Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)
Universidade Federal do ABC (UFABC)

Fenômenos Mecânicos

Aula 3

Prof. Marcelo A. Leigui de Oliveira
(leigui@ufabc.edu.br)

24/02/2023

Universidade Federal do ABC

O que veremos hoje...

- Introdução aos vetores
- Os vetores posição, velocidade e aceleração
- Movimento bidimensional / Movimento circular

Grandezas

Grandeza Escalar

É uma grandeza física que não envolve orientações

Um número e uma unidade bastam para representar uma grandeza escalar

Exemplos: massa, temperatura, tempo, potencial elétrico, energia, etc...

100,23 kg; 22,5 °C; 33 s; 120 V; ...

Grandeza Vetorial

Algumas vezes necessitamos mais do que um número e uma unidade para representar uma grandeza física

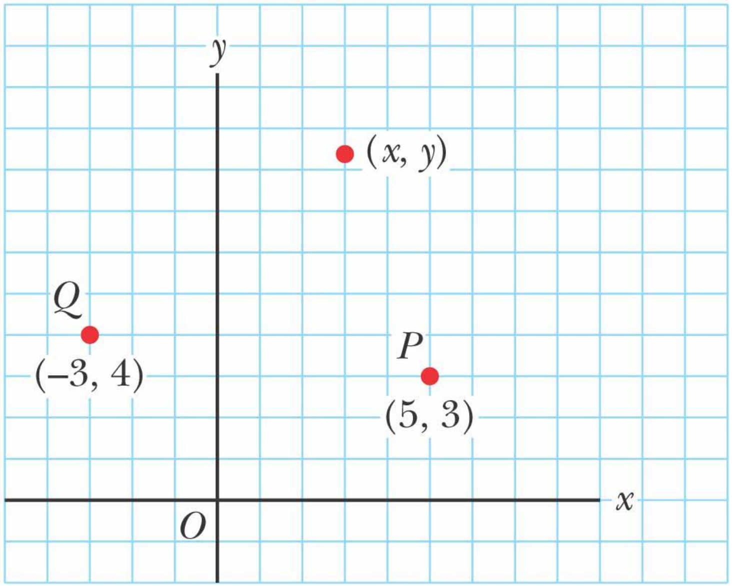
Exemplo: Descreva a sua localização nesta sala de aula.

Um número e uma unidade não bastam para isso!

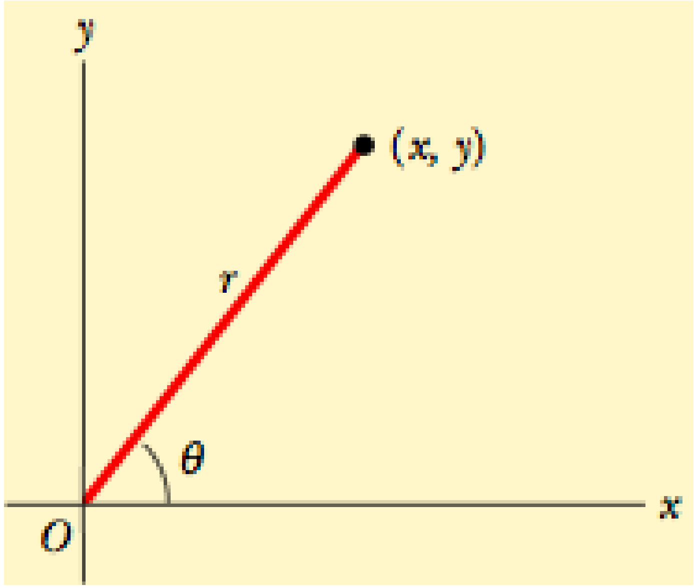
Para resolver questões desse tipo, surgiu a ideia de **VETOR !!!**

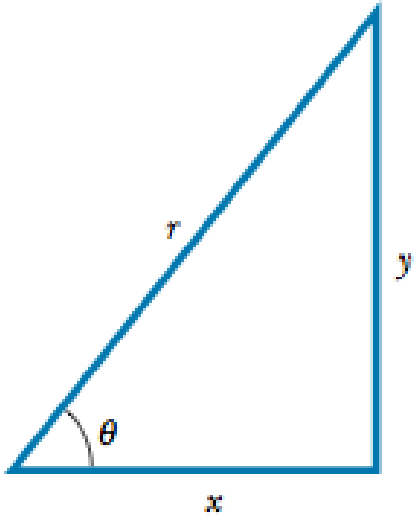
Sistemas de coordenadas

Cartesiano



Polar





$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$x = r\cos\theta$$

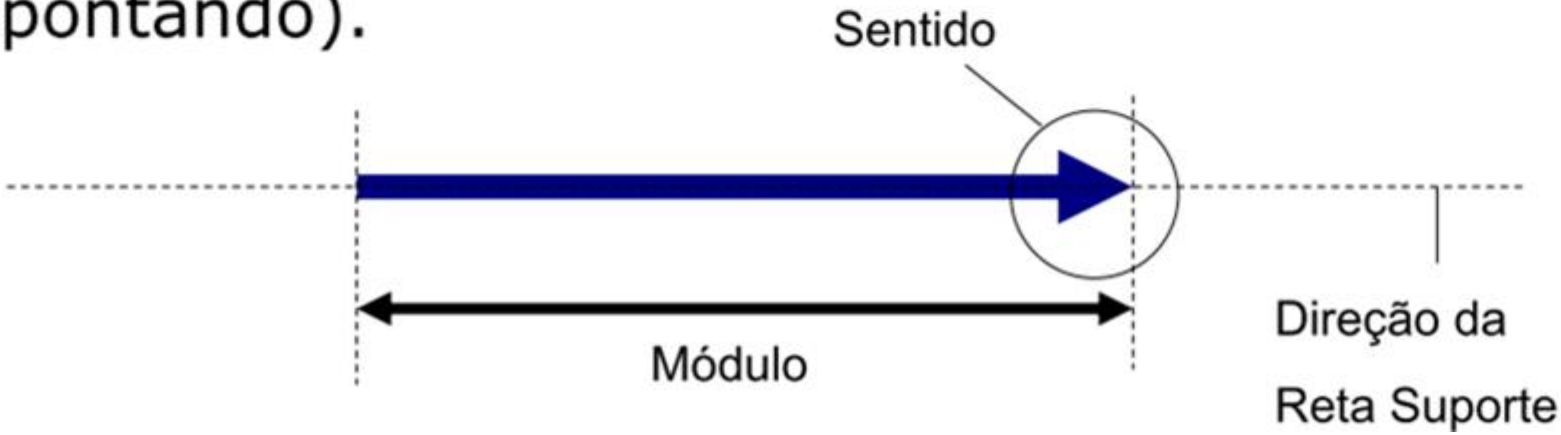
$$y = r\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

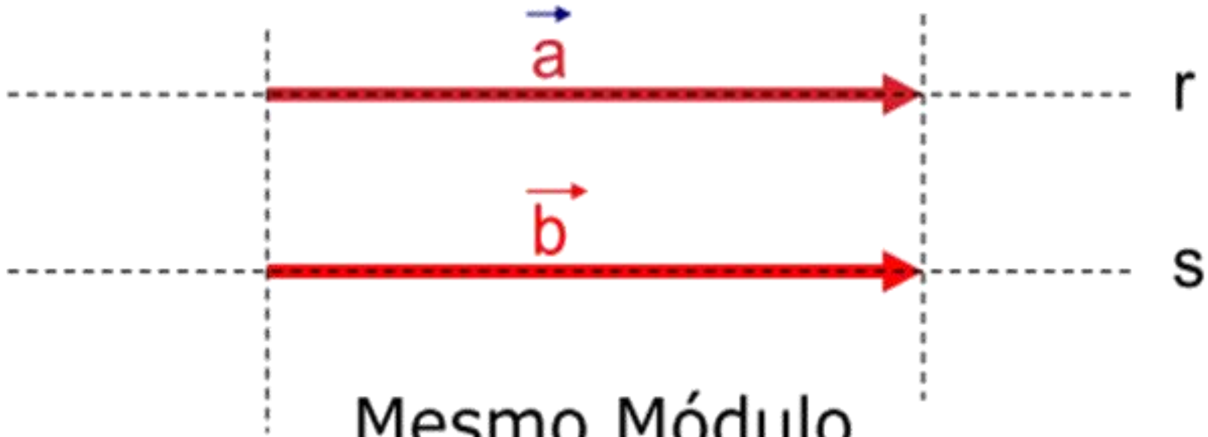
Vetores

- É um ente matemático representado por um segmento de reta orientado. E tem algumas características básicas.
- Possui módulo. (Que é o comprimento da reta)
- Tem uma direção.
- E um sentido. (Que é pra onde a "flecha" está apontando).



Comparações entre vetores

- Vetores Iguais



Mesmo Módulo

Mesma Direção

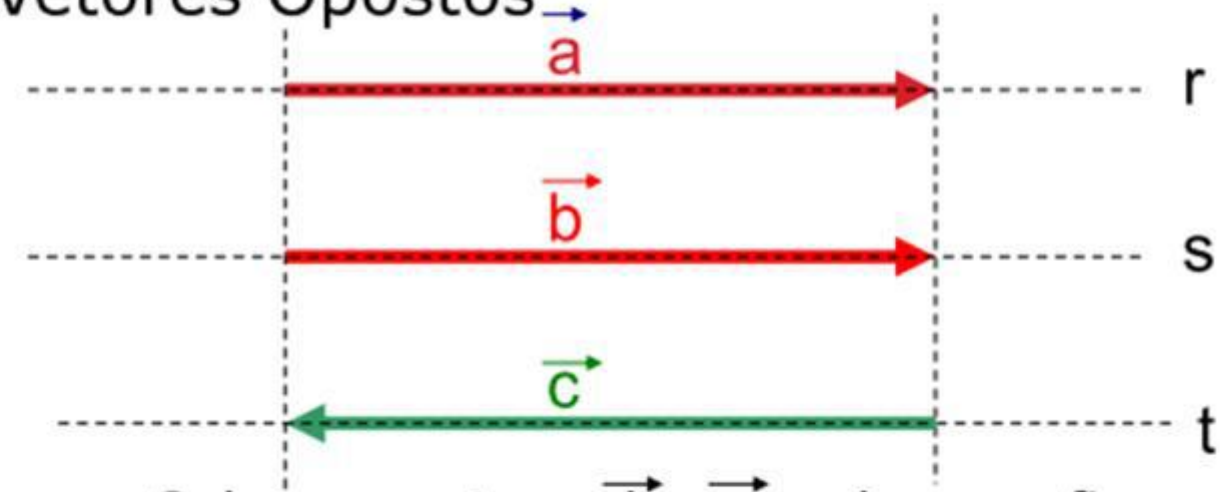
Mesmo Sentido

$$\boxed{\vec{a} = \vec{b}}$$

O vetor $\vec{a}$ é igual ao vetor $\vec{b}$.

Comparações entre vetores

- Vetores Opostos



Sobre os vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$ podemos afirmar:

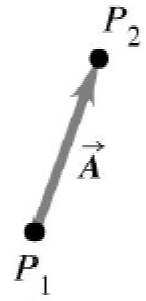
Tem o mesmo módulo, mesma direção mas sentidos opostos.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{b} = -\vec{c}}$$

O vetor $\vec{c}$ é oposto aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

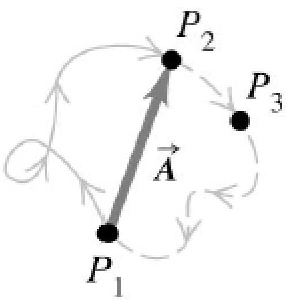
Notações

Notação manuscrita: $\underline{A}$ ou $\vec{A}$



(a)

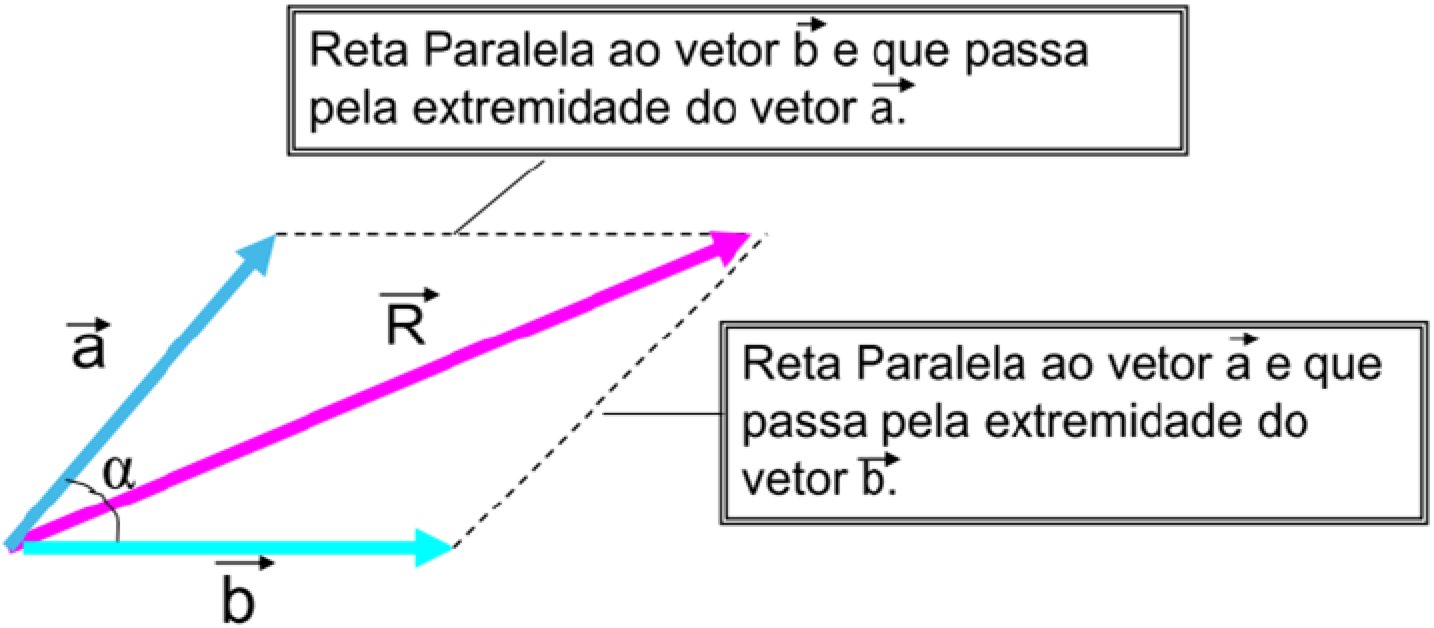
(a) O vetor $\vec{A}$ indica o deslocamento do ponto P_1 ao ponto P_2.



(b)

(b) Independente da forma da trajetória, o deslocamento é um vetor com direção traçada sempre do ponto inicial ao ponto final. Se o ponto final coincidir com o ponto inicial, o deslocamento é igual a zero.

Adição de 2 vetores - regra do paralelogramo



E o módulo, ou seja, o valor desse vetor resultante será dado por:

$$\boxed{R^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\alpha}$$

Adição de 2 vetores – casos particulares

1º) $\alpha = 0^\circ$

$S = a + b$

2º) $\alpha = 180^\circ$

$S = a - b$

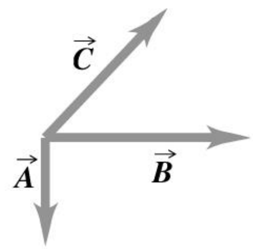
3º) $\alpha = 90^\circ$

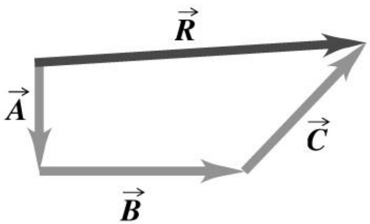
$S^2 = a^2 + b^2$

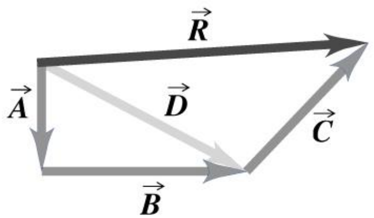
Sendo assim, qualquer que seja o ângulo entre os dois vetores o valor da resultante será:

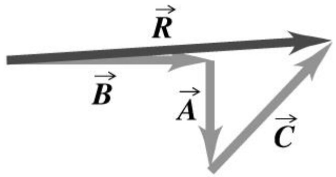
$|\, a - b \,| \leq R \leq a + b$

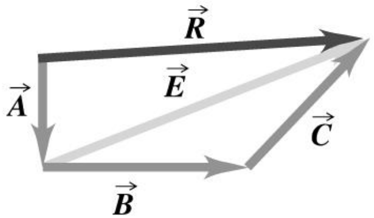
Adição de vários vetores - regra do polígono







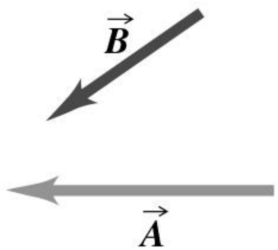




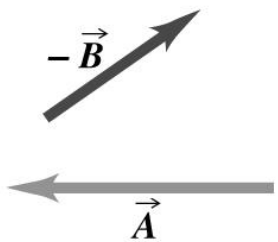
Vetor resultante ($\vec{R}$) tem origem no ponto A e término no ponto final do último vetor.

$$\vec{a}_1 + \left(\vec{a}_2 + \vec{a}_3\right) = \left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right) + \vec{a}_3$$

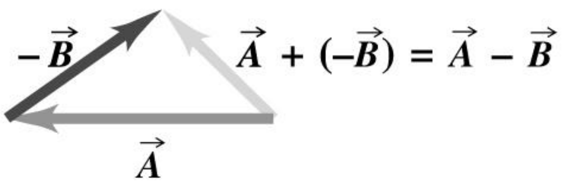
Subtração entre 2 vetores



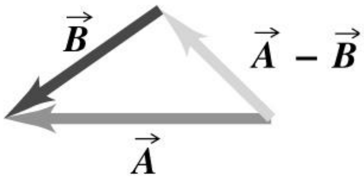
O vetor $\vec{A}$ e o vetor $\vec{B}$.



O vetor $\vec{A}$ e o vetor $-\vec{B}$.



A subtração vetorial $\vec{A} - \vec{B}$ é a soma do vetor $\vec{A}$ com o vetor $-\vec{B}$. O início do vetor $-\vec{B}$ é desenhado na extremidade do vetor $\vec{A}$.



$(\vec{A} - \vec{B}) + \vec{B} = \vec{A}$.

Multiplicação de um vetor por um escalar

Seja $\vec{a}$ um vetor e n um escalar. O produto escalar de $n\vec{a}$ será um vetor $\vec{b} = n\vec{a}$, de modo a obedecer as seguintes relações:

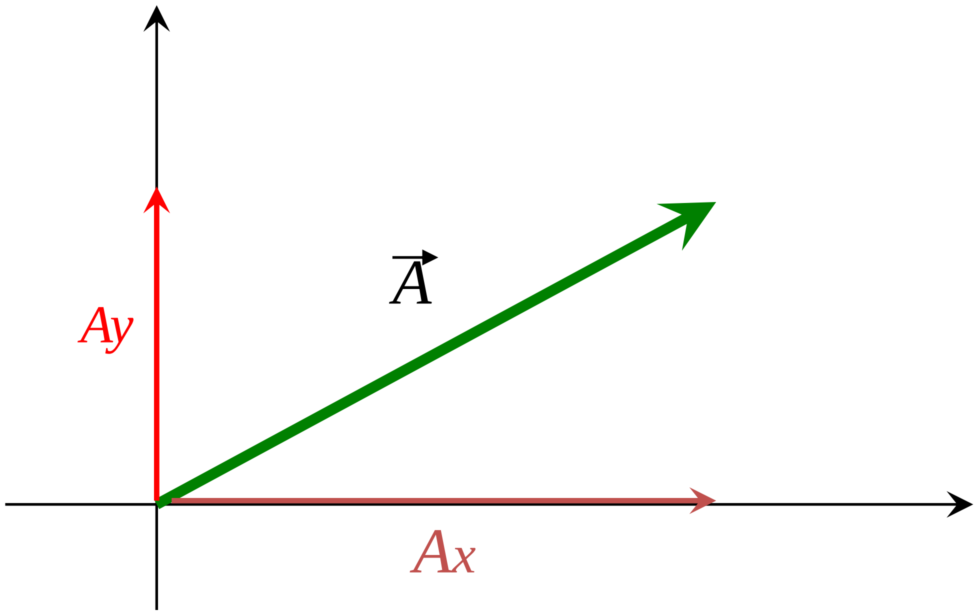
1. se $n > 0$, $\vec{b}$ terá a mesma direção e sentido de $\vec{a}$, sendo sua magnitude dada por $|n||\vec{a}|$.

2. se $n < 0$, $\vec{b}$ terá a mesma direção de $\vec{a}$, porém seu sentido será oposto e sua magnitude será dada por $|n||\vec{a}|$.

3. se $n = 0$, $\vec{b}$ será um vetor nulo.

Representação analítica de um vetor

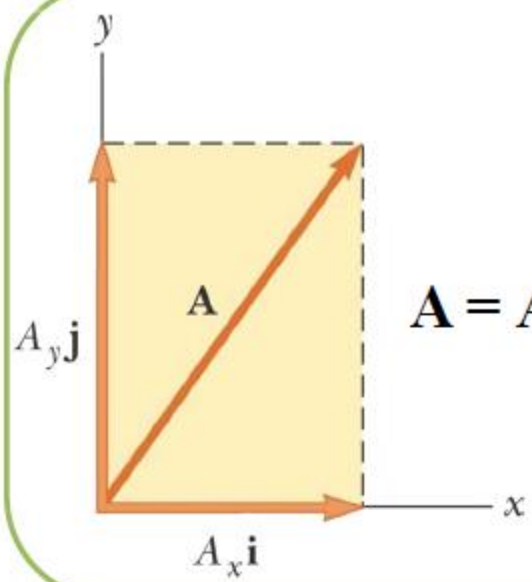
Uma das melhores maneiras de representar um vetor é a representação analítica em coordenadas cartesianas.



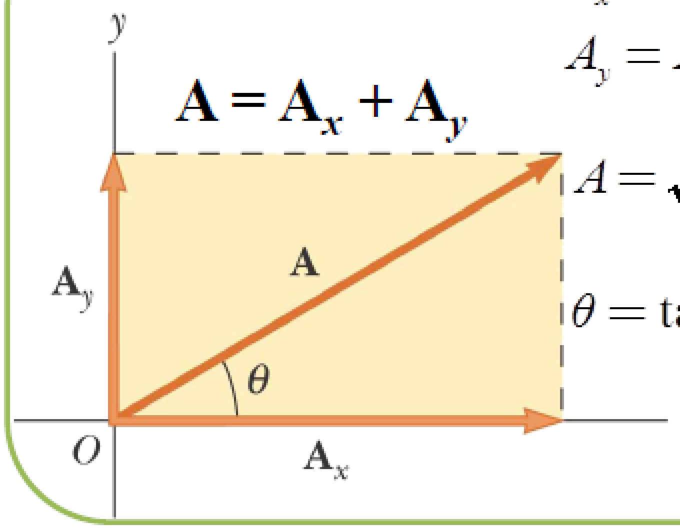
Os **versores** $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ são os **vetores unitários** que indicam a direção e o sentido dos eixos x e y, respectivamente.

Essa representação pode nos dar facilidades na manipulação algébrica.

Componentes de um vetor



$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$$



$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$$

$$A_x = A\cos\theta$$

$$A_y = A\sin\theta$$

$$A = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

Exemplos

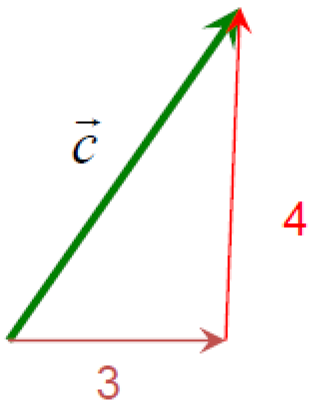
1. Dado os vetores $\vec{a} = 2\ \hat{i} + 3\ \hat{j}$

$$\vec{b} = 1\ \hat{i} + 1\ \hat{j}$$

a) Determine $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$$\boxed{\vec{c} = 3\ \hat{i} + 4\ \hat{j}}$$

b) Determine o módulo de $\vec{c}$, ou seja, $|\vec{c}|$



$$|\vec{c}| = c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$$

$$\boxed{|\vec{c}| = 5}$$

Exemplos

2. Considere um vetor $\vec{a}$ no espaço bidimensional *xy* com módulo (magnitude) a e ângulo θ com o eixo x.

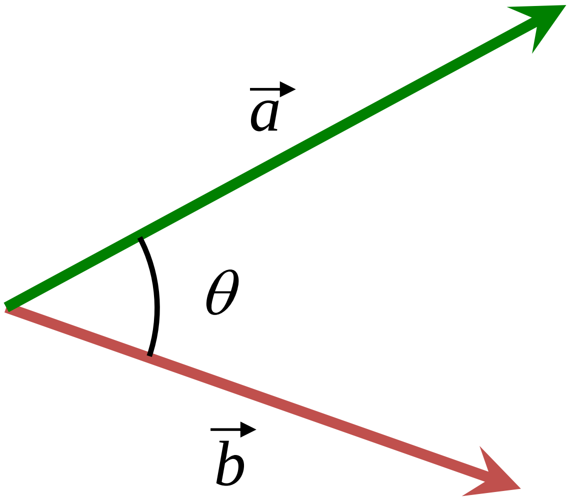
Escreva $\vec{a}$ na forma analítica.

$$\vec{a} = a \cos\theta\, \hat{i} + a \sin\theta\, \hat{j}$$

3. Considerando o vetor unitário $\hat{k}$ na direção z do espaço, escreva a forma analítica de um vetor $\vec{a}$ no espaço 3 D.

$$\vec{a} = a_x\, \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

Multiplicação entre vetores – Produto Escalar



Definição de Produto Escalar:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a\, b\, \cos\theta}$$

O resultado de um **Produto Escalar** de vetores é sempre um **Escalar** !!!

Casos Particulares

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = ab$$

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$$

Exemplos

4. Qual o resultado do produto escalar $\hat{i} \cdot \hat{j}$?

R. 0

5. Determine o produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$, onde

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

R. 1

Observação

Não existe divisão entre vetores!

$$\nexists \frac{\vec{a}}{\vec{b}}$$

Se $\boxed{\vec{a} = \alpha \vec{b}} \Rightarrow \vec{a} = a\hat{a},\ \vec{b} = b\hat{b},\ \text{mas } \hat{a} = \hat{b}$

Então : $a\hat{a} = \alpha b\hat{a} \Rightarrow a = \alpha b \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{a}{b}} \rightarrow$ módulos!

Resumo

$$\vec{A} \equiv \mathbf{A} \; ; \; \hat{i} = \mathbf{i} \; ; \; \hat{j} = \mathbf{j}$$

$$\vec{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} \equiv (A_x, A_y)$$

$$\vec{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j}$$

$$\vec{A} = \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} A_x = B_x \\ A_y = B_y \end{cases}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j}$$

$$k\vec{A} = kA_x\mathbf{i} + kA_y\mathbf{j}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y$$

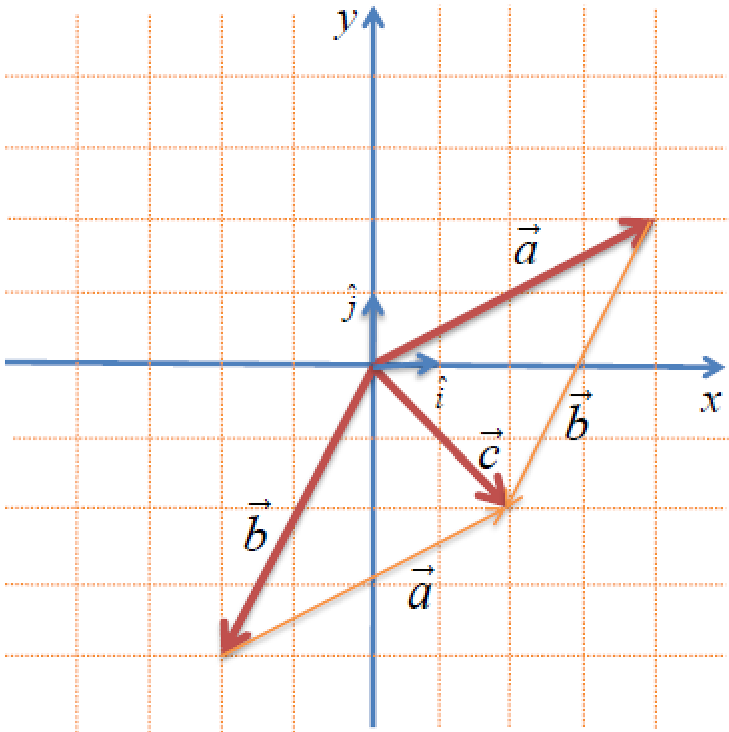
$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{\vec{A}^2} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Relembrando:

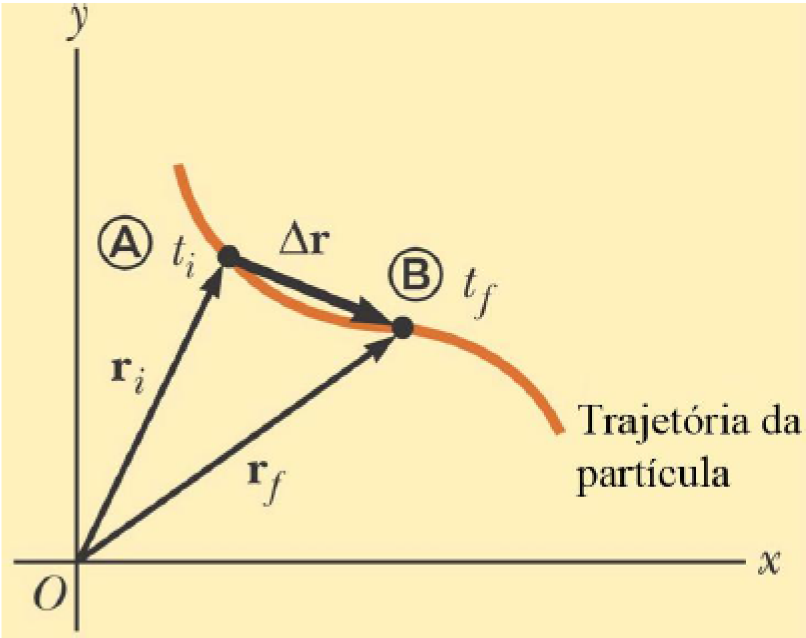
$$\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j} \quad \text{e} \quad \vec{b} = -2\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{c} = (4-2)\hat{i} + (2-4)\hat{j}$$

$$\vec{c} = 2\hat{i} - 2\hat{j}$$



Posição, velocidade e aceleração



Posição no instante t: $\vec{r}$

Posição inicial em t_i: $\vec{r}_i$

Posição final em t_f: $\vec{r}_f$

Deslocamento em Δt: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$

$$\boxed{\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}}$$

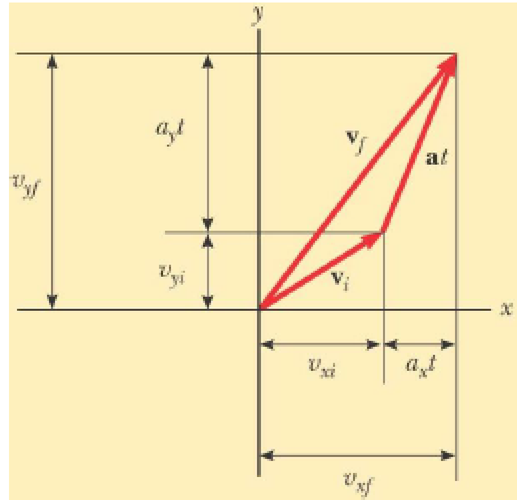
$$\Delta\vec{r} = \left[x_f - x_i\right]\hat{i} + \left[y_f - y_i\right]\hat{j}$$

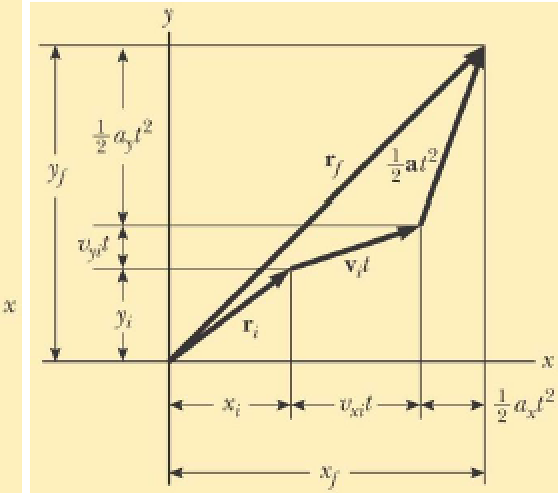
$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} \Rightarrow d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}$$

$$d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}}$$

$$d\vec{v} = dv_x\,\hat{i} + dv_y\,\hat{j} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}}$$

Movimento bidimensional com aceleração constante





Para o caso de aceleração constante,

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

A velocidade em função do tempo é dada por:

$$\left.\begin{aligned} v_{xf} &= v_{xi} + a_x t \\ v_{yf} &= v_{yi} + a_y t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t} \quad \text{com} \quad \left\{\begin{aligned} \vec{v}_i &= v_{xi}\hat{i} + v_{yi}\hat{j} \\ \vec{a} &= a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \end{aligned}\right.$$

e a posição em função do tempo é:

$$\left.\begin{aligned} x_f &= x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y_f &= y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2} \quad \text{com} \quad \left\{\begin{aligned} \vec{r}_i &= x_i\hat{i} + y_i\hat{j} \\ \vec{v}_i &= v_{xi}\hat{i} + v_{yi}\hat{j} \\ \vec{a} &= a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \end{aligned}\right.$$

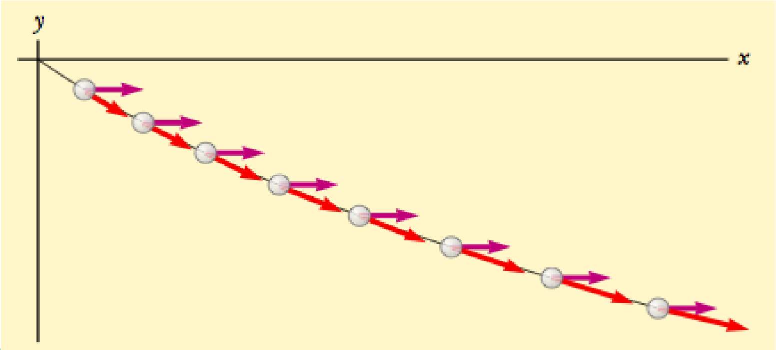
Exemplo 1

Um objeto se movendo no plano *xy* parte da origem com velocidade na direção *x* igual a 20 m/s, velocidade na direção *y* igual a -15 m/s e aceleração na direção *x* igual a 4,0 m/s2.

a)Determine a equação que fornece sua velocidade a qualquer instante.

b)Calcule sua velocidade 5 segundos depois da partida.

c)Calcule sua velocidade escalar e o ângulo com a horizontal nesse instante.



Exemplo 1

Um objeto se movendo no plano *xy* parte da origem com velocidade na direção *x* igual a 20 m/s, velocidade na direção *y* igual a -15 m/s e aceleração na direção *x* igual a 4,0 m/s2.

a)Determine a equação que fornece sua velocidade a qualquer instante.

b)Calcule sua velocidade 5 segundos depois da partida.

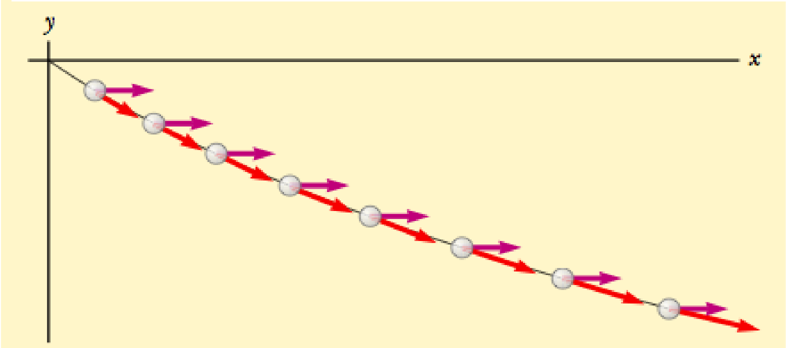
c)Calcule sua velocidade escalar e o ângulo com a horizontal nesse instante.

$$\begin{cases} x_i = 0 \\ y_i = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_{xi} = 20 \text{ m/s} \\ v_{yi} = -15 \text{ m/s} \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = 4 \text{ m/s}^2 \\ a_y = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

$$\begin{cases} v_{xf} = v_{xi} + a_x t \Rightarrow v_{xf} = (20 + 4{,}0t) \text{ m/s} \\ v_{yf} = v_{yi} + a_y t \Rightarrow v_{yf} = -15 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v}_f = v_{xi}\hat{i} + v_{yf}\hat{j} = \left[(20 + 4{,}0t)\hat{i} - 15\hat{j}\right] \text{ m/s}}$$



b) $\vec{v}_f = \left\{\left[20 + 4(5{,}0)\right]\hat{i} - 15\hat{j}\right\} \text{ m/s}$

$$\boxed{\vec{v}_f = \left(40\hat{i} - 15\hat{j}\right) \text{ m/s}}$$

c) $v_f = \left|\vec{v}_f\right| = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2}$

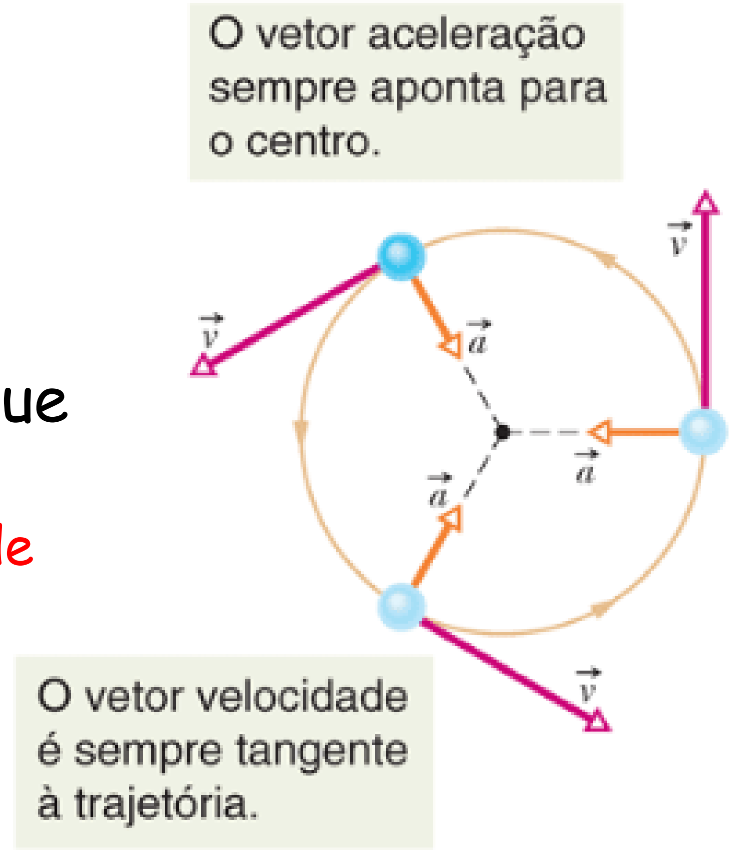
$$v_f = \sqrt{(40)^2 + (-15)^2} \rightarrow \boxed{v_f \approx 43 \text{m/s}}$$

$$\text{tg}\,\theta = \left(\frac{v_{yf}}{v_{xf}}\right) = \left(\frac{-15}{40}\right) = -0{,}38$$

$$\theta = \text{arctg}(-0{,}38) \rightarrow \boxed{\theta \approx -21^\circ}$$

Movimento circular uniforme

- O movimento circular uniforme ocorre quando um objeto se move numa trajetória circular com velocidade constante
- Uma aceleração existirá uma vez que a *direção* do movimento muda
  - Esta mudança na direção da velocidade está relacionada a uma aceleração
- O vetor velocidade é sempre tangente à trajetória do objeto



Aceleração centrípeta

No movimento circular uniforme:

- A aceleração é sempre perpendicular à trajetória do movimento

- A aceleração sempre aponta em direção ao centro do círculo do movimento

- Esta aceleração é chamada ***aceleração centrípeta***

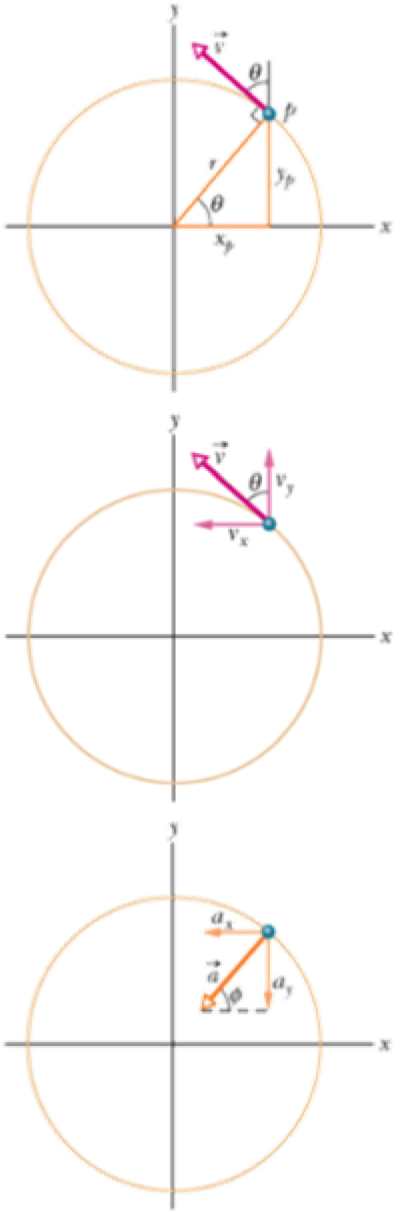
Aceleração centrípeta

- A magnitude da aceleração centrípeta é

$$\boxed{a_C = \frac{v^2}{r}}$$

- A direção do vetor aceleração centrípeta está sempre mudando de modo que este permaneça direcionado para o centro do círculo do movimento

Demonstração



Em termos das componentes escalares de $\vec{v}$ temos:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (-v\,\text{sen}\theta)\,\hat{i} + (v\cos\theta)\,\hat{j}$$

Substituindo senθ por y_p/r e cosθ por x_p/r:

$$\vec{v} = \left(-\frac{vy_p}{r}\right)\hat{i} + \left(\frac{vx_p}{r}\right)\hat{j}$$

$$\frac{dy_p}{dt} = v_y = v\cos\theta$$

$$\frac{dx_p}{dt} = v_x = -v\,\text{sen}\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_p}{dt}\right)\hat{j}$$

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\hat{i} + \left(-\frac{v^2}{r}\text{sen}\theta\right)\hat{j}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{(\cos\theta)^2 + (\text{sen}\theta)^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{1} = \boxed{\frac{v^2}{r}}$$

$$\tan\phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-\left(v^2/r\right)\text{sen}\theta}{-\left(v^2/r\right)\cos\theta} = \tan\theta$$

Aceleração Centrípeta

Período

- O **período**, T, é o tempo necessário para uma revolução completa

- A velocidade da partícula deve ser igual à circunferência do círculo dividida pelo seu período

- Assim, o período será

$$\boxed{T \equiv \frac{2\pi r}{v}}$$

Exemplo 2

Qual é a aceleração centrípeta da Terra enquanto ela está em movimento em sua órbita ao redor do Sol?

Exemplo 2

Qual é a aceleração centrípeta da Terra enquanto ela está em movimento em sua órbita ao redor do Sol?

Vamos adotar a Terra como sendo uma partícula e aproximar sua órbita como sendo circular

$R_{orb} = 1,5 \times 10^{11}$ m

Exemplo 2

Qual é a aceleração centrípeta da Terra enquanto ela está em movimento em sua órbita ao redor do Sol?

Vamos adotar a Terra como sendo uma partícula e aproximar sua órbita como sendo circular

R_{orb} = 1,5 x 10^{11} m

Mesmo sem saber a velocidade escalar da órbita da Terra, podemos descrevê-la em termos de seu período:

$$a_C = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(2\pi r / T\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2 \left(1{,}5\times 10^{11}\,\mathrm{m}\right)}{\left(3{,}15\times 10^{7}\,\mathrm{s}\right)^2} =$$

$$= 6{,}0\times 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$$

Exemplo 3

Qual é o módulo da aceleração, em unidades de g, para um piloto cuja aeronave inicia uma curva horizontal com uma velocidade $\vec{v}_i = \left(400\hat{i} + 500\hat{j}\right)\ \mathrm{m/s}$ e, 24,0 s mais tarde, termina a curva com uma velocidade $\vec{v}_f = -\left(400\hat{i} + 500\hat{j}\right)\ \mathrm{m/s}$?

Exemplo 3

Qual é o módulo da aceleração, em unidades de g, para um piloto cuja aeronave inicia uma curva horizontal com uma velocidade $\vec{v}_i = \left(400\hat{i} + 500\hat{j}\right)$ m/s e, 24,0 s mais tarde, termina a curva com uma velocidade $\vec{v}_f = -\left(400\hat{i} + 500\hat{j}\right)$ m/s ?

O avião executa a curva com movimento circular uniforme. A aceleração centrípeta é: ($a = v^2/R$). O tempo para descrever a curva é: ($T = 2\pi R/v$).

Como não conhecemos *R*, podemos explicitá-lo e fazer as devidas substituições. Assim:

$$a = \frac{2\pi v}{T}$$

Sendo *v* constante durante a curva. Desta forma:

$$v = \sqrt{\left(400 \text{ m/s}\right)^2 + \left(500 \text{ m/s}\right)^2} = 640{,}31 \text{ m/s}$$

Como a velocidade final é o negativo da velocidade inicial, em t = 24,0 s o piloto executou meia circunferência. Para completar a volta completa levaria, então 48,0 s.

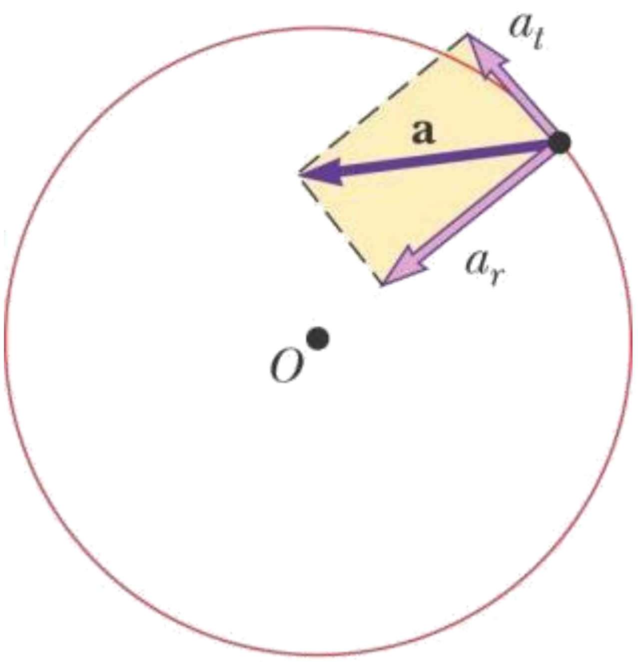
$$a = \frac{2\pi\left(640{,}31 \text{ m/s}\right)}{48{,}0 \text{ s}} = 83{,}81 \text{ m/s}^2 \approx 8{,}6g$$

g-LOC!!!

Aceleração tangencial e radial

- A magnitude da velocidade também pode mudar
- Neste caso haverá uma **aceleração tangencial**
- A aceleração tangencial causa uma mudança na velocidade da partícula
- A aceleração radial vem de uma mudança na direção do vetor velocidade

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$



Equações para aceleração tangencial e radial

- Aceleração tangencial:

$$a_t = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}$$

- Aceleração radial:

$$a_r = -a_C = -\frac{v^2}{r}$$

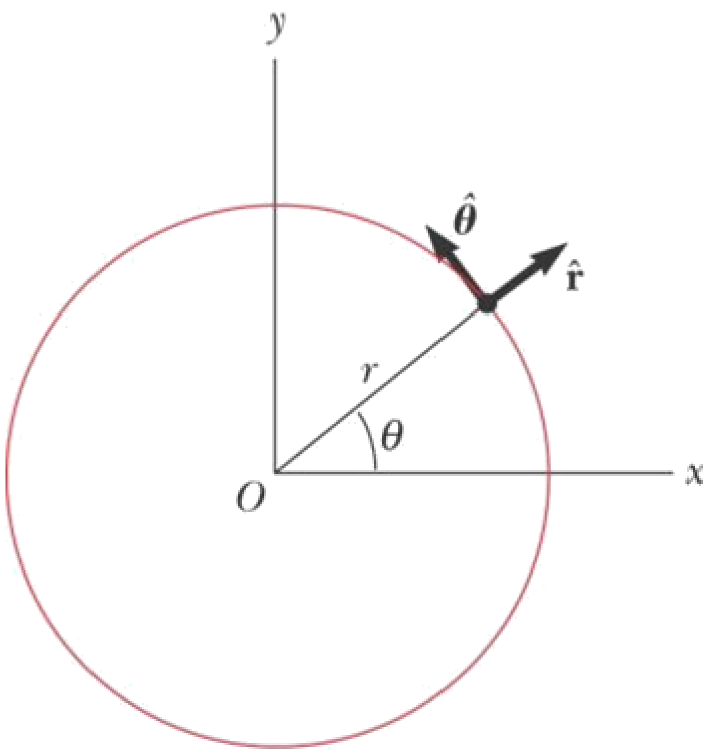
- Magnitude da aceleração total:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

Aceleração total em termos de vetores polares

- Vamos definir os seguintes vetores unitários:

$$\hat{r} \text{ e } \hat{\theta}$$



- $\hat{r}$ aponta na direção do vetor radial
- $\hat{\theta}$ aponta na direção azimutal
- A aceleração total será:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}\hat{\theta} - \frac{v^2}{r}\hat{r}}$$

Bibliografia

Serway, R. A.; Jewett Jr., J. W. *Princípios de Física - Mecânica Clássica*, Vol. 1, cap. 2, Cengage Learning, 2004.

Young, H. D.; Freedman, R. A. *Sears & Zemansky, Física I - Mecânica*, vol. 1, cap. 2, Pearson Education do Brasil, 2008.