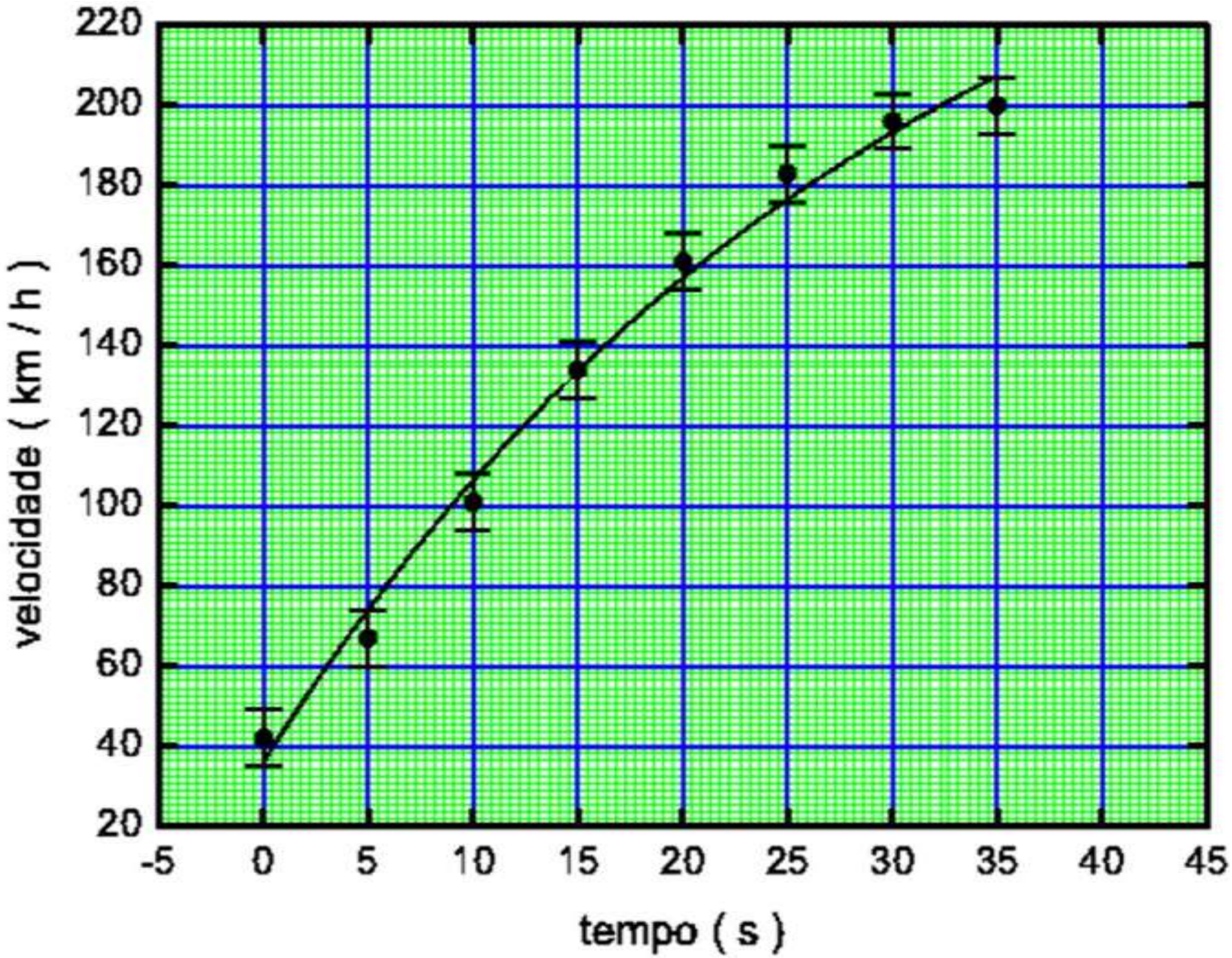
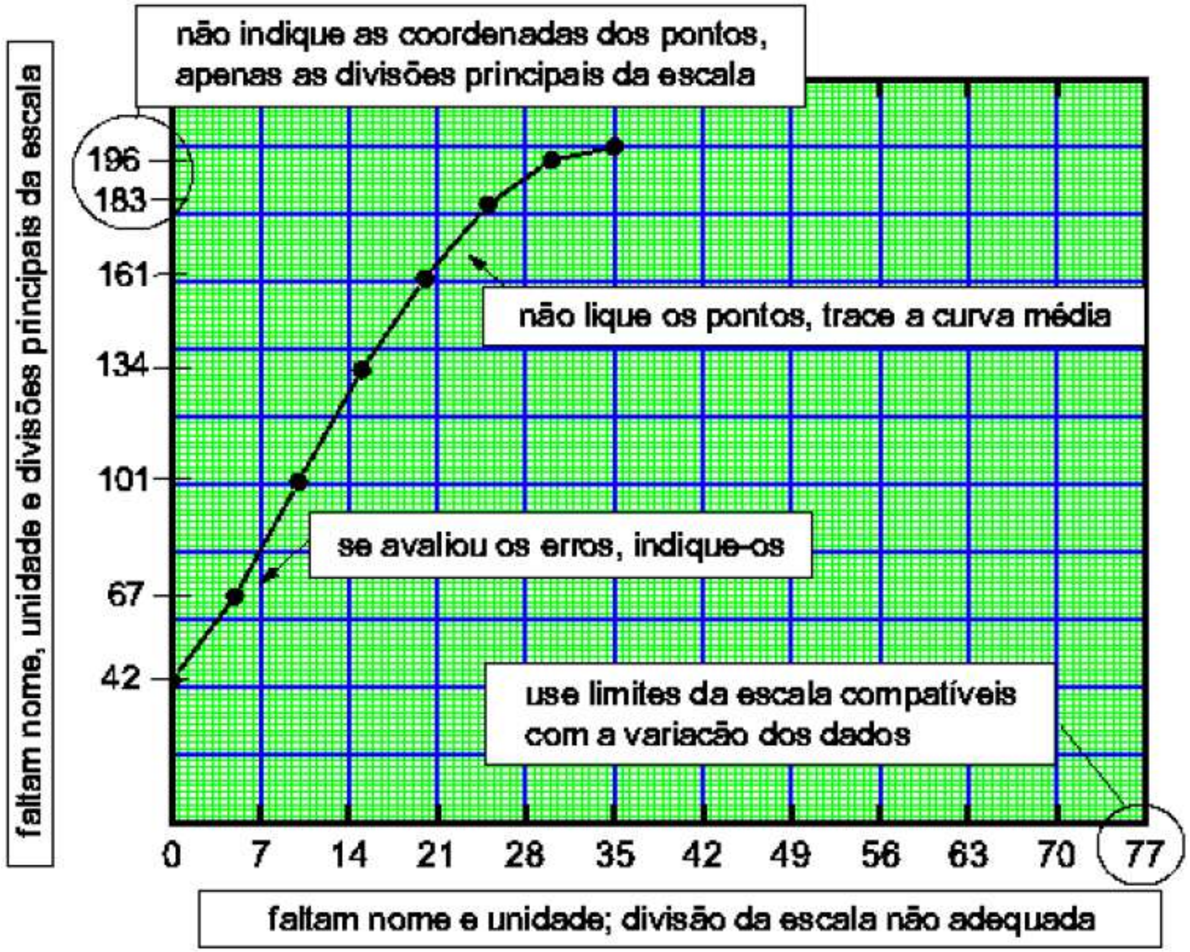
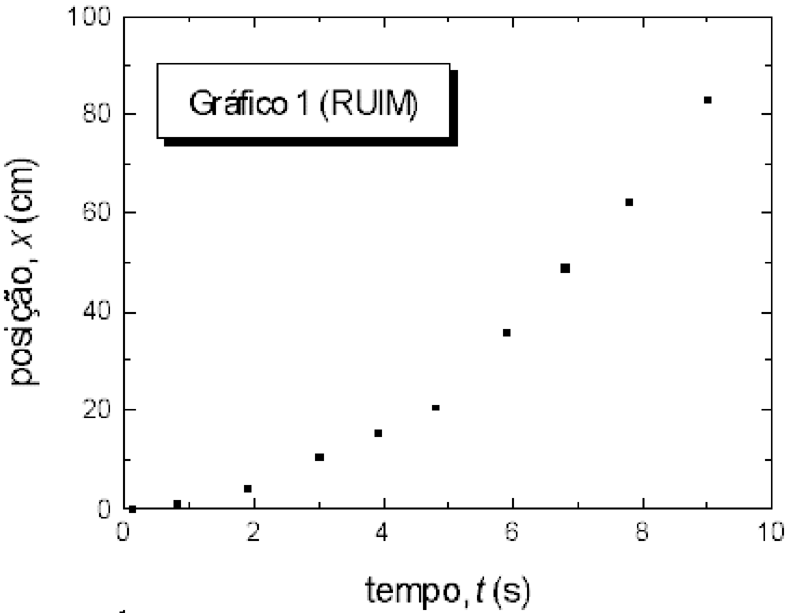


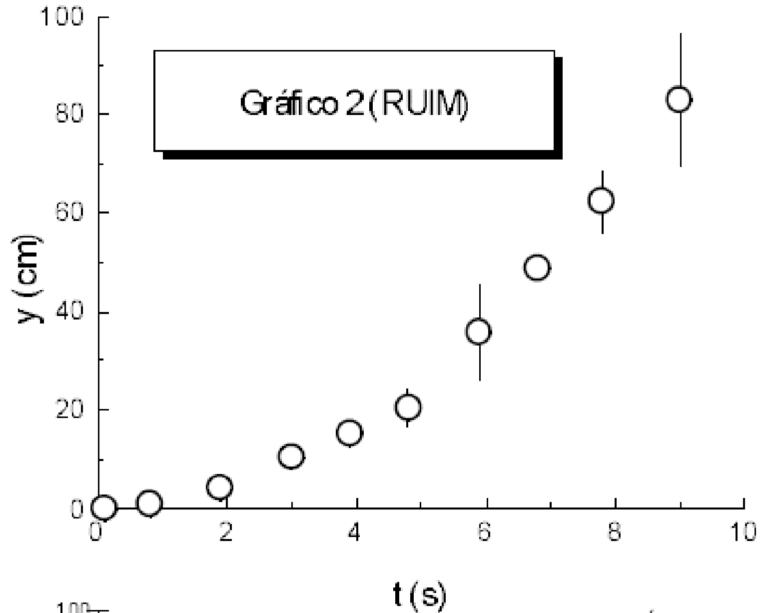
Figura 1: variação da velocidade em função do tempo de um corpo se deslocando em movimento variado

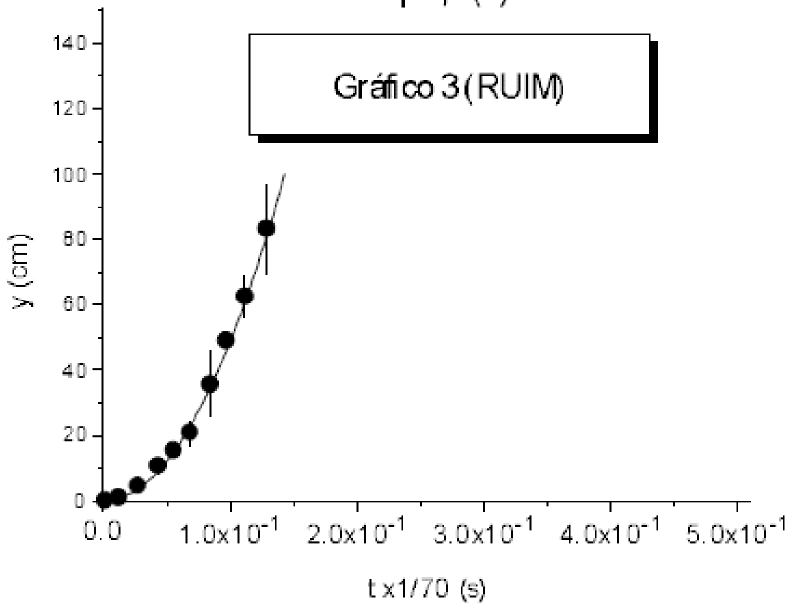
Exemplos ruins

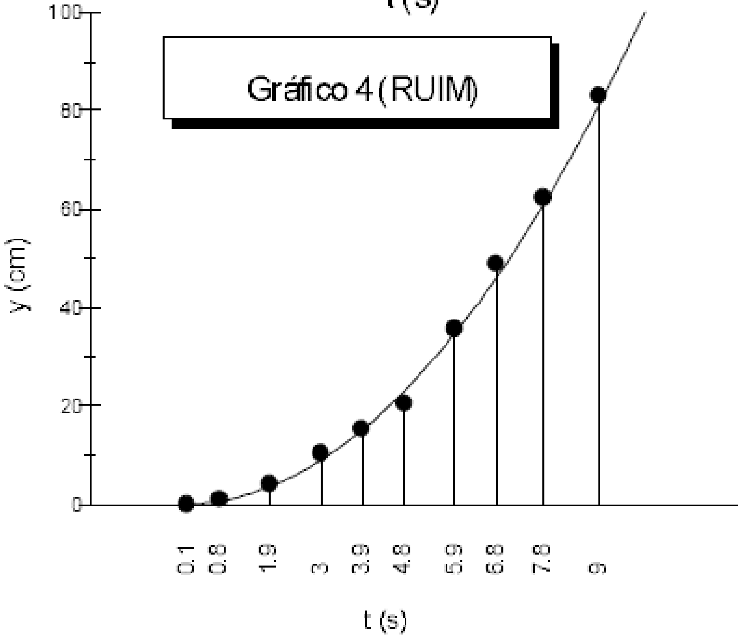


Exemplos ruins







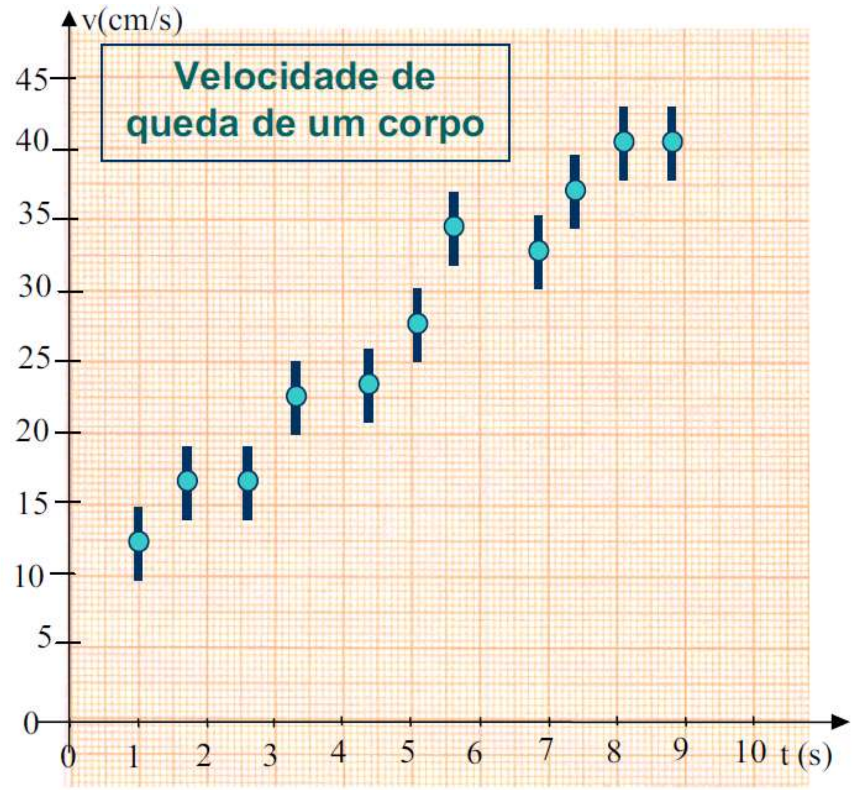


Cálculos a partir de gráficos

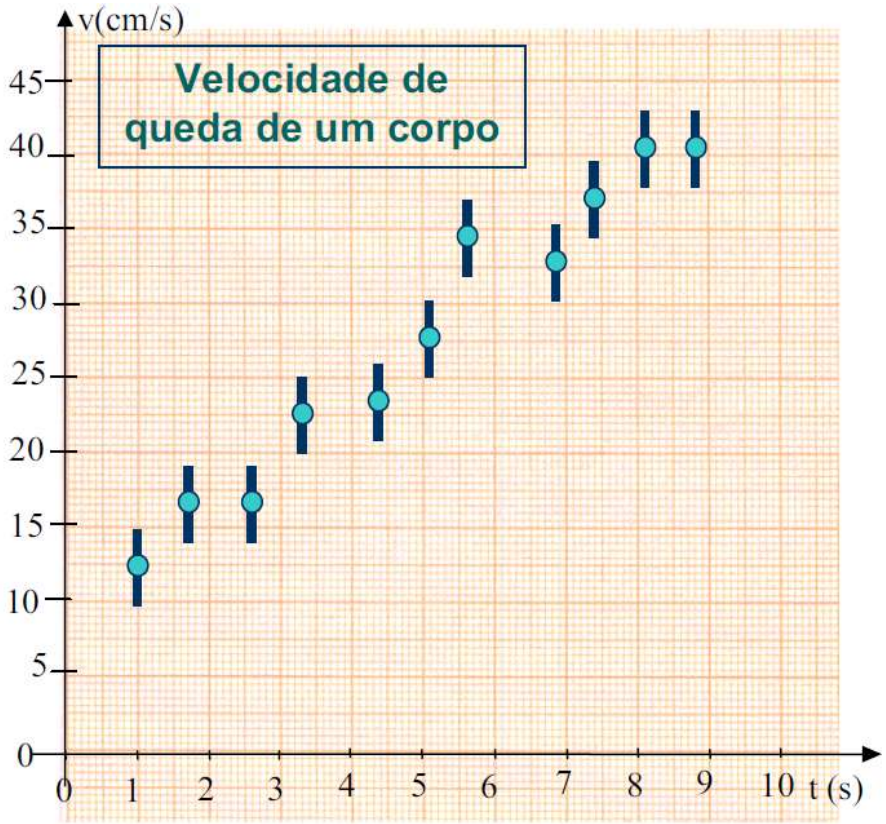
Existe um **método rápido para estimar os parâmetros de uma reta**, muito útil quando não se dispõe de um computador com software adequado para cálculos estatísticos (como, por exemplo, nas provas!).

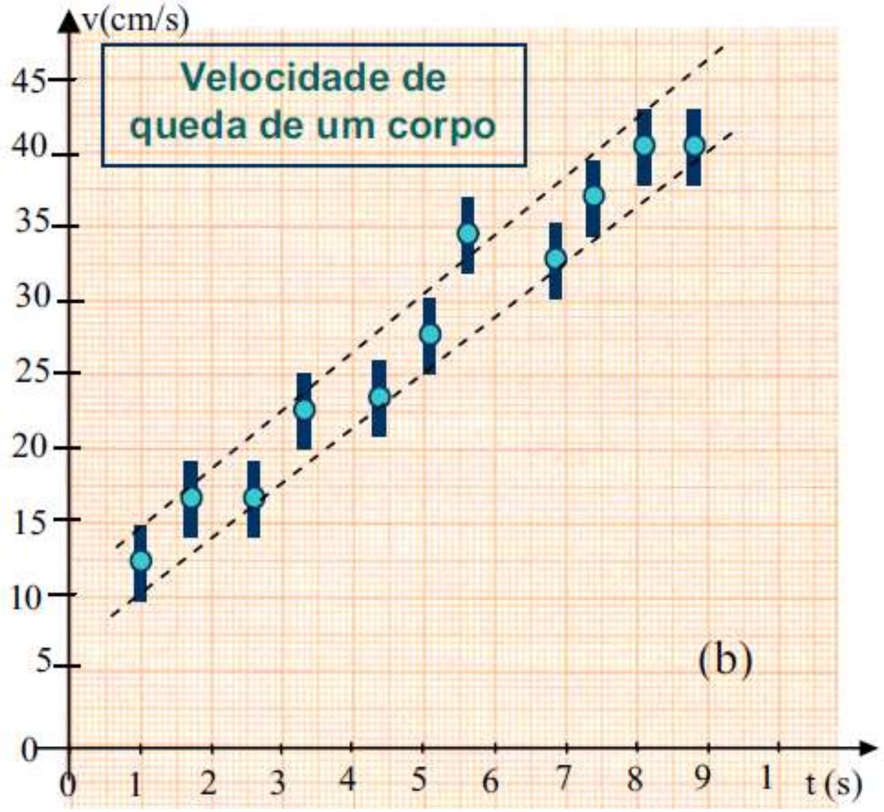
As únicas ferramentas necessárias são um lápis (ou caneta) e uma régua (de preferência transparente).

O método funciona melhor se <u>as escalas do gráfico foram escolhidas decentemente</u>, ou seja com os pontos experimentais relativamente alinhados ao longo de uma diagonal.

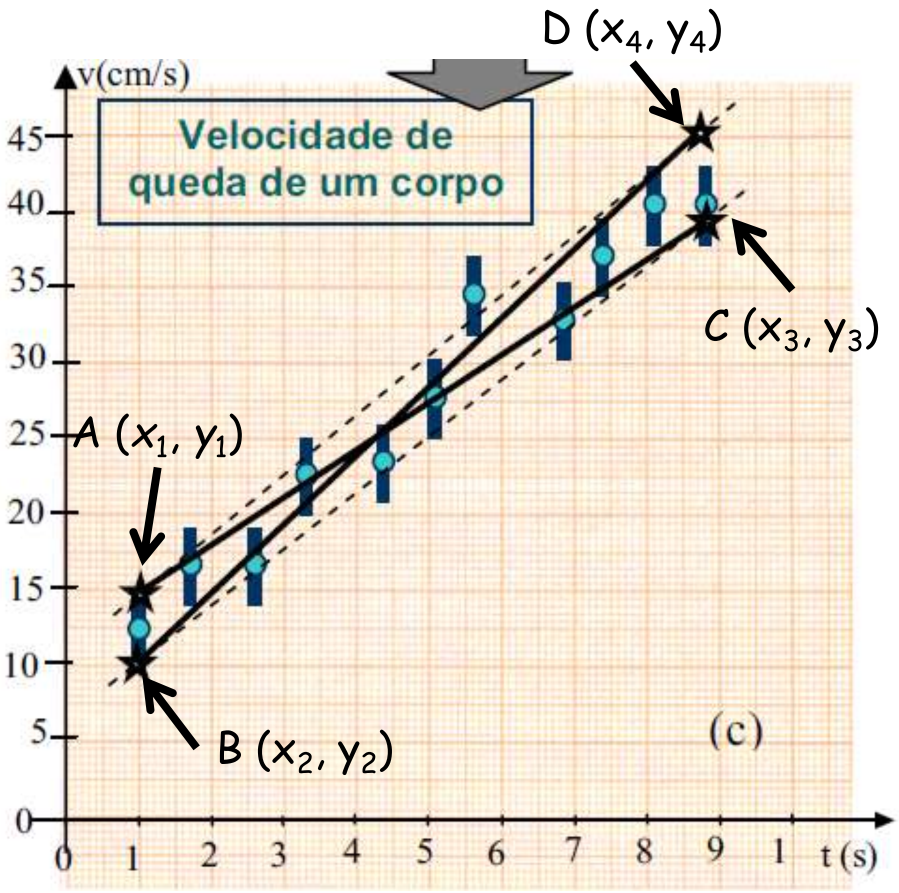


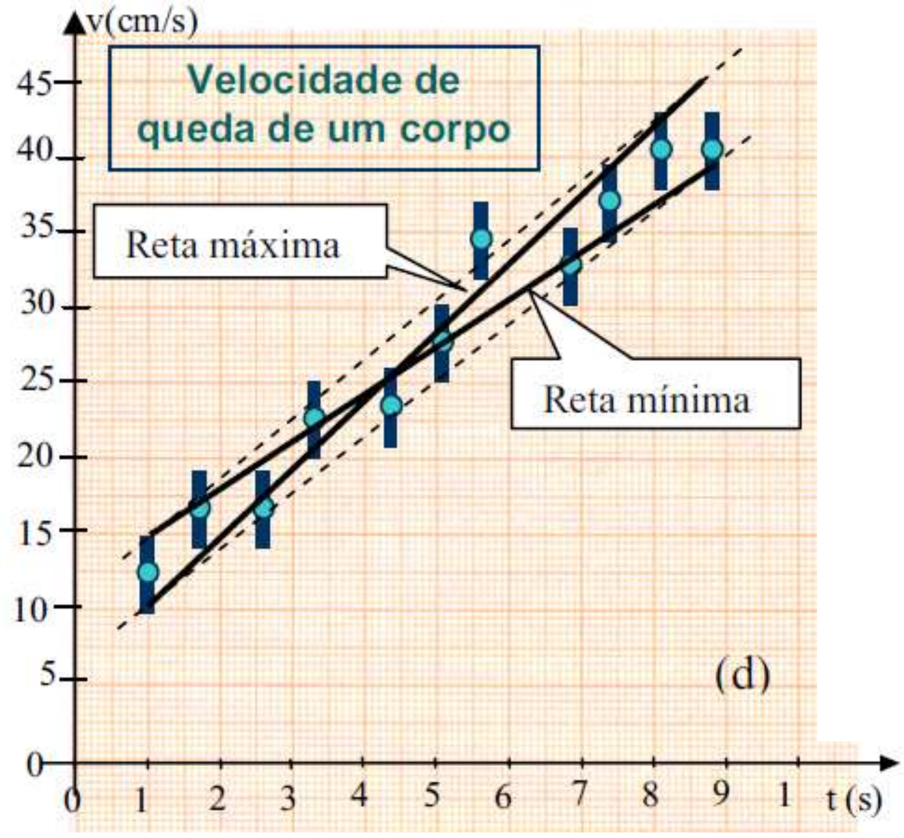
Cálculos a partir de gráficos





Cálculos a partir de gráficos





Cálculos a partir de gráficos

Os coeficientes angulares *a* de cada reta são obtidos a partir das coordenadas de seus pontos extremos:

Reta mínima $\rightarrow$ $$a_{mín} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

Reta máxima $\rightarrow$ $$a_{máx} = \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2}$$

Os coeficientes lineares *b*, por sua vez, são obtidos pela leitura direta dos pontos onde cada reta cruza o eixo y.

Cálculos a partir de gráficos

Obtém-se, assim a equação correspondente para cada uma das retas:

Reta mínima

$$\boxed{y = a_{mín} \cdot x + b_{mín}}$$

Reta máxima

$$\boxed{y = a_{máx} \cdot x + b_{máx}}$$

Finalmente, os coeficientes e as respectivas incertezas da **reta média** são obtidos pelas expressões abaixo:

$$a = \frac{1}{2}(a_{max} + a_{min}), \quad b = \frac{1}{2}(b_{max} + b_{min}),$$

$$\Delta\overline{a} = \frac{1}{2\sqrt{N}}\left|a_{max} - a_{min}\right| \text{ e } \Delta\overline{b} = \frac{1}{2\sqrt{N}}\left|b_{max} - b_{min}\right| .$$

Referências

Vuolo, José Henrique. *Fundamentos da teoria de erros*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 2a Ed. 1992.

Bevington, P. R., Robinson, D. K., *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, McGraw-Hill, New York, 3rd edition, 2003.

Serway, R. A., Jewett, Jr., J. W., *Princípios de Física vol. 1*, **cap. 1**, Ed. Cengage Learning.

Tabacniks, Manfredo Harri. *Conceitos básicos de teoria de erros*, Revisão 2009 (AAQ), IFUSP, 2009.

Guia para física experimental IFGW-Unicamp, 1997.

Sohaib Shamim and Sabieh Anwar, *Error Analysis in the Experimental Physics Lab*, LUMS School of Science and Engineering, September 8, 2010.