Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)
Universidade Federal do ABC (UFABC)

Fenômenos Mecânicos

Aula 7

Prof. Marcelo A. Leigui de Oliveira
(leigui@ufabc.edu.br)

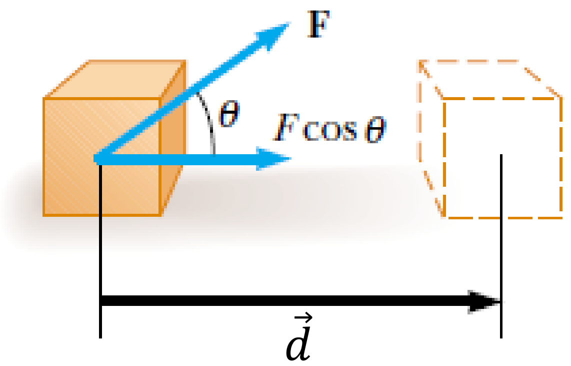
22/03/2023

Universidade Federal do ABC

O que veremos hoje...

- Trabalho
- Teorema da Energia Cinética (T.E.C.)
- Energia Potencial: Gravitacional e Elástica
- Forças conservativas
- Conservação de Energia
- Potência

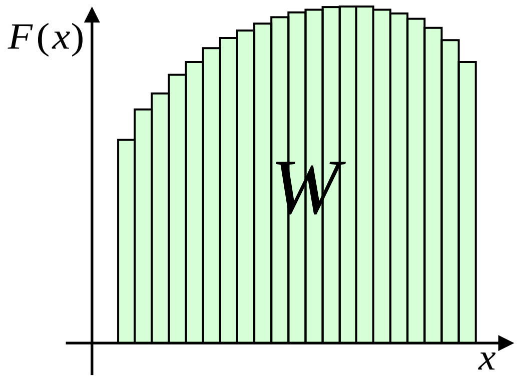
Trabalho de uma força constante:



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd\cos\theta$$

Trabalho de uma força variável:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$



- A unidade de energia (trabalho) no SI é o *joule*:

1 J = 1 N · 1 m = 1 kg · m^2 / s^2

Teorema da Energia cinética

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx$$

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow W = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}dx$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dvdx}{dt} = \int_{v_i}^{v_f} m\frac{dx}{dt}dv$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow W = \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv$$

$$W = m\frac{v^2}{2}\Bigg|_{v_i}^{v_f} = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}$$

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

$$W = K_f - K_i$$

$$W = \Delta K$$

Energia Cinética

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

O Trabalho da força resultante realizado sobre um corpo é igual à variação de sua Energia Cinética

$$W = \Delta K$$

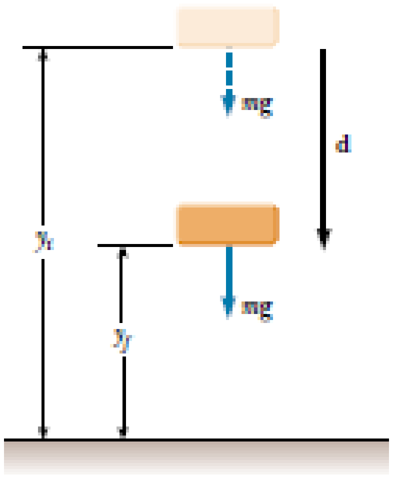
Energia Potencial

- Energia: Capacidade de realizar trabalho.
- Energia Potencial (*U*):
  - Energia associada a um sistema de objetos.
  - Energia armazenada em um sistema.
- Energia Potencial Gravitacional.
  - Trabalho que a força gravitacional pode realizar sobre um objeto.

Energia Potencial Gravitacional

- Trabalho possível de ser realizado pela força gravitacional.

$$W_G = \vec{P}\cdot\vec{d} =$$
$$= -mg\,\hat{j}\cdot\left(y_f - y_i\right)\hat{j} =$$
$$= mg\,y_i - mg\,y_f =$$
$$= U_i - U_f = -\left(U_i - U_f\right) \Rightarrow$$
$$W_G = -\Delta U_G$$
$$\boxed{U_G = mg\,y}$$



$$\boxed{U_G = mg\,h}$$

Mas, definindo $\mathrm{U}_G(0) = 0$

e fazendo : $h = y_f - y_i$ e , vem :

$$\begin{cases} U_G \rightarrow \text{Energia Potencial Gravitacional} \\ mg \rightarrow \text{Peso} \\ h \rightarrow \text{Altura} \end{cases}$$

Energia Potencial Elástica

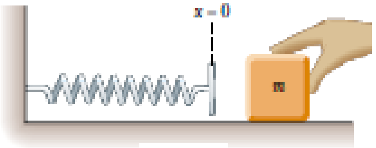
- Energia acumulada na mola capaz de realizar trabalho.

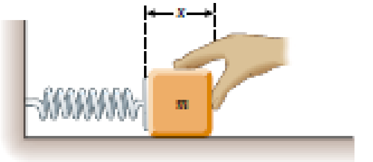
$$W = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

$$= -\left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right)$$

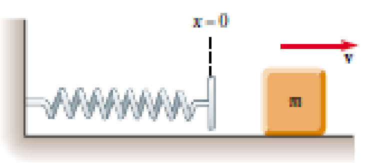
$$W = -\Delta U_M$$

$$U_M = \frac{1}{2}kx^2$$





$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}kx^2 \\ K = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} U = 0 \\ K = \frac{1}{2}mv^2 \end{cases}$$

Forças Conservativas

- Forças Conservativas:
  - Uma força é dita conservativa se o trabalho que ela realiza durante um deslocamento for independente do caminho.
  - O trabalho depende apenas dos pontos iniciais e finais.
  - O trabalho realizado em um caminho fechado é nulo.
- Forças Não-Conservativas
  - Uma força é dita não conservativa se a soma das energias mecânicas do sistema (potencial + cinética) não se conserva.
  - Atrito e arrasto são exemplos de forças não conservativas.
  - Calor é um exemplo de energia não mecânica.

Forças Conservativas e Potencial

- Para uma força conservativa, podemos definir uma função Potencial U(x).
- O trabalho realizado por um potencial é igual à variação da energia potencial com sinal trocado.
- O Potencial U(x) é definido a menos de um valor padrão do potencial.

$$W_C = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = -\Delta U$$

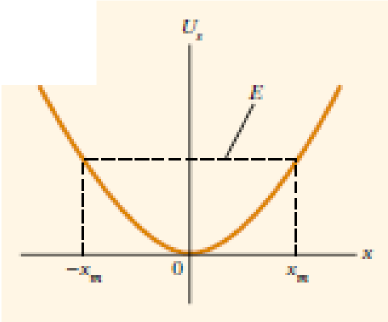
$$\Delta U = U_f - U_i$$

$$U_f = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx + U_i$$

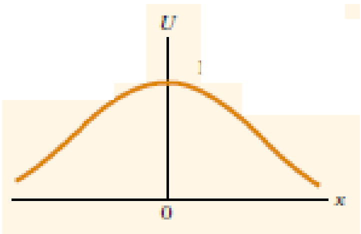
$$U(x) = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx + C$$

$$dU = -F(x)dx$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}}$$



Equilíbrio Estável



Equilíbrio Instável

Conservação da Energia Mecânica

A energia mecânica total de um sistema permanece constante em qualquer sistema isolado formado de objetos que interagem entre si apenas através de forças conservativas.

- A energia mecânica total de um sistema é a soma da energia cinética e a energia potencial. $\Rightarrow$ $E = K + U$

- A soma da energia cinética e potencial inicial é igual à soma da energia cinética e potencial final. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \Delta E = \Delta K + \Delta U \\ \Delta E = 0 \\ K_i + U_i = K_f + U_f \end{cases}$$

- Na presença de forças não-conservativas, a diferença entre a energia mecânica inicial e a energia mecânica final é igual ao trabalho realizado pela força não-conservativa. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} W_{atrito} = -F_{atrito} d \\ \Delta E = -W_{atrito} \\ \Delta K + \Delta U = W_{atrito} \end{cases}$$

Exemplo 01: Potencial Gravitacional

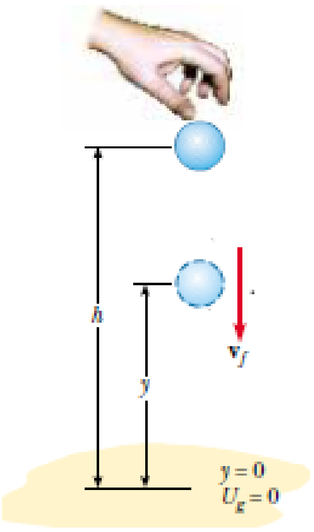
Deixa-se cair uma bola de massa *m* a partir de uma altura *h*.

a) Qual a sua velocidade quando ela bate no chão se ela estivesse inicialmente em repouso?

b) Qual a sua velocidade quando ela estiver em alguma altura y?

c) Qual seria sua velocidade ao chegar nesse ponto se ela tivesse sido arremessada verticalmente para baixo com alguma velocidade diferente de zero?

d) Haveria diferença na velocidade de chegada no chão se ela tivesse sido arremessada para cima?



Exemplo 01: Potencial Gravitacional

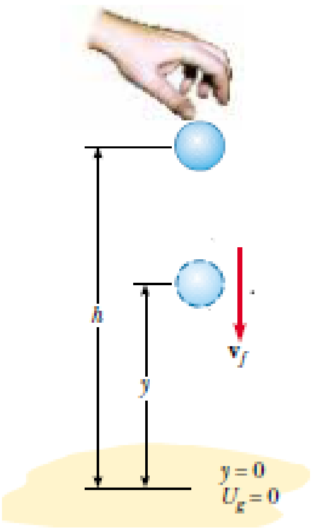
Deixa-se cair uma bola de massa *m* a partir de uma altura *h*.

a) Qual a sua velocidade quando ela bate no chão se ela estivesse inicialmente em repouso?

b) Qual a sua velocidade quando ela estiver em alguma altura y?

c) Qual seria sua velocidade ao chegar nesse ponto se ela tivesse sido arremessada verticalmente para baixo com alguma velocidade diferente de zero?

d) Haveria diferença na velocidade de chegada no chão se ela tivesse sido arremessada para cima?



a)
$$E_i = E_f$$
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$
$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$
$$v = \sqrt{2gh}$$

b)
$$E_i = E_f$$
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$
$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$
$$v = \sqrt{2g(h-y)}$$

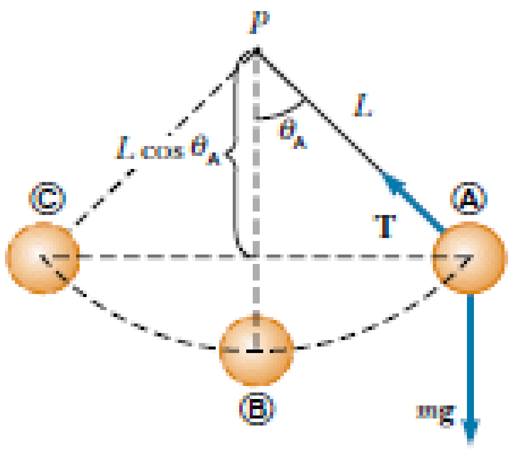
c)
$$E_i = E_f$$
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(h-y)}$$

d) Não haveria diferença na velocidade final da bola pois apenas forças conservativas estão presentes.

Exemplo 02: Potencial Gravitacional e Energia Cinética

Um pêndulo feito de uma esfera de massa *m* presa a um fio de massa desprezível e comprimento *L*, é solto do ponto **A**, conforme mostra a figura ao lado.

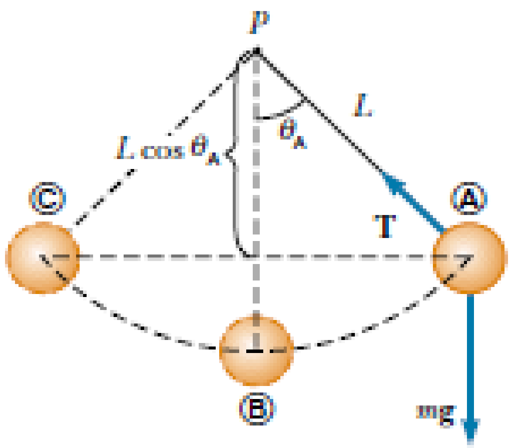
a) Qual a velocidade da esfera no ponto **B**?
b) Qual a tração na corda quando ela está nesse ponto?



Exemplo 02: Potencial Gravitacional e Energia Cinética

Um pêndulo feito de uma esfera de massa *m* presa a um fio de massa desprezível e comprimento *L*, é solto do ponto **A**, conforme mostra a figura ao lado.

a) Qual a velocidade da esfera no ponto **B**?
b) Qual a tração na corda quando ela está nesse ponto?



a) $\Delta E = 0$

$$E = K + U \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\begin{cases} K_A = 0 \\ K_B = \frac{1}{2}mv_b^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_A = -mgL\cos\theta_A \\ U_B = -mgL \end{cases}$$

$$-mgL\cos\theta_A = \frac{1}{2}mv_b^2 - mgL$$

$$v = \sqrt{2gL\left(1-\cos\theta_A\right)}$$

b)

$$\sum F_R^B = ma_R = \frac{mv_B^2}{L}$$

$$\sum F_R^B = T - mg$$

$$T - mg = \frac{mv_B^2}{L}$$

$$T = mg + 2mg\left(1-\cos\theta_A\right)$$

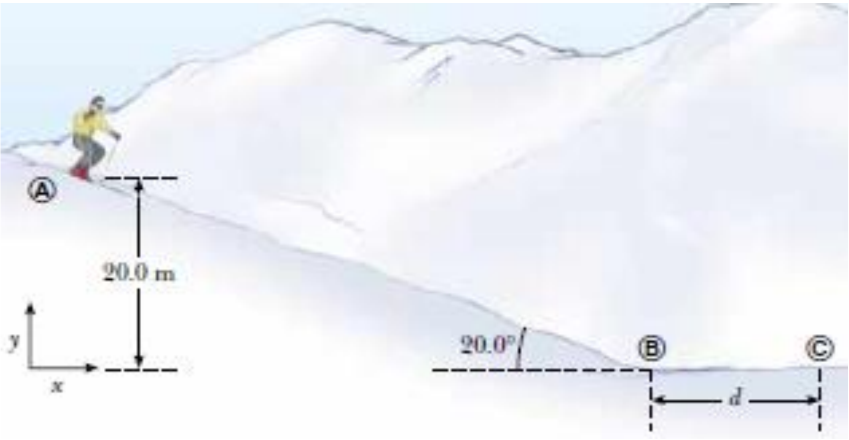
$$T = mg\left(3 - 2\cos\theta_A\right)$$

Exemplo 03: Energia Potencial, Cinética e Força de Atrito

Um esquiador parte do repouso no alto de uma montanha em uma descida sem atrito de 20 m de altura. No final da descida ele encontra uma superfície horizontal com coeficiente de atrito 0,20.

a) Qual sua velocidade no final da ladeira?

b) Qual a distância que ele percorre na horizontal antes de parar?

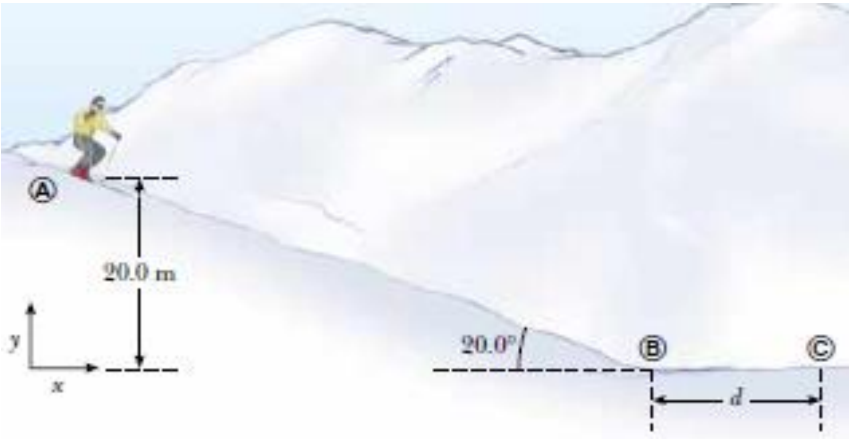


Exemplo 03: Energia Potencial, Cinética e Força de Atrito

Um esquiador parte do repouso no alto de uma montanha em uma descida sem atrito de 20 m de altura. No final da descida ele encontra uma superfície horizontal com coeficiente de atrito 0,20.

a) Qual sua velocidade no final da ladeira?

b) Qual a distância que ele percorre na horizontal antes de parar?



a)

$$A \rightarrow B$$

$$\Delta E = 0 \quad \text{(Forças Conservativas)}$$

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

$$v_B = \sqrt{2 \times 9,8 \times 20}$$

$$v_B = 19,8 m/s$$

b)

$$B \rightarrow C$$

$$\Delta E = W_{\text{atrito}} \quad \text{(Forças Não Conservativas)}$$

$$\Delta K + \Delta U = W_{\text{atrito}}$$

$$\frac{m v_C^2}{2} - \frac{m v_B^2}{2} = -\mu_K m g d$$

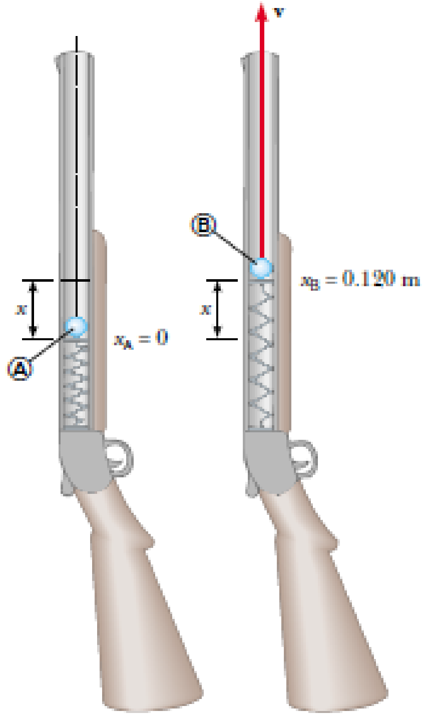
$$d = \frac{v_B^2}{2\mu_K g} = \frac{2gh}{2\mu_K g} = \frac{h}{\mu_K}$$

$$d = \frac{20}{0,20} = 100 m$$

Exemplo 04: Potencial Gravitacional e Elástica

O mecanismo de disparo de uma certa arma de brinquedo é feito de uma mola de constante elástica desconhecida. Quando a mola é comprimida 12 cm, um projétil de 35 g, quando disparado, atinge uma altura de 20m em relação à sua altura antes do disparo. Desprezando todas as forças não conservativas, responda:

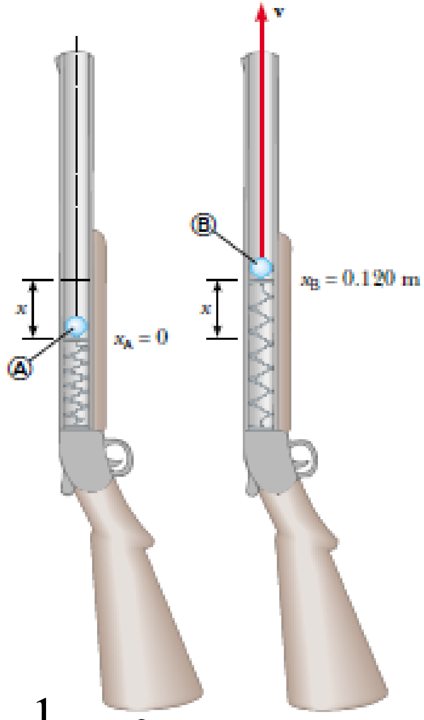
a) Qual a constante elástica da mola?
b) Qual a velocidade do projétil 12 cm após a posição inicial de disparo?



Exemplo 04: Potencial Gravitacional e Elástico

O mecanismo de disparo de uma certa arma de brinquedo é feito de uma mola de constante elástica desconhecida. Quando a mola é comprimida 12 cm, um projétil de 35 g, quando disparado, atinge uma altura de 20m em relação à sua altura antes do disparo. Desprezando todas as forças não conservativas, responda:

a) Qual a constante elástica da mola?
b) Qual a velocidade do projétil 12 cm após a posição inicial de disparo?



a)

$$\Delta E = \Delta U_G + \Delta U_M + \Delta K$$

$$\Delta E = 0$$

$$\Delta U_G = mgh - 0$$

$$\Delta U_M = 0 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Delta K = 0 - 0$$

$$0 = mgh - \frac{1}{2}kx^2$$

$$k = \frac{2mgh}{x^2} = \frac{2 \times 0,035 \times 9,8 \times 20}{0,12^2}$$

$$k = 953 N / m$$

b)

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

$$0 = mgx - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m} - 2gx}$$

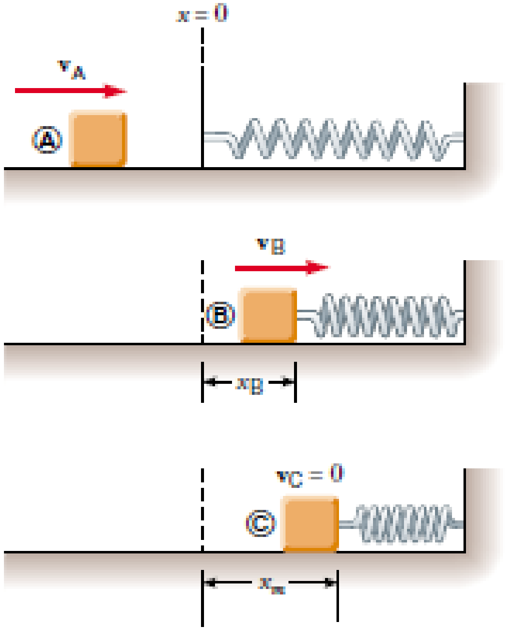
$$v = \sqrt{\frac{953 \times 0,12^2}{0,035} - 2 \times 9,8 \times 0,12}$$

$$v = 19,7 m / s$$

Exemplo 05: Energia Cinética, Potencial Elástica e Atrito

Um bloco de 0,80 kg a 1,2 m/s colide com uma mola de constante elástica de 50 N/m.

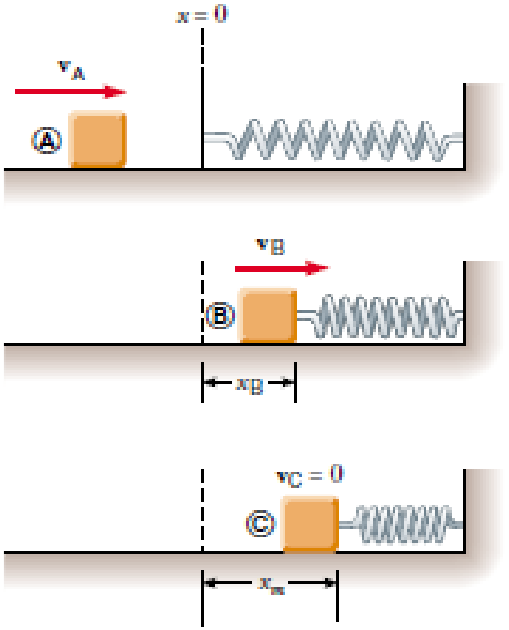
a) Desprezando-se o atrito, qual seria a compressão máxima da mola?
b) Qual seria essa compressão se levássemos em conta uma força de atrito entre o bloco e a superfície com coeficiente de atrito cinético de 0,50, supondo que a velocidade com que o bloco atinge a mola seja a mesma?



Exemplo 05: Energia Cinética, Potencial Elástica e Atrito

Um bloco de 0,80 kg a 1,2 m/s colide com uma mola de constante elástica de 50 N/m.

a) Desprezando-se o atrito, qual seria a compressão máxima da mola?
b) Qual seria essa compressão se levássemos em conta uma força de atrito entre o bloco e a superfície com coeficiente de atrito cinético de 0,50, supondo que a velocidade com que o bloco atinge a mola seja a mesma?



a) $$\text{Forças Conservativas } \rightarrow \Delta E = 0$$

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U_M$$

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Delta U_M = \frac{1}{2}kx^2 - 0$$

$$0 = -\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$x = v\sqrt{\frac{m}{k}} = 1,2\sqrt{\frac{0,80}{50}}$$

$$x = 15cm$$

b)

$$\text{Forças Não-Conservativas } \rightarrow \Delta E = W_{\text{atrito}}$$

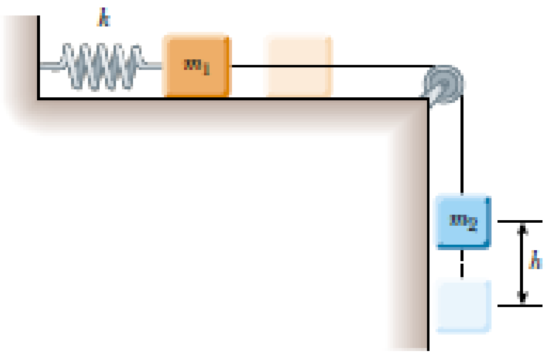
$$-\mu_k mgx = -\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$25x^2 + 3,9x - 0,58 = 0$$

$$x = \begin{cases} 0,092 \\ -0,25 \end{cases} \Rightarrow x = 9,2cm$$

Exemplo 06: Blocos Conectados em Movimento

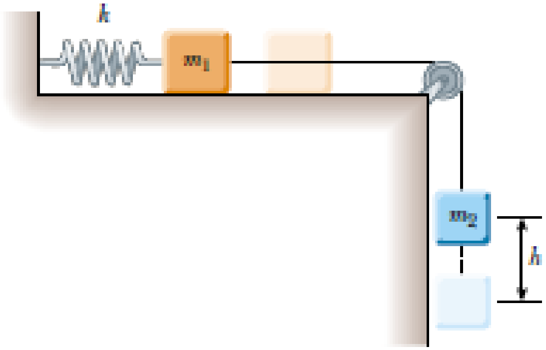
Dois blocos estão conectados por um cabo de massa muito pequena que passa por uma polia de massa também irrisória, que gira sem atrito, conforme mostra a figura ao lado. Considerando-se que na posição inicial a mola não exerce força sobre o bloco 1, calcule:



a) A máxima elongação da mola quando o bloco 1 desliza sem atrito.
b) A máxima elongação da mola na presença de atrito.
c) A elongação da mola no ponto de equilíbrio.

Exemplo 06: Blocos Conectados em Movimento

Dois blocos estão conectados por um cabo de massa muito pequena que passa por uma polia de massa também irrisória, que gira sem atrito, conforme mostra a figura ao lado. Considerando-se que na posição inicial a mola não exerce força sobre o bloco 1, calcule:



a) A máxima elongação da mola quando o bloco 1 desliza sem atrito.
b) A máxima elongação da mola na presença de atrito.
c) A elongação da mola no ponto de equilíbrio.

a)

$$\Delta E = 0$$

$$\Delta K + \Delta U_G + \Delta U_M = 0$$

$$-m_2 g h + \frac{1}{2} k x^2 = 0$$

$$x = h \Rightarrow x_{\max} = 2\frac{m_2 g}{k}$$

b)

$$\Delta E = W_{atrito}$$

$$\Delta K + \Delta U_G + \Delta U_M = W_{atrito}$$

$$-m_2 g h + \frac{1}{2} k x^2 = -\mu_k m_1 g x$$

$$x = h \Rightarrow x_{\max} = 2\frac{m_2 g - \mu_k m_1 g}{k}$$

c)

$$\text{Equilíbrio} \rightarrow F_R = 0$$

$$-kx = m_2 g \Rightarrow x_{\text{equil}} = \frac{m_2 g}{k}$$

Potência

A Potência com que uma força é exercida sobre um corpo é igual à taxa de variação do Trabalho realizado sobre o mesmo em relação ao tempo.

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Em um dado intervalo de tempo, a Potência Média será:

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

A Potência instantânea aplicada sobre um corpo pode ser escrita como:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} \Rightarrow P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{x}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Unidades de potência

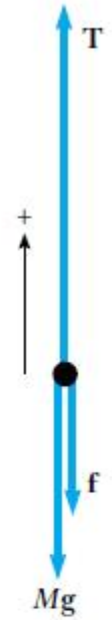
- A unidade de potência no SI é denominada watt
  - $1\ W = 1\ J / s = 1\ kg \cdot m^2 / s^3$
- A unidade de potência no sistema britânico é o horsepower (hp)
  - $1\ hp = 745{,}7\ W = 550\ ft \cdot lb/s$
- O cavalo vapor é definido como
  - $1\ cv = 735{,}5\ W = 0{,}9863\ hp$
- Como potência x tempo = energia:
  - $1\ kWh = (1000\ W)(3600\ s) = 3{,}6 \times 10^6\ J = 3{,}6\ MJ$

Potência: exemplo

Um elevador com massa de 1000 kg está carregando pessoas com massa total de 800 kg. Uma força de atrito constante igual a 4000 N retarda o movimento do elevador.

a) Qual deve ser a potência mínima do motor para subir o elevador a uma velocidade constante de 3 m/s?

b) Quanta potência o motor dever fornecer para que, a uma dada velocidade de subida igual a *v*, o elevador seja acelerado para cima a 1 m/s^2?



Potência: exemplo

Um elevador com massa de 1000 kg está carregando pessoas com massa total de 800 kg. Uma força de atrito constante igual a 4000 N retarda o movimento do elevador.

a) Qual deve ser a potência mínima do motor para subir o elevador a uma velocidade constante de 3 m/s?
b) Quanta potência o motor dever fornecer para que, a uma dada velocidade de subida igual a *v*, o elevador seja acelerado para cima a 1 m/s²?

a)
$$\vec{F}_R = \vec{T} + \vec{F}_P + \vec{F}_A$$
$$0 = T - (m_e + m_p)g - F_A$$
$$T = (m_e + m_p)g + F_A$$
$$P = Tv = \left[(m_e + m_p)g + F_A\right]v$$
$$P = \left(1{,}8\times10^3\times9{,}8 + 4\times10^3\right)\times3$$
$$\boxed{P = 6{,}49\times10^4 W}$$

b)
$$(m_e + m_p)a = T - (m_e + m_p)g - F_A$$
$$T = (m_e + m_p)(a+g) + F_A$$
$$P = \left[(m_e + m_p)(a+g) + F_A\right]v$$
$$P = \left[1{,}8\times10^3\times10{,}8 + 4\times10^3\right]v$$
$$\boxed{P = 2{,}3\times10^4 v}$$

Bibliografia

Serway, R. A.; Jewett Jr., J. W. *Princípios de Física - Mecânica Clássica*, Vol. 1, cap. 2, Cengage Learning, 2004.

Young, H. D.; Freedman, R. A. *Sears & Zemansky, Física I - Mecânica*, vol. 1, cap. 2, Pearson Education do Brasil, 2008.