Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)
Universidade Federal do ABC (UFABC)

Fenômenos Mecânicos

Aula 9

Prof. Marcelo A. Leigui de Oliveira
(leigui@ufabc.edu.br)

05/04/2023

Universidade Federal do ABC

O que veremos hoje...

- Revisão: momento linear, conservação do momento, impulso, colisões em 1 dimensão.
- Colisões em 2 dimensões
- Centro de massa
- Sistema de Partículas
- Sistemas de massa variável (equações do foguete)

Momento Linear

- O momento linear de uma partícula é definido como sendo o produto da massa pela velocidade:
  - $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$
- O momento linear é uma quantidade vetorial. Sua direção é a mesma da velocidade $\mathbf{v}$
- As dimensões de momento são ML/T, as unidades de momento no SI são kg·m/s
- O momento pode ser expresso na forma de suas componentes como:

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

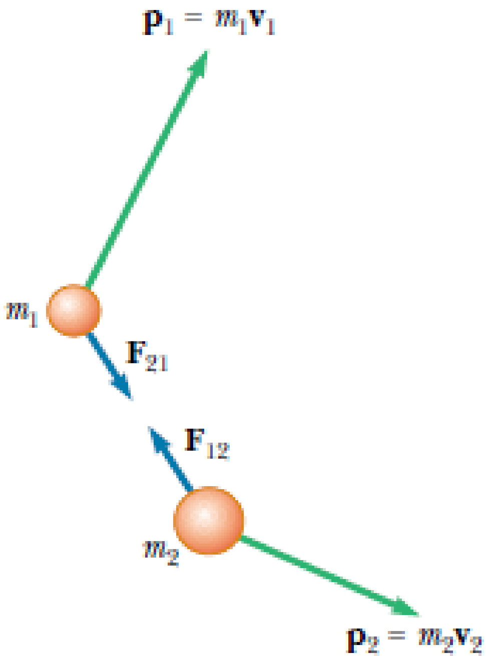
Newton e o Momento

- A 2ª Lei de Newton pode ser usada para relacionar o momento da partícula com a força resultante atuando sobre ela

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\left(m\mathbf{v}\right)}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

com massa constante.

Conservação de momento para um sistema de duas partículas



<u>Terceira Lei de Newton (Ação e Reação):</u>

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\underbrace{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}_{\text{Quantidade Conservada}} = 0$$

O momento total do sistema se conserva !

$$\vec{p}_{\text{sistema}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\boxed{\vec{p}_{\text{sistema}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}$$

$$\Delta\vec{p}_{\text{sistema}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}}$$

Conservação de momento linear, cont.

- Conservação do momento pode ser expressa matematicamente por várias maneiras:

$$\vec{p}_{total} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{constante}$$

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

- Na forma de componentes, o momento total em cada direção é independentemente conservado:
-

$$p_{ix} = p_{fx} \qquad p_{iy} = p_{fy} \qquad p_{iz} = p_{fz}$$

- Conservação do momento pode ser aplicada a sistemas com qualquer número de partículas

Impulso e Momento

Partindo da segunda lei de Newton:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}(t)dt$$

Integrando para encontrar a variação do momento durante um intervalo de tempo qualquer:

$$\int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt \equiv \vec{I}$$

$$\boxed{\vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{I}}$$

- A integral é chamada de ***impulso***, $\boldsymbol{I}$, da força resultante $\boldsymbol{F}$ atuando sobre um objeto durante um intervalo de tempo Δt

Impulso

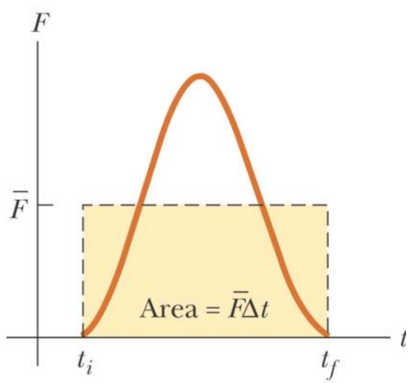
➢ O impulso de uma força atuando sobre um objeto é igual à variação de momento da partícula causada por essa força

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\vec{p} = \vec{F}dt \quad \Rightarrow \quad \int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt$$

$$\int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt$$

$$\boxed{\vec{I} \equiv \Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt}$$

Impulso



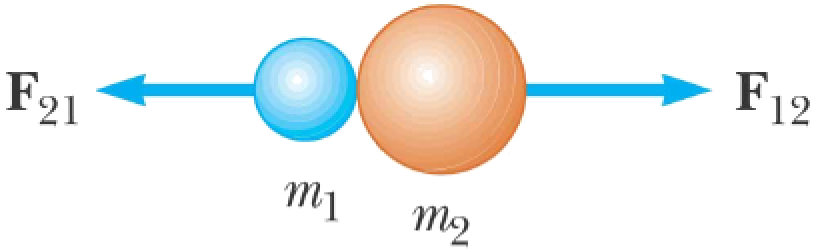
Força Constante

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt = \vec{F}\Delta t$$

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F}\Delta t}$$

Colisões

- As colisões podem ser o resultado de contato direto
- As forças de impulso podem variar no tempo de maneiras complicadas
  - Esta força é interna ao sistema
- O momento é conservado



Colisões

- O momento total de um sistema isolado antes da colisão é igual ao momento total após a colisão

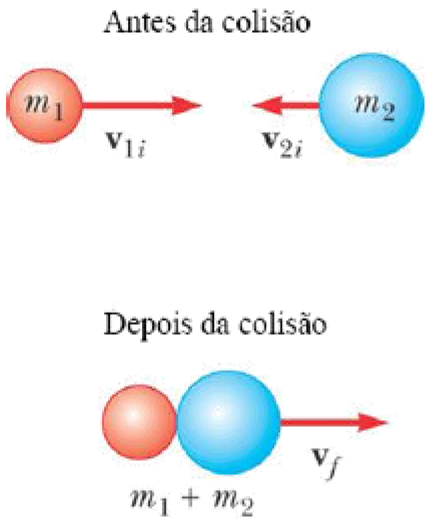
$$\begin{cases} \vec{F}_{12} \rightarrow \text{Força que o corpo 1 exerce sobre o corpo 2} \\ \vec{F}_{21} \rightarrow \text{Força que o corpo 2 exerce sobre o corpo 1} \end{cases}$$

$$\Delta\vec{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}dt \quad \text{e} \quad \Delta\vec{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}dt$$

$$\underbrace{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}}_{3^{a}\ \text{Lei de Newton}} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\underbrace{\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)}_{\substack{\text{Momento Total} \\ \text{do Sistema}}} = 0$$

Tipos de colisões

- O momento total do sistema **sempre se conserva**, mas não necessariamente a energia cinética total
- **Colisão Elástica**
  - A energia cinética total do sistema é a mesma, antes e depois da colisão
- **Colisão Inelástica**
  - A energia cinética total do sistema não se conserva
- **Colisão Perfeitamente Inelástica**
  - Os corpos que colidem mantêm-se grudados após a colisão, formando um único corpo
  - Não há conservação da energia cinética



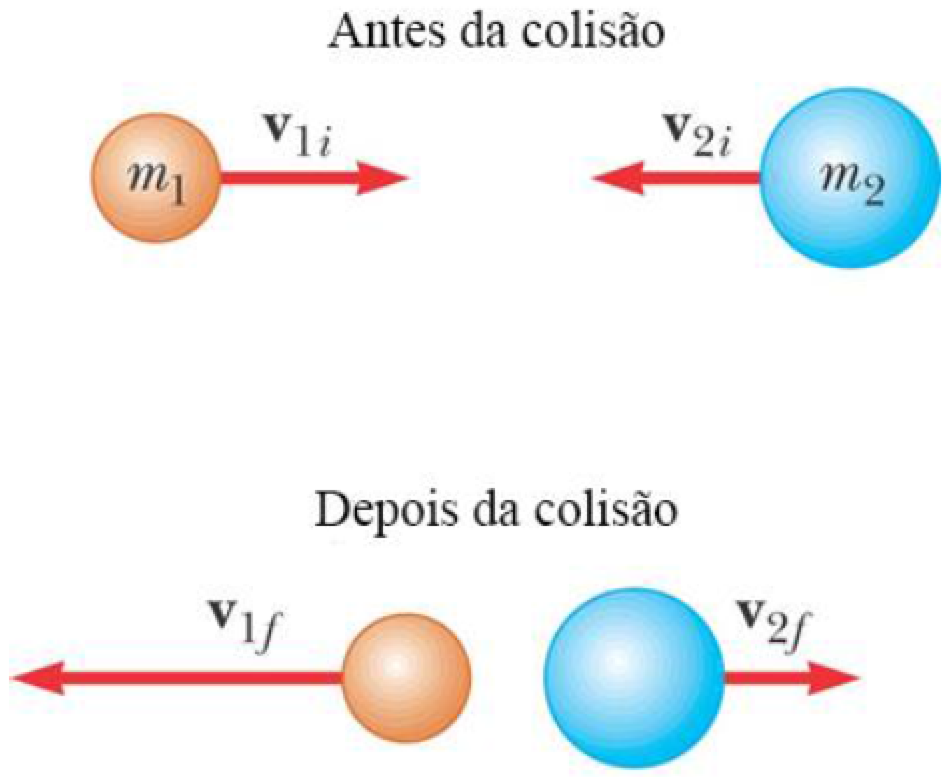
<u>Colisão Perfeitamente Inelástica</u>

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$$

$$\boxed{\vec{v}_f = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}}$$

Colisões elásticas

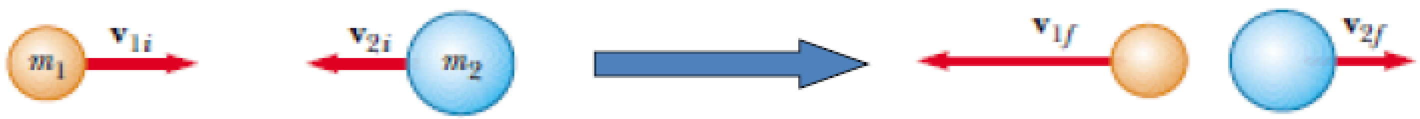
- Tanto o momento quanto a energia cinética são conservados



$$m_1\mathbf{v}_{1i} + m_2\mathbf{v}_{2i} = m_1\mathbf{v}_{1f} + m_2\mathbf{v}_{2f}$$

$$\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_{2f}^2$$

Colisões elásticas em 1 dimensão



$$\begin{cases} (1)\ \text{Conservação do Momento: } m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ (2)\ \text{Conservação da Energia Cinética: } \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow m_1\left(v_{1i}^2 - v_{1f}^2\right) = m_2\left(v_{2f}^2 - v_{2i}^2\right)$$

$$m_1\left(v_{1i} - v_{1f}\right)\left(v_{1i} + v_{1f}\right) = m_2\left(v_{2f} - v_{2i}\right)\left(v_{2f} + v_{2i}\right) \quad \text{(a)}$$

$$(1) \rightarrow m_1\left(v_{1i} - v_{1f}\right) = m_2\left(v_{2f} - v_{2i}\right) \quad \text{(b)}$$

$$\text{(a)/(b)} \rightarrow \left(v_{1i} + v_{1f}\right) = \left(v_{2f} + v_{2i}\right)$$

$$\boxed{v_{1i} - v_{2i} = -\left(v_{1f} - v_{2f}\right)}$$

Colisões elásticas em 1 dimensão

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \\ -v_{1f} + v_{2f} = v_{1i} - v_{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \\ m_2 v_{1f} - m_2 v_{2f} = -m_2 v_{1i} + m_2 v_{2i} \end{cases} \rightarrow (m_1 + m_2) v_{1f} = (m_1 - m_2) v_{1i} + 2 m_2 v_{2i}$$

$$\begin{cases} m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \\ -m_1 v_{1f} + m_1 v_{2f} = m_1 v_{1i} - m_1 v_{2i} \end{cases} \rightarrow (m_1 + m_2) v_{2f} = 2 m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}$$

Equações Fundamentais da Colisão Elástica em Uma Dimensão

$$\begin{cases} v_{1f} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\dfrac{2 m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \\ v_{2f} = \left(\dfrac{2 m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \end{cases}$$

Colisões elásticas em 1 dimensão

Equações Fundamentais da Colisão Elástica em Uma Dimensão

$$\begin{cases} v_{1f} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \\ v_{2f} = \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \end{cases}$$

Casos especiais:

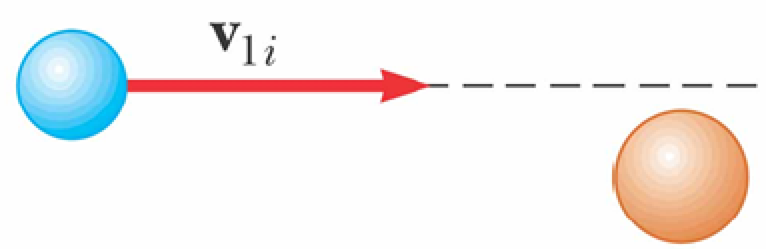
$$v_{2i} = 0 : \begin{cases} v_{1f} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \\ v_{2f} = \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \end{cases}$$

$$\begin{array}{|l} m_1 >> m_2 : \\ v_{1f} \approx v_{1i} \,,\, v_{2f} \approx 2v_{1i} \\ m_2 >> m_1 : \\ v_{1f} \approx -v_{1i} \,,\, v_{2f} \approx 0 \end{array}$$

$$m_1 = m_2 : \begin{cases} v_{1f} = v_{2i} \\ v_{2f} = v_{1i} \end{cases}$$

Colisões bidimensionais

- A partícula 1 está se movendo com velocidade $\mathbf{v}_{1i}$ e a partícula 2 está em repouso
- Na direção x, o momento inicial é $m_1 v_{1i}$
- Na direção y, o momento inicial é 0



Antes da colisão

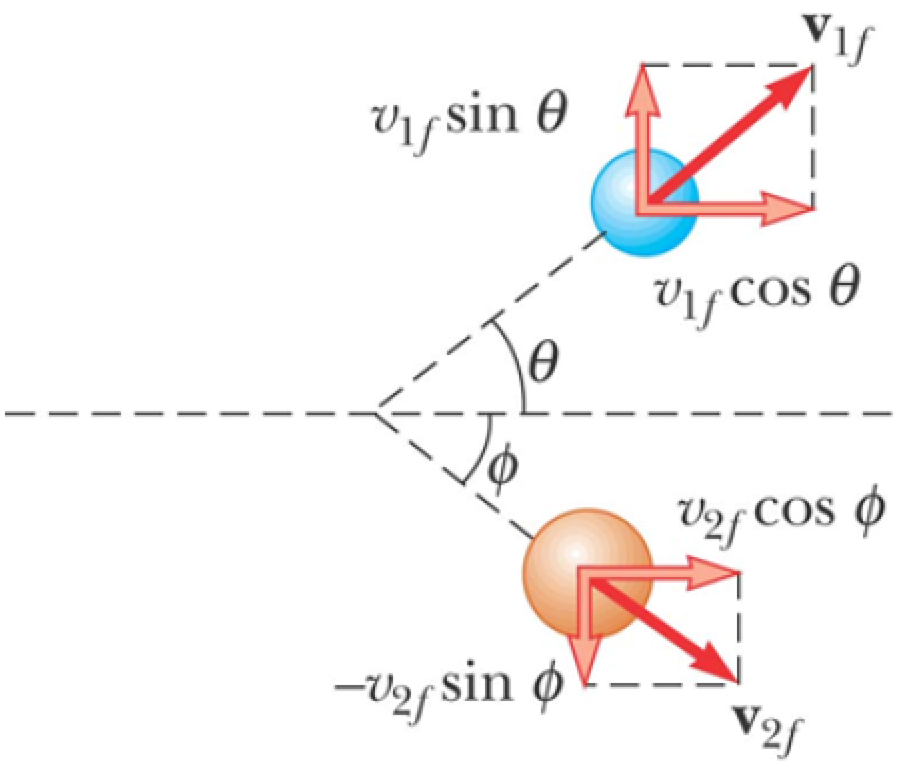
Colisões bidimensionais

- Após a colisão, o momento na direção x é

$$m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi$$

- Após a colisão, o momento na direção y é

$$m_1 v_{1f} \sin\theta + m_2 v_{2f} \sin\phi$$



Depois da colisão

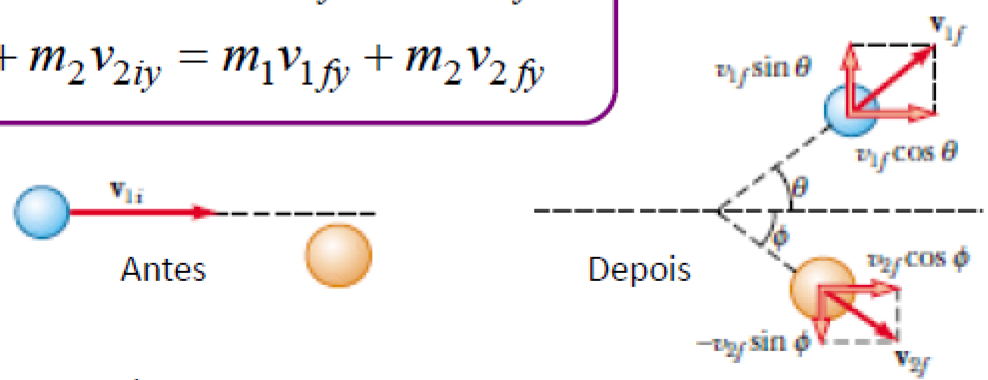
Colisões bidimensionais

- Em uma colisão em duas dimensões o momento é conservado isoladamente para cada uma das direções

$$\underbrace{\vec{p}_{1i}+\vec{p}_{2i}=\vec{p}_{1f}+\vec{p}_{2f}}_{\text{Conservação de Momento}} \Rightarrow \begin{cases} p_{1ix}+p_{2ix}=p_{1fx}+p_{2fx} \\ p_{1iy}+p_{2iy}=p_{1fy}+p_{2fy} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} m_1 v_{1ix}+m_2 v_{2ix}=m_1 v_{1fx}+m_2 v_{2fx} \\ m_1 v_{1iy}+m_2 v_{2iy}=m_1 v_{1fy}+m_2 v_{2fy} \end{cases}}$$

Exemplo:



$$\underbrace{\begin{aligned} m_1 v_{1i} &= m_1 v_{1f}\cos\theta + m_2 v_{2f}\cos\phi \\ 0 &= m_1 v_{1f}\sin\theta + m_2 v_{2f}\sin\phi \end{aligned}}_{\text{Conservação do Momento}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2=\frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2+\frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2}_{\text{Conservação da Energia}}$$

Exemplo 1 – Batida de carros

Um carro de 1500 kg andando para o leste a 25 m/s colide em um cruzamento com uma van de 2500 kg andando em direção ao norte com uma velocidade de 20,0 m/s. Ache a direção e magnitude da velocidade dos destroços da batida, assumindo que os veículos permanecem grudados depois da batida.

Exemplo 1 – Batida de carros

Um carro de 1500 kg andando para o leste a 25 m/s colide em um cruzamento com uma van de 2500 kg andando em direção ao norte com uma velocidade de 20,0 m/s. Ache a direção e magnitude da velocidade dos destroços da batida, assumindo que os veículos permanecem grudados depois da batida.

$$\vec{p}_{\text{carro}} + \vec{p}_{\text{van}} = \vec{p}_{\text{destroços}}$$

$$\begin{cases} \vec{p}_{\text{carro}} = m_{\text{carro}}\vec{v}_{\text{carro}} = m_c v_c \hat{i} \\ \vec{p}_{\text{van}} = m_{\text{van}}\vec{v}_{\text{van}} = m_v v_v \hat{j} \\ \vec{p}_{\text{destroços}} = \left(m_{\text{carro}} + m_{\text{van}}\right)\vec{v}_{\text{destroços}} = \left(m_c + m_v\right) v_d \cos\theta \hat{i} + \left(m_c + m_v\right) v_d \sin\theta \hat{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_c v_c = \left(m_c + m_v\right) v_d \cos\theta \\ m_v v_v = \left(m_c + m_v\right) v_d \sin\theta \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{m_v v_v}{m_c v_c} \rightarrow \tan\theta = \frac{2500 \times 20}{1500 \times 25}$$

$$\boxed{\theta = 53{,}1^\circ}$$

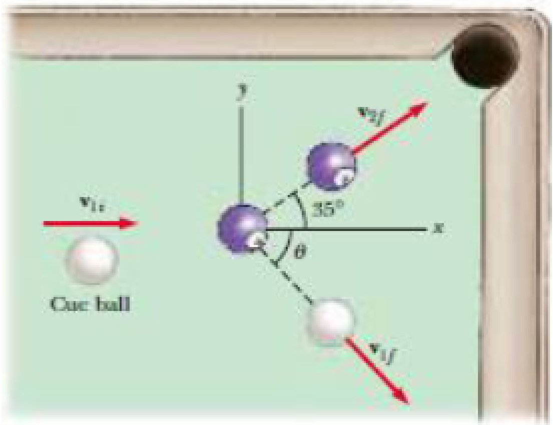
$$v_d = \frac{m_v v_v}{\left(m_c + m_v\right)\sin\theta}$$

$$v_d = \frac{2500 \times 20}{\left(1500 + 2500\right)\sin 53{,}1}$$

$$\boxed{v_d = 15{,}6 \text{ m/s}}$$

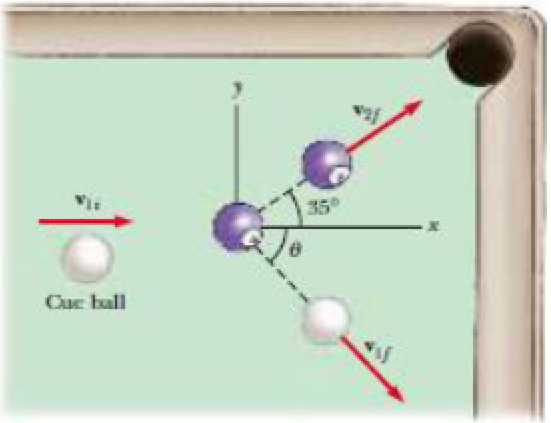
Exemplo 2 - Sinuca

Em um jogo de sinuca, um jogador quer encaçapar uma bola (2) conforme mostrado na figura ao lado. Se o ângulo com a caçapa do canto é de 35°, com qual ângulo que a bola branca (1) vai ser defletida?



Exemplo 2 - Sinuca

Em um jogo de sinuca, um jogador quer encaçapar uma bola (2) conforme mostrado na figura ao lado. Se o ângulo com a caçapa do canto é de 35°, com qual ângulo que a bola branca (1) vai ser defletida?



$$\begin{cases} \text{Conservação de Energia} \rightarrow \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \\ \text{Conservação de Momento} \rightarrow m_1\vec{v}_{1i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} \end{cases}$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \begin{cases} v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \\ \vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} \rightarrow (\vec{v}_{1i})^2 = (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f})^2 \end{cases}$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\vec{v}_{1f}\cdot\vec{v}_{2f} \rightarrow \vec{v}_{1f}\cdot\vec{v}_{2f} = 0$$

$$\vec{v}_{1f}\cdot\vec{v}_{2f} = v_{1f}v_{2f}\cos(\theta + 35^\circ) \rightarrow \cos(\theta + 35^\circ) = 0$$

$$\theta + 35^\circ = 90^\circ \Rightarrow \boxed{\theta = 55^\circ}$$

Exemplo 3 – Espalhamento de partículas

Um próton a velocidade de $3{,}5 \times 10^5$ m/s colide com um próton em repouso. Depois da colisão, um dos prótons é espalhado a um ângulo de 37°.

a) Qual a velocidade final de cada um dos dois prótons?

b) Em que ângulo o outro próton é espalhado?

Exemplo 3 – Espalhamento de partículas

Um próton a velocidade de 3,5 x 10^5 m/s colide com um próton em repouso. Depois da colisão, um dos prótons é espalhado a um ângulo de 37°.

a) Qual a velocidade final de cada um dos dois prótons?

b) Em que ângulo o outro próton é espalhado?

Reação: $1\,2 \rightarrow a\,b$

Conservação de Momento: $\rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_a + \vec{p}_b$

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = m_p v_1 \hat{i} \\ \vec{p}_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{p}_a = m_p v_a \cos\theta \hat{i} + m_p v_a \sin\theta \hat{j} \\ \vec{p}_b = m_p v_b \cos\phi \hat{i} + m_p v_b \sin\phi \hat{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_p v_1 = m_p v_a \cos\theta + m_p v_b \cos\phi \\ 0 = m_p v_a \sin\theta + m_p v_b \sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = v_a \cos\theta + v_b \cos\phi \\ 0 = v_a \sin\theta + v_b \sin\phi \end{cases}$$

Conservação da Energia:

$$\frac{m_p v_1^2}{2} + \frac{m_p v_2^2}{2} = \frac{m_p v_a^2}{2} + \frac{m_p v_b^2}{2}$$

$$v_1^2 = v_a^2 + v_b^2$$

Exemplo 6 – Espalhamento de partículas

$$\begin{cases} v_1 = v_a\cos\theta + v_b\cos\phi & (1) \\ 0 = v_a\sin\theta + v_b\sin\phi & (2) \\ v_1^2 = v_a^2 + v_b^2 & (3) \end{cases}$$

$$(1)\times\sin\theta - (2)\times\cos\theta$$

$$v_1\sin\theta = v_b\left(\sin\theta\cos\phi - \sin\phi\cos\theta\right)$$

$$v_1\sin\theta = v_b\sin(\theta-\phi)$$

$$v_b = v_1\sin\theta = 3,5\times10^5\sin 37^\circ$$

$$\boxed{v_b = 2,11\times10^5 \text{ m/s}}$$

$$(1)\to v_1^2 = v_a^2\cos^2\theta + v_b^2\cos^2\phi + 2v_av_b\cos\theta\cos\phi$$

$$(2)\to 0 = v_a^2\sin^2\theta + v_b^2\sin^2\phi + 2v_av_b\sin\theta\sin\phi$$

$$v_1^2 = v_a^2 + v_b^2 + 2v_av_b\left(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\right)$$

$$v_1^2 = v_a^2 + v_b^2 + 2v_av_b\cos\left(\theta-\phi\right)$$

$$(3)\to 2v_av_b\cos\left(\theta-\phi\right) = 0$$

$$\cos\left(\theta-\phi\right) = 0 \Rightarrow \theta-\phi = 90^\circ$$

$$\phi = \theta - 90^\circ \Rightarrow \boxed{\phi = -53^\circ}$$

$$(1)\times\sin\phi - (2)\times\cos\phi$$

$$v_1\sin\phi = v_a\left(\sin\phi\cos\theta - \sin\theta\cos\phi\right)$$

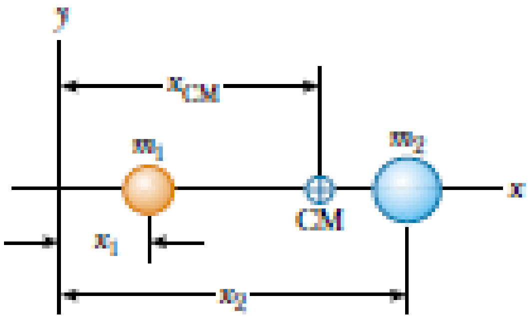
$$v_1\sin\phi = v_a\sin(\phi-\theta)$$

$$v_a = -v_1\sin\phi = -3,5\times10^5\sin(-53^\circ)$$

$$\boxed{v_b = 2,80\times10^5 \text{ m/s}}$$

Centro de massa

- Sistema de Partículas:
  - Conjunto de objetos puntuais, (e.g. átomos em uma molécula
  - Objeto extenso (e.g. uma barra, uma bola, ...)
- Centro de Massa:
  - Representa o movimento do sistema como um todo.
  - Movimenta-se como se toda a massa (*M*) do sistema estivesse concentrada nesse ponto.
- Posição do Centro de Massa:
  - Posição média das massas do sistema
  - Posição do sistema como se todas as massas estivessem em um único ponto
- Centro de Massa = Centro de Gravidade
- <u>Centro de Massa de Duas Partículas em 1 Dimensão:</u>



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Centro de massa

- As componentes da posição do centro de massa serão a posição do centro de massa em cada dimensão.

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + x_{CM}\hat{k}$$

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M}$$

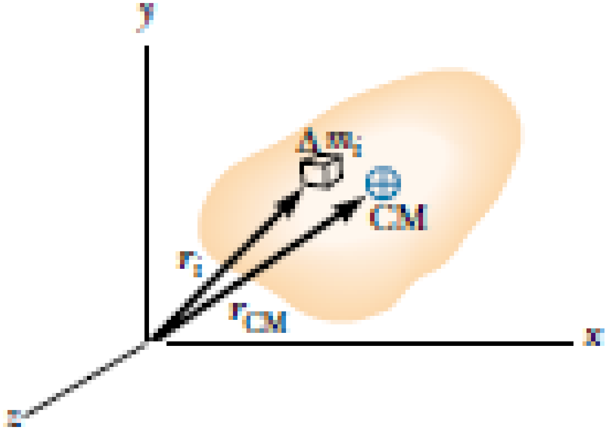
$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M}$$

$$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M}$$

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \hat{i} + \sum_{i=1}^{N} m_i y_i \hat{j} + \sum_{i=1}^{N} m_i z_i \hat{k}\right), \text{onde } M = \sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Centro de massa de um objeto extenso

Objeto extenso: conjunto de N objetos de massa Δm_i localizado na posição $\vec{r}_i$



$$x_{CM} \approx \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} x_i \Delta m_i$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} x_i \Delta m_i$$

$$N \to \infty: \ \Delta m \to dm$$

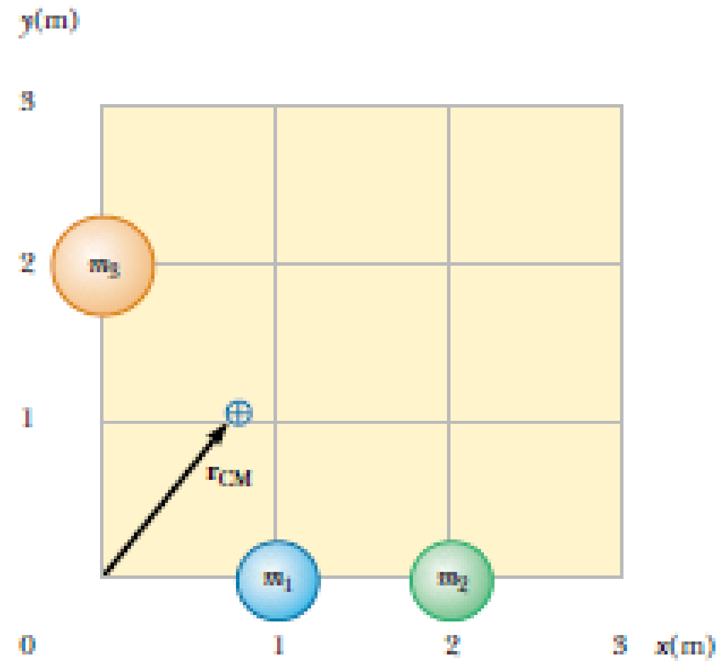
$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm$$

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k} =$$

$$= \frac{1}{M}\left(\int x\, dm\, \hat{i} + \int y\, dm\, \hat{j} + \int z\, dm\, \hat{k}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm}$$

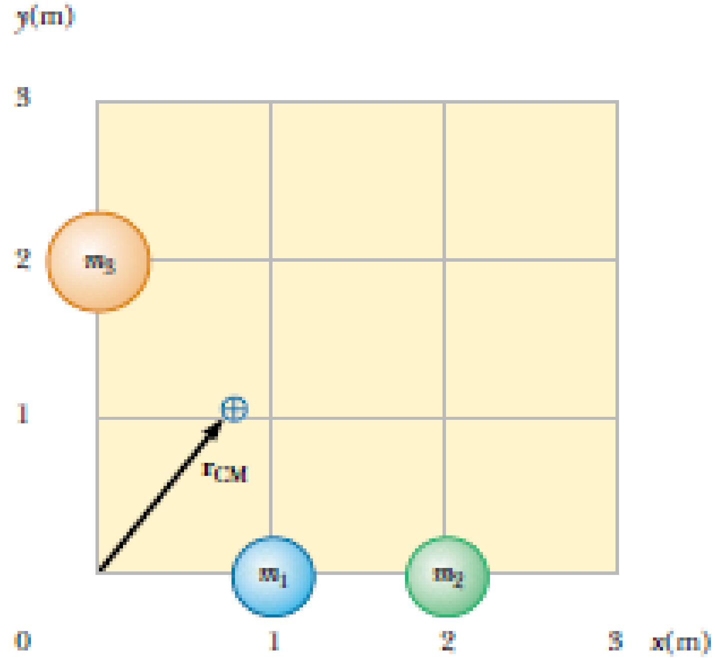
Exemplo 4: centro de massa de 3 partículas

Três bolas de massas $m_1 = m_2 = 1{,}0$ kg e $m_3 = 2{,}0$ kg estão dispostas no arranjo mostrado ao lado. Calcule a posição de centro de massa do sistema.



Exemplo 4: centro de massa de 3 partículas

Três bolas de massas $m_1 = m_2 = 1{,}0$ kg e $m_3 = 2{,}0$ kg estão dispostas no arranjo mostrado ao lado. Calcule a posição de centro de massa do sistema.



$$\begin{cases} \vec{r}_1 = 1\hat{i} + 0\,\hat{j} \\ \vec{r}_2 = 2\hat{i} + 0\,\hat{j} \\ \vec{r}_3 = 0\hat{i} + 2\,\hat{j} \end{cases}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} =$$

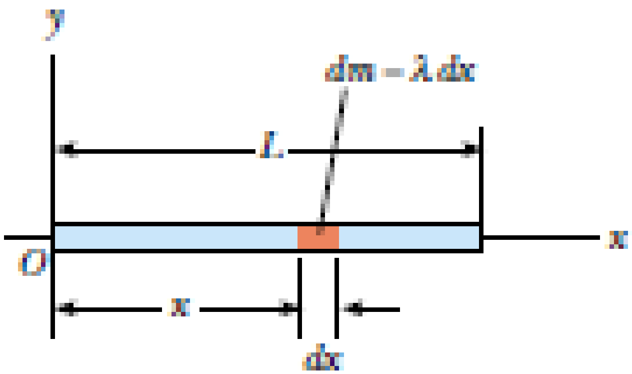
$$= \frac{(1{,}0\times 1 + 1{,}0\times 2 + 2{,}0\times 0)\hat{i} + (1{,}0\times 0 + 1{,}0\times 0 + 2{,}0\times 2)\,\hat{j}}{1{,}0 + 1{,}0 + 2{,}0} = \frac{3{,}0\hat{i} + 4{,}0\,\hat{j}}{4{,}0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = (0{,}75\ \text{m})\hat{i} + (1{,}0\ \text{m})\,\hat{j}}$$

Exemplo 5: centro de massa de uma barra

Mostre que o centro de massa de uma barra homogênea de largura constante e comprimento *L* situa-se em L/2, isto é, simetricamente eqüidistante das suas extremidades.

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,dm$$



$$\text{densidade linear } \lambda \Rightarrow dm = \lambda\,dx$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\lambda\,dx$$

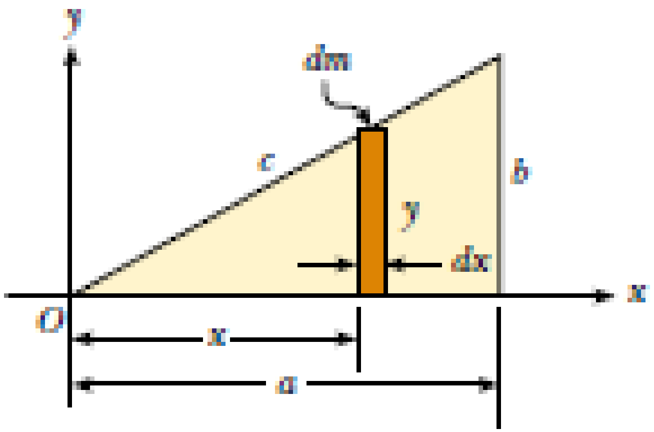
$$\lambda \text{ constante} \Rightarrow x_{CM} = \frac{1}{M}\lambda\int_0^L x\,dx = \frac{\lambda}{M}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

$$M = \int_0^L dm \Rightarrow M = \lambda\int_0^L dx = \lambda L$$

$$M = \lambda L \quad \Rightarrow \boxed{x_{CM} = \frac{L}{2}}$$

Exemplo 6: centro de massa de um triângulo retângulo

Calcule a posição do centro de massa de uma chapa no formato de um triângulo retângulo conforme mostrado na figura, com densidade e espessura constante.



Densidade superficial:

$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{ab/2} = \frac{2M}{ab}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$dm = \sigma\,dA = \sigma\,ydx = \frac{2M}{ab}\left(\frac{b}{a}x\right)dx = \frac{2M\,xdx}{a^2}$$

$$x_{CM} = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2dx = \frac{2}{a^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^a = \frac{2}{a^2}\frac{a^3}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{x_{CM} = \frac{2a}{3}}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

$$dm = \sigma\,dA = \sigma\,(a-x)dy = \frac{2M}{ab}\left(a - \frac{a}{b}y\right)dy = \frac{2M\,(b-y)dy}{b^2}$$

$$y_{CM} = \frac{2}{b^2}\int_0^b (by - y^2)\,dy = \frac{2}{b^2}\left(\frac{by^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\bigg|_0^b = 2b\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{y_{CM} = \frac{b}{3}}$$

Sistema de Partículas

- Assim como definimos a posição do centro de massa de um sistema, podemos definir a Velocidade do Centro de Massa de um sistema como sendo:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{CM} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_i m_i\frac{d}{dt}\vec{r}_i \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{v}_i$$

- Da mesma forma, podemos definir o Momento do Centro de Massa de um sistema como sendo:

$$\vec{p}_{CM} = M\vec{v}_{CM} = \sum_i m_i\vec{v}_i \Rightarrow \vec{p}_{CM} = \sum_i \vec{p}_i$$

- e Aceleração do Centro de Massa como sendo:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{v}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_i m_i\frac{d}{dt}\vec{v}_i \Rightarrow \vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{a}_i$$

- A Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas então fica:

$$\vec{F}^R_{CM} = M\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i\vec{a}_i \Rightarrow \vec{F}^R_{CM} = \sum_i \vec{F}_i^R$$

Exemplo 7: explosão em movimento

Um foguete sobe verticalmente e explode em três pedaços de mesma massa quando atinge uma altitude de 1.000 m a uma velocidade de 300 m/s. Um dos pedaços continua a se movimentar para cima com velocidade de 450 m/s e um segundo pedaço vai para o leste a 240 m/s.

a) Qual a velocidade vetorial do terceiro pedaço?

b) Qual a posição do centro de massa do sistema em relação ao chão 3 segundos após a explosão?

Exemplo 7: explosão em movimento

Um foguete sobe verticalmente e explode em três pedaços de mesma massa quando atinge uma altitude de 1.000 m a uma velocidade de 300 m/s. Um dos pedaços continua a se movimentar para cima com velocidade de 450 m/s e um segundo pedaço vai para o leste a 240 m/s.

a) Qual a velocidade vetorial do terceiro pedaço?

b) Qual a posição do centro de massa do sistema em relação ao chão 3 segundos após a explosão?

a)

$$\vec{v}_i = 300\,\hat{j},\ \vec{v}_1 = 450\,\hat{j},\ \vec{v}_2 = 240\,\hat{i},\ \vec{v}_3 = ?$$

$$\vec{p}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

$$M\vec{v}_i = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{v}_3, \text{ mas } M = 3m \Rightarrow$$

$$3\vec{v}_i = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \Rightarrow$$

$$900\,\hat{j} = 450\,\hat{j} + 240\,\hat{i} + v_{3x}\hat{i} + v_{3y}\,\hat{j}$$

$$\boxed{\vec{v}_3 = -240\,\hat{i} + 450\,\hat{j}}$$

b)

$$\begin{cases} a_{CM} = -g \\ v_{0CM} = 300 \\ y_{0CM} = 1.000 \end{cases}$$

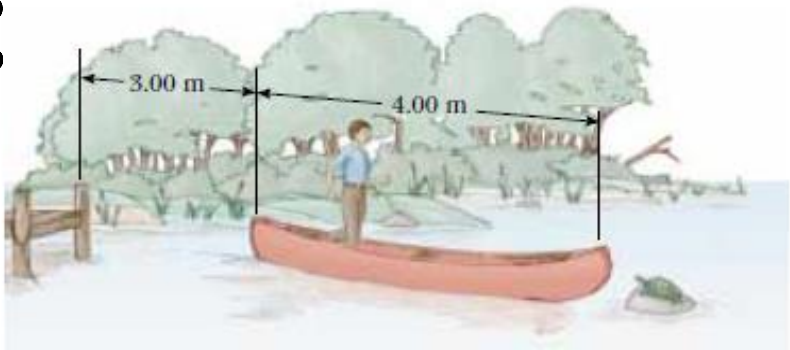
$$y_{CM} = y_{0CM} + v_{0CM}t + \frac{1}{2}a_{CM}t^2$$

$$y_{CM} = 1.000 + 300 \times 3 - \frac{9,8 \times 3^2}{2}$$

$$\boxed{y_{CM} = 1.856\,\mathrm{m}}$$

Exemplo 8: movimento relativo

Um garoto de 40 kg está em uma ponta de um bote de 4 metros de comprimento e 70 kg, parado a 3,00 metros do pier, quando vê uma tartaruga na água, na outra ponta do barco.

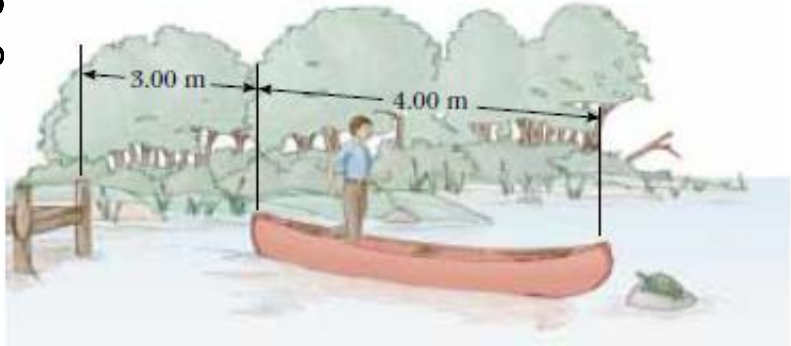


a) Qual será a posição do garoto em relação ao pier quando ele estiver na outra ponta do barco?

b) Ele consegue pegar a tartaruga, assumindo que ele consegue esticar o braço a 1 m de distância do barco?

Exemplo 8: movimento relativo

Um garoto de 40 kg está em uma ponta de um bote de 4 metros de comprimento e 70 kg, parado a 3,00 metros do pier, quando vê uma tartaruga na água, na outra ponta do barco.



a) Qual será a posição do garoto em relação ao pier quando ele estiver na outra ponta do barco?

b) Ele consegue pegar a tartaruga, assumindo que ele consegue esticar o braço a 1 m de distância do barco?

a)

$$F_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow x_{CM}^{i} = x_{CM}^{f}$$

$$x_{CM} = \frac{m_G x_G + m_B x_B}{m_G + m_B}$$

$$m_G x_G^i + m_B x_B^i = m_G x_G^f + m_B x_B^f$$

$$x_B \equiv x_B^{CM}$$

$$\text{Barco simétrico} \rightarrow \text{CM}_B = L/2$$

$$x_B^i = x_G^i + L/2 \quad x_B^f = x_G^f - L/2$$

$$m_G x_G^i + m_B \left(x_G^i + L/2\right) = m_G x_G^f + m_B \left(x_G^f - L/2\right)$$

$$x_G^f = x_G^i + \frac{m_B}{m_B + m_G} L$$

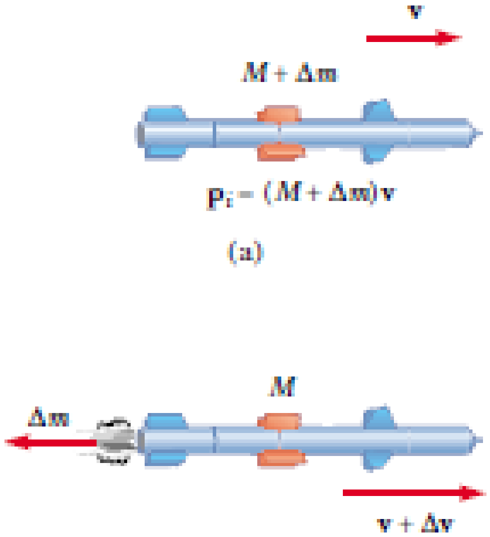
$$x_G^f = 3,0 + \frac{70}{40+70} 4,0$$

$$\boxed{x_G^f = 5,55\,\text{m}}$$

b) Não consegue pegar a tartaruga pois esta se encontra a 7 m do pier.

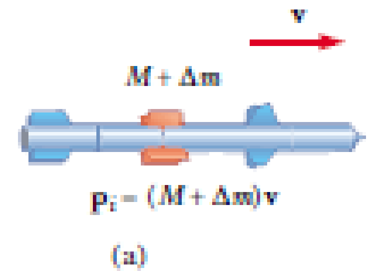
Propulsão a jato

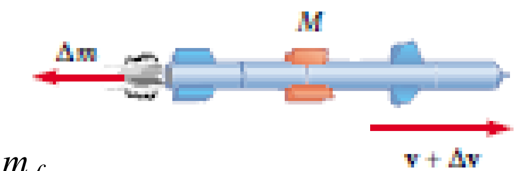
- Conservação do Momento Linear do sistema "Turbina + Jato de Gas".
- O Momento transmitido ao jato de gases é igual e em sentido contrário ao Momento adquirido pela turbina.



Propulsão a jato

- Conservação do Momento Linear do sistema "Turbina + Jato de Gas".
- O Momento transmitido ao jato de gases é igual e em sentido contrário ao Momento adquirido pela turbina.





$$(M+\Delta m)v = M(v+\Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

$$M\Delta v = v_e \Delta m$$

$$\Delta t \to 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta v \to dv \\ \Delta m \to dm \end{cases}$$

$$M dv = v_e dm$$

$$dm = -dM \Rightarrow M dv = -v_e dM$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{m_i}^{m_f} \frac{dM}{M}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{m_i}^{m_f} \frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = -v_e\left(\ln m_f - \ln m_i\right)$$

$$\boxed{\Delta v = v_e \ln \frac{m_i}{m_f}}$$

$$\text{Empuxo da turbina}: F = {dp}/{dt} = M\, {dv}/{dt}$$

$$M\frac{dv}{dt} = -v_e \frac{dM}{dt} \Rightarrow \boxed{F = -v_e \frac{dM}{dt}}$$

Exemplo 9: foguete no espaço

Um foguete está se movendo no espaço com uma velocidade constante de $3{,}0 \times 10^3$ m/s em relação à Terra. Quando seus motores são ligados, o combustível é lançado no espaço a uma velocidade de $5{,}0 \times 10^3$ m/s em relação ao foguete.

a) Qual a velocidade do foguete em relação à Terra após desligar o motor se sua massa é metade da que era antes de ligar os motores?
b) Qual é o empuxo do motor se ele queima combustível a uma taxa de 50 kg/s?

Exemplo 9: foguete no espaço

Um foguete está se movendo no espaço com uma velocidade constante de 3,0 x 10^3 m/s em relação à Terra. Quando seus motores são ligados, o combustível é lançado no espaço a uma velocidade de 5,0 x 10^3 m/s em relação ao foguete.

a) Qual a velocidade do foguete em relação à Terra após desligar o motor se sua massa é metade da que era antes de ligar os motores?

b) Qual é o empuxo do motor se ele queima combustível a uma taxa de 50 kg/s?

$$v_f = v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

$$= 3,0 \times 10^3 + 5,0 \times 10^3 \ln\left(\frac{M_i}{0,5M_i}\right)$$

$$= 6,5 \times 10^3 \text{m/s}$$

b)

$$F = v_e \frac{dM}{dt}$$

$$= 5,0 \times 10^3 \times 50$$

$$= 2,5 \times 10^5 N$$

Bibliografia

Serway, R. A.; Jewett Jr., J. W. *Princípios de Física - Mecânica Clássica*, Vol. 1, cap. 8, Cengage Learning, 2004.

Young, H. D.; Freedman, R. A. *Sears & Zemansky, Física I - Mecânica*, vol. 1, cap. 8, Pearson Education do Brasil, 2008.