Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)
Universidade Federal do ABC (UFABC)

Fenômenos Mecânicos

Aula 10

Prof. Marcelo A. Leigui de Oliveira
(leigui@ufabc.edu.br)

14/04/2023

Universidade Federal do ABC

O que veremos hoje...

- Cinemática rotacional do corpo rígido
- Dinâmica rotacional
- Torque
- Momento de inércia
- Raio de giração

Variáveis rotacionais (angulares)

✓ **cada ponto** do corpo rígido executa **movimento circular**

✓ módulo do vetor posição de *O* a *P* :

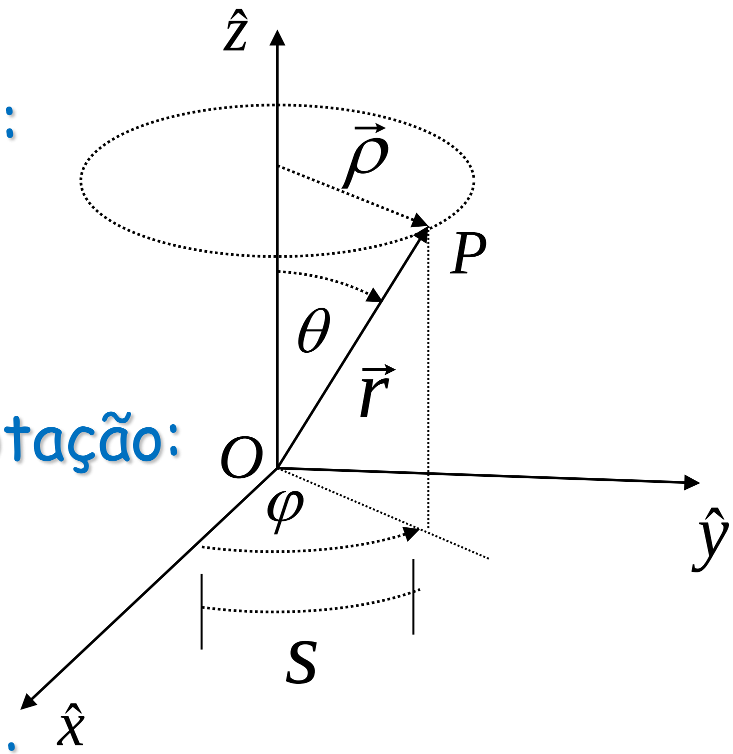
$$\left|\vec{r}\right| = r$$

✓ distância do ponto *P* ao eixo de rotação:

$$\left|\vec{\rho}\right| = \rho = r sen\,\theta$$

✓ distância percorrida pelo ponto *P* :

$$s = \rho\,\varphi \qquad (\varphi\; em\; radianos)$$



Variáveis rotacionais (angulares)

- ✓ Deslocamento angular

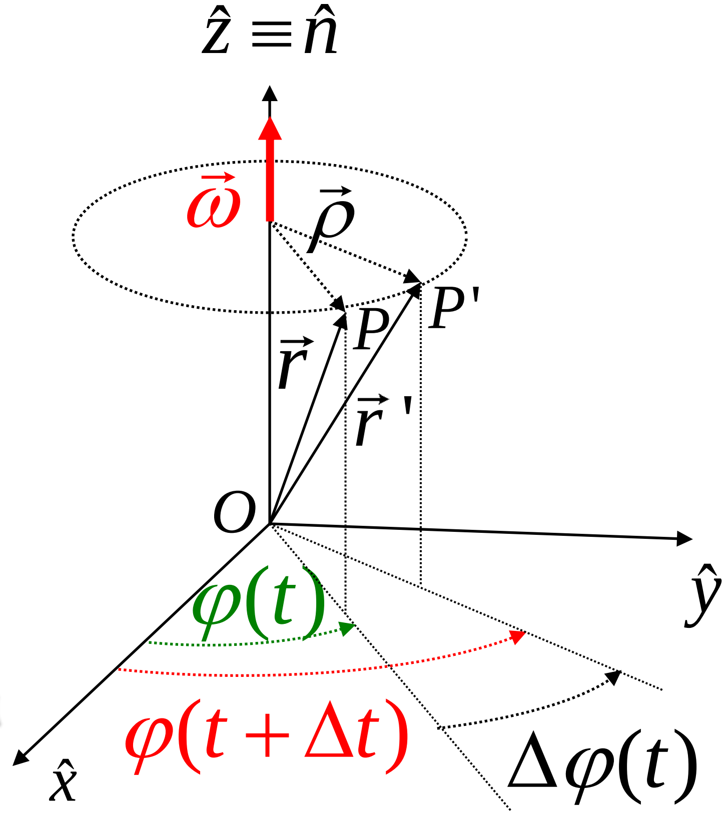
$$\Delta\varphi(t) = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$$

- ✓ Velocidade angular média (escalar)

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

- ✓ Velocidade angular instantânea (vetor)

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\hat{n} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{n}$$



Relação com as variáveis lineares

- ✓ Deslocamento angular

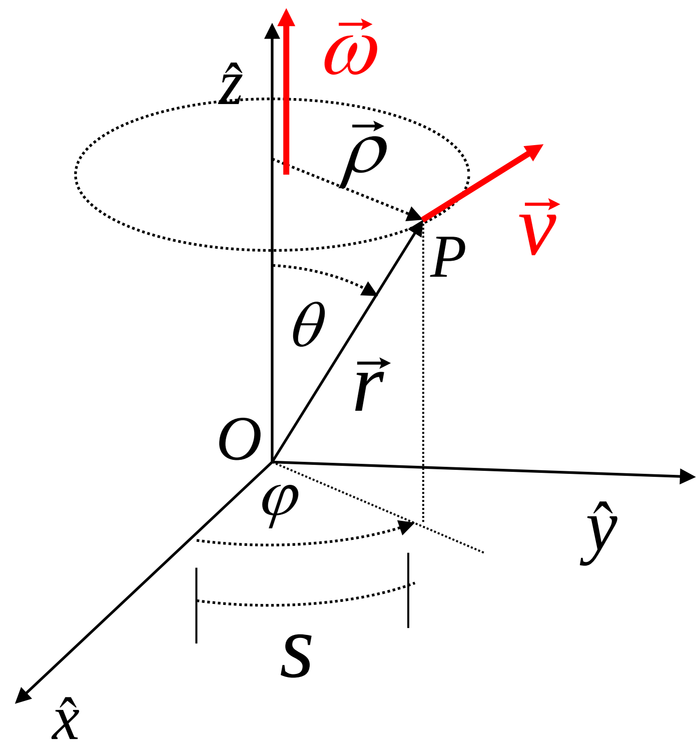
$$s = \rho\,\varphi = r\,sen\theta\,\varphi$$

- ✓ Velocidade linear

$$v = \frac{ds}{dt} = \rho\frac{d\varphi}{dt} = \omega r\,sen\theta$$

Tangente à trajetória no ponto considerado

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$$

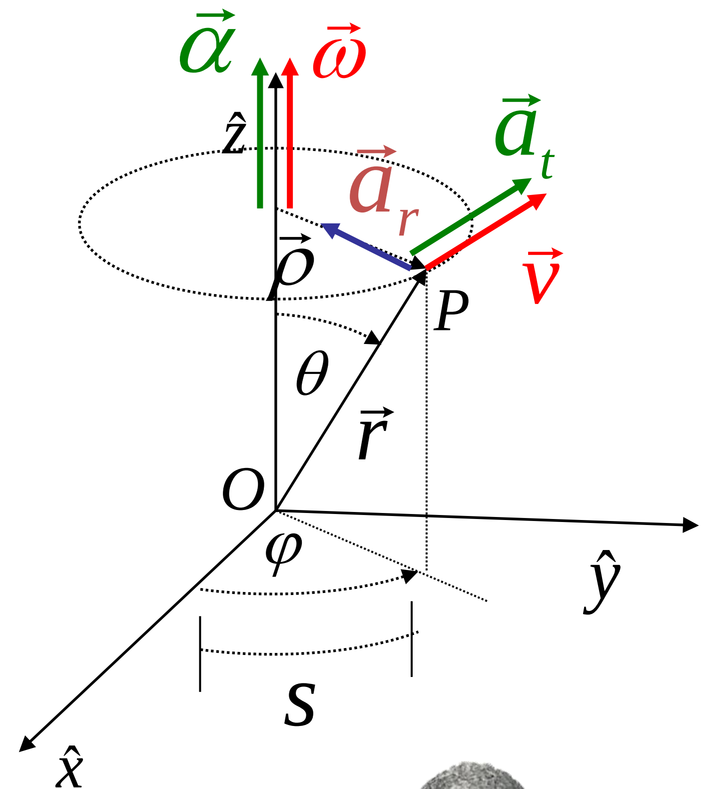


Relação com as variáveis lineares

✓ Aceleração

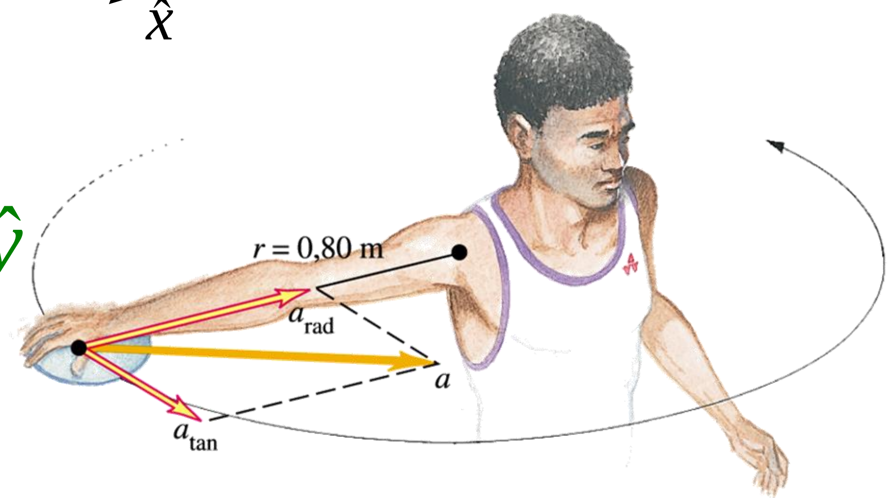
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) =$$

$$= \underbrace{\overbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}^{\vec{\alpha}}\times\vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega}\times\overbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}^{\vec{v}}}_{\vec{a}_r}$$



$$\vec{a}_t = \alpha r\, \mathrm{sen}\,\theta\, \hat{v} = \vec{\alpha}\times\vec{r} = \alpha\rho\,\hat{v}$$

$$\vec{a}_r = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -\omega^2\rho\,\hat{\rho}$$



Revisando o que obtivemos até agora...

$$s = \rho\,\varphi = r\,sen\theta\,\varphi$$

Deslocamento angular

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad \vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}\hat{n} = \frac{d\phi}{dt}\hat{n}$$

Velocidade angular média e vetor velocidade angular instantânea

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Aceleração angular média e vetor aceleração angular instantânea

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Velocidade linear

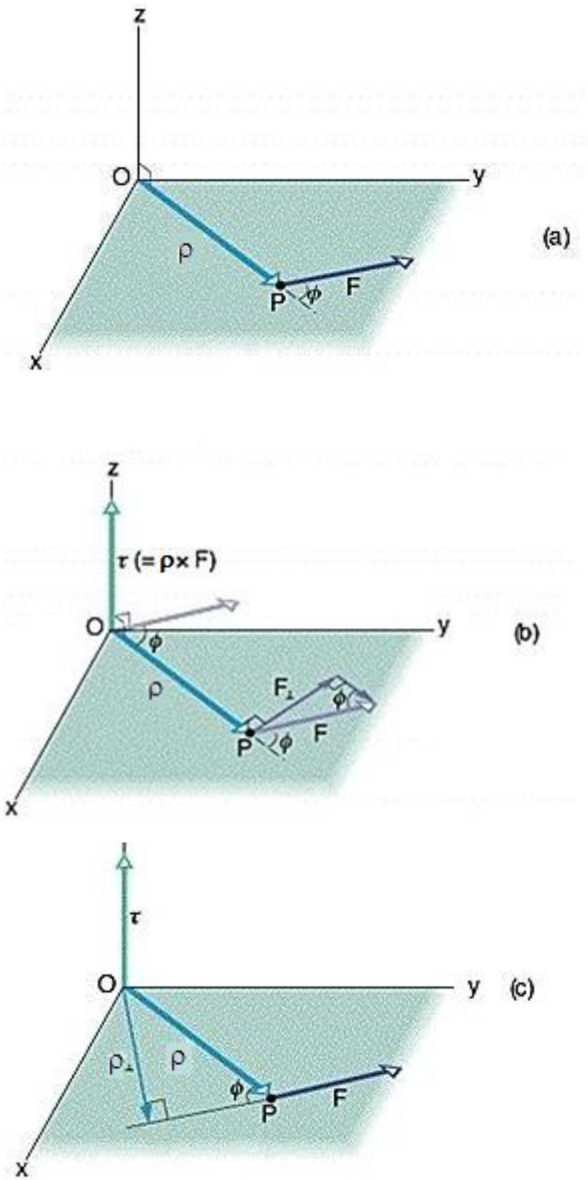
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r = \alpha\rho\hat{v} - \omega^2\rho\hat{\rho}$$

Aceleração linear

Comparação entre o movimento retilíneo e o movimento de rotação

Movimento retilíneo		Movimento de rotação	
Deslocamento linear	Δx	Deslocamento angular	$\Delta\varphi$
Velocidade escalar	$v = \frac{dx}{dt}$	Velocidade angular	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Aceleração	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Aceleração angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Equações da aceleração constante	$v = v_0 + at$ $\Delta x = \overline{v}\Delta t$ $\overline{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$	Equações da aceleração angular constante	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\Delta\varphi = \overline{\omega}\Delta t$ $\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha\Delta\varphi$

Torque



Seja uma força **F** atuando sobre uma partícula no ponto P, fazendo-a girar em torno do ponto O a um raio **r** deste ponto.

A rotação é tão maior quanto maior for a componente perpendicular da força: $F_{\perp} = Fsen\phi$

por isso definimos o ***torque***:

$$\tau = \rho Fsen\phi = \rho F_{\perp} = \rho_{\perp} F$$

com a convenção:

$\tau > 0$ no sentido anti-horário : $\vec{\tau} = \tau\ \hat{z}$

$\tau < 0$ no sentido horário : $\vec{\tau} = -\tau\ \hat{z}$

assim:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{\rho} \times \vec{F}}$$

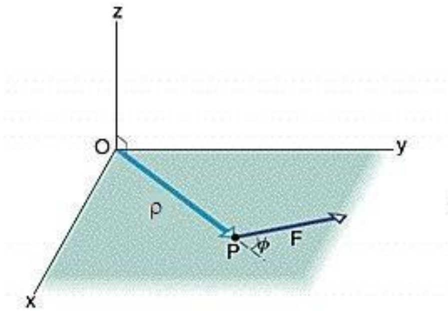
No sistema internacional de unidades (SI): $[\tau] = N \cdot m$

Torque

- Torque, τ, é a tendência de uma força rotacionar um objeto sobre um eixo qualquer

  - Torque, τ, é um vetor:

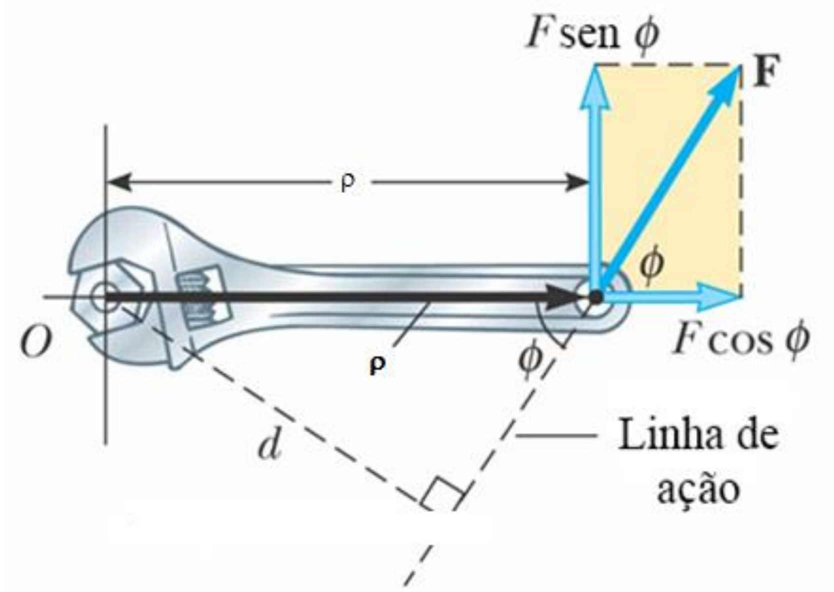
$$\vec{\tau} = F.\rho.\text{sen}\phi\ \hat{z} = Fd\ \hat{z}$$



  - F é a força
  - ϕ é o ângulo que a força faz com o braço da alavanca
  - d é o momento do braço (ou braço da alavanca)

Torque

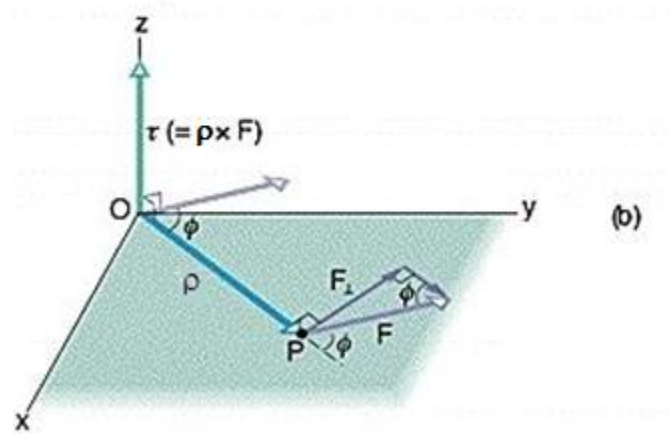
- O momento do braço, d, é perpendicular à distância do eixo de rotação para uma linha tracejada ao longo da direção da força



$$d = \rho \,\text{sen}\, \phi$$

Torque

2ª Lei de Newton (caso rotacional):



A aceleração tangencial é causada pela força tangencial:

$$F_{\perp} = m\,a_{\perp}$$

$$\tau = \rho\,F_{\perp} = \rho\,m\,a_{\perp} = \rho\,m(\alpha\,\rho) = \boxed{\left(m\,\rho^{2}\right)}\alpha$$

assim: $\boxed{\tau = I\alpha}$

I (momento de inércia do ponto P)

Torque

- A componente paralela de F ($F\cos\phi$) não tem tendência de produzir uma rotação

- Torque terá direção

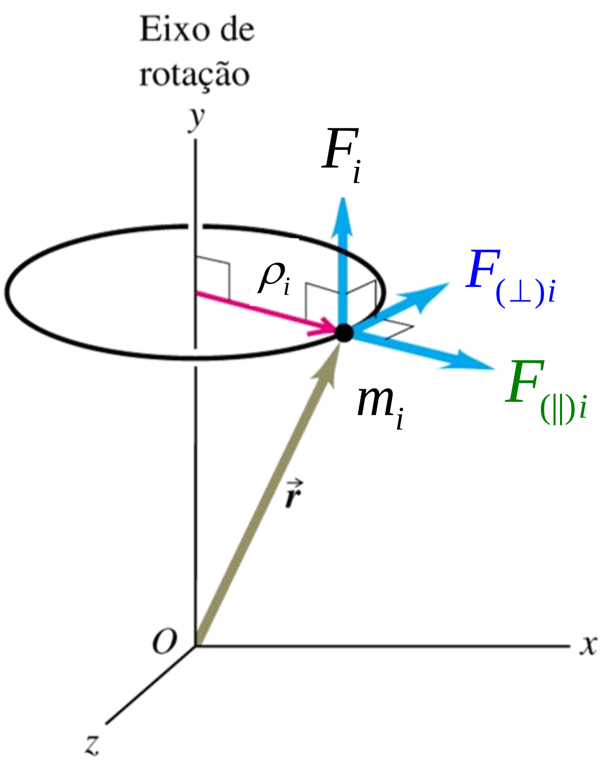
  - Se a tendência do giro causado pela força for anti-horário, o torque será positivo

  - Se a tendência do giro é horário, o torque será negativo

Leis de Newton, torque e momento de inércia

Em cada ponto *i* do corpo rígido temos:

$$\vec{F}_i = m_i\,\vec{a}_i = m_i\alpha\rho_i\,\hat{v}_i - m_i\omega^2\rho_i\,\hat{\rho}_i$$



Decompondo a força:

$$\vec{F}_i = F_{(\perp)i}\hat{v}_i + F_{(//)i}\hat{\rho}_i$$

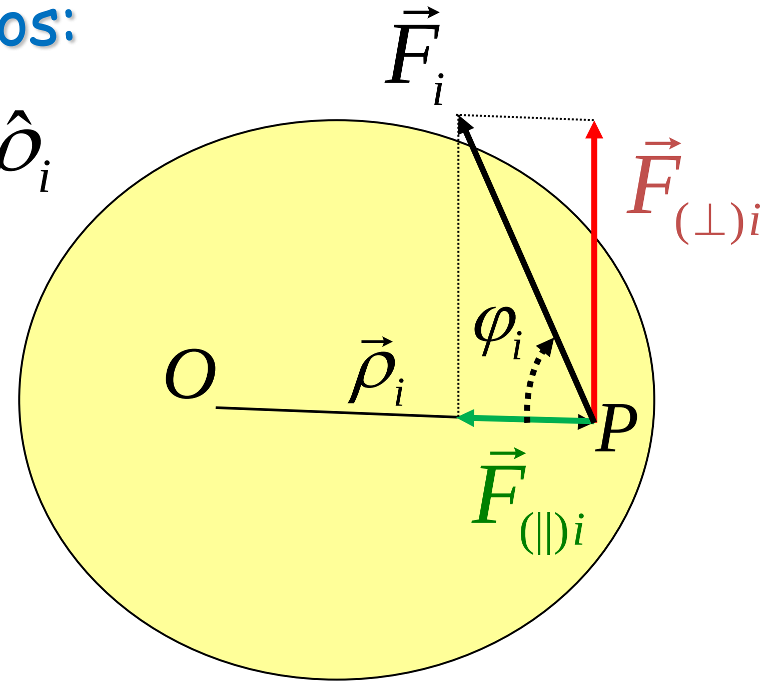
$$F_{(\perp)i} = m_i\alpha\rho_i \quad \Rightarrow \quad \text{Provoca a aceleração angular}$$

$$F_{(\|)i} = m_i\omega^2\rho_i \quad \Rightarrow \quad \text{Não contribui para a rotação do corpo}$$

Leis de Newton, torque e momento de inércia

Em cada ponto *i* do corpo rígido temos:

$$\vec{F}_i = m_i\,\vec{a}_i = m_i\alpha\rho_i\,\hat{v}_i - m_i\omega^2\rho_i\,\hat{\rho}_i$$



Decompondo a força:

$$\vec{F}_i = F_{(\perp)i}\hat{v}_i + F_{(//)i}\hat{\rho}_i$$

$$F_{(\perp)i} = m_i\alpha\rho_i$$ ⟹ Provoca a aceleração angular

$$F_{(\|)i} = m_i\omega^2\rho_i$$ ⟹ Não contribui para a rotação do corpo

Leis de Newton, torque e momento de inércia

No plano perpendicular ao eixo de rotação:

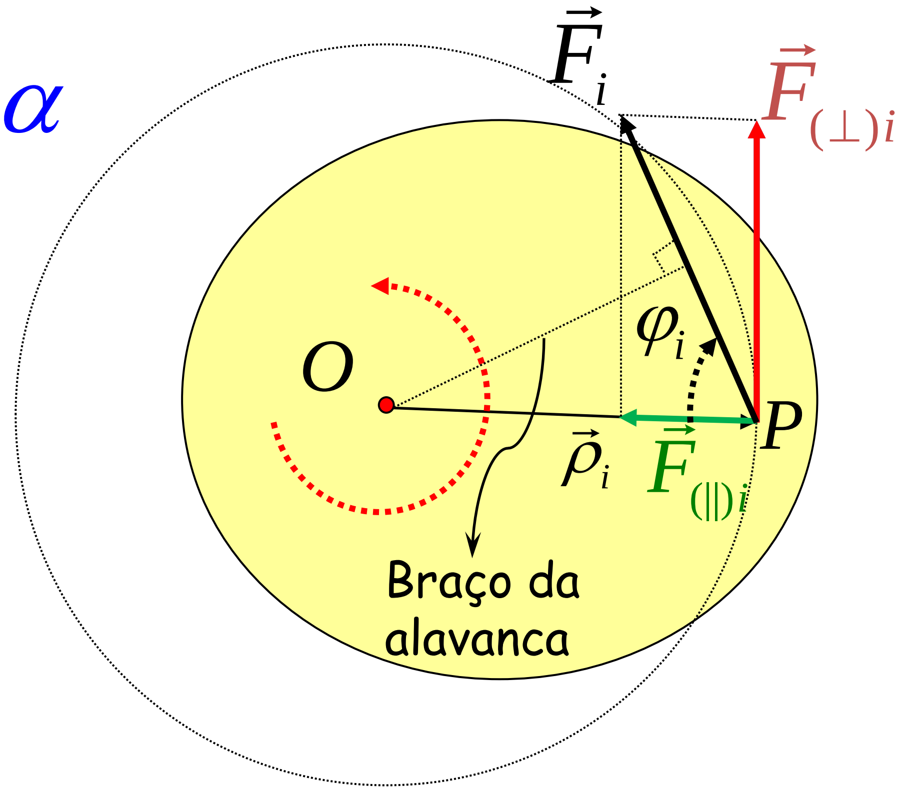
$$F_{(\perp)i} = F_i \, sen\varphi_i = m_i \rho_i \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\rho_i F_i sen\varphi_i = m_i \rho_i^2 \alpha$$

$$\Downarrow$$

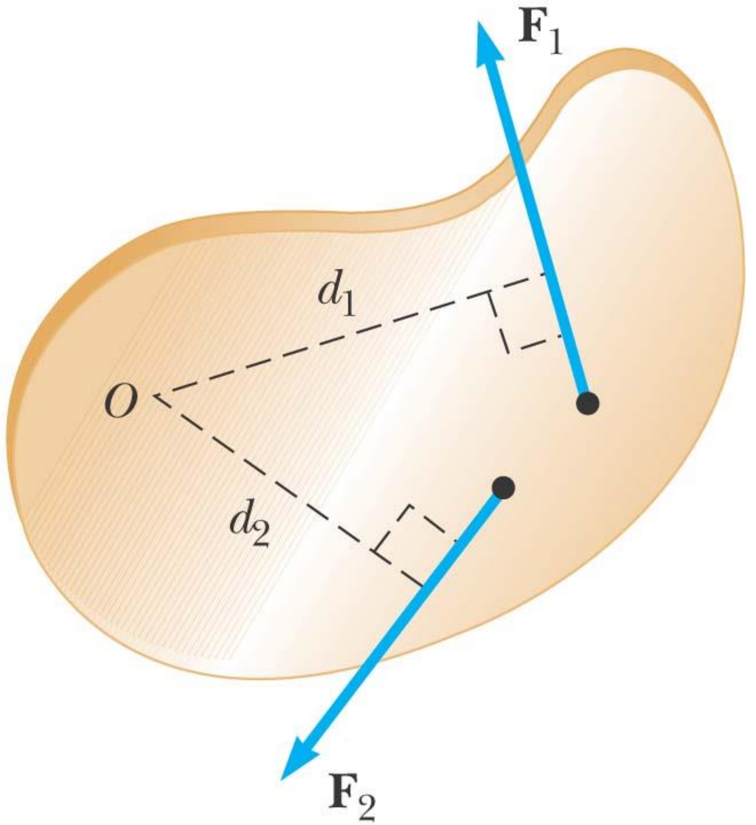
$$\boxed{\vec{\rho}_i \times \vec{F}_i = m_i \rho_i^2 \vec{\alpha} \equiv \vec{\tau}_i}$$



Que é o **torque da força** sobre o ***i-ésimo*** ponto do corpo rígido

Torque resultante

- A força $\mathbf{F}_1$ tende a causar uma rotação no sentido anti-horário ao redor de O
- A força $\mathbf{F}_2$ tende a causar uma rotação no sentido horário ao redor de O
- $\Sigma\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$



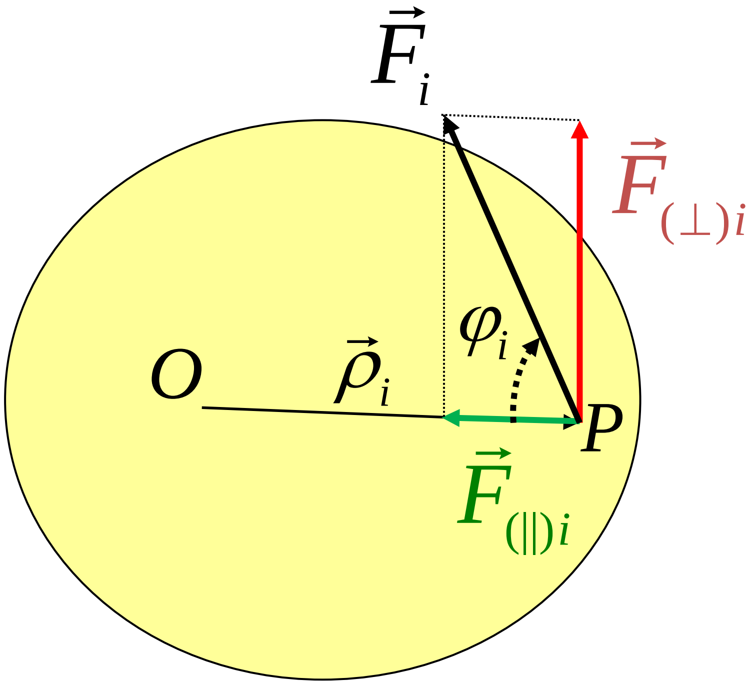
Leis de Newton, torque e momento de inércia

Torque total:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i$$

$$\vec{\tau} = (\sum_i m_i \rho_i^{\,2})\vec{\alpha} \equiv I\,\vec{\alpha}$$

$$\boxed{I \equiv \sum_i m_i \rho_i^{\,2}}$$



É o chamado momento de inércia do corpo com relação ao eixo de rotação.

Analogia com as variáveis lineares:

$$\vec{\tau} \leftrightarrow \vec{F}\,;\; \vec{\alpha} \leftrightarrow \vec{a} \;\; e \;\; I \leftrightarrow M$$

Cálculo do momento de inércia

No caso de partículas pontuais:

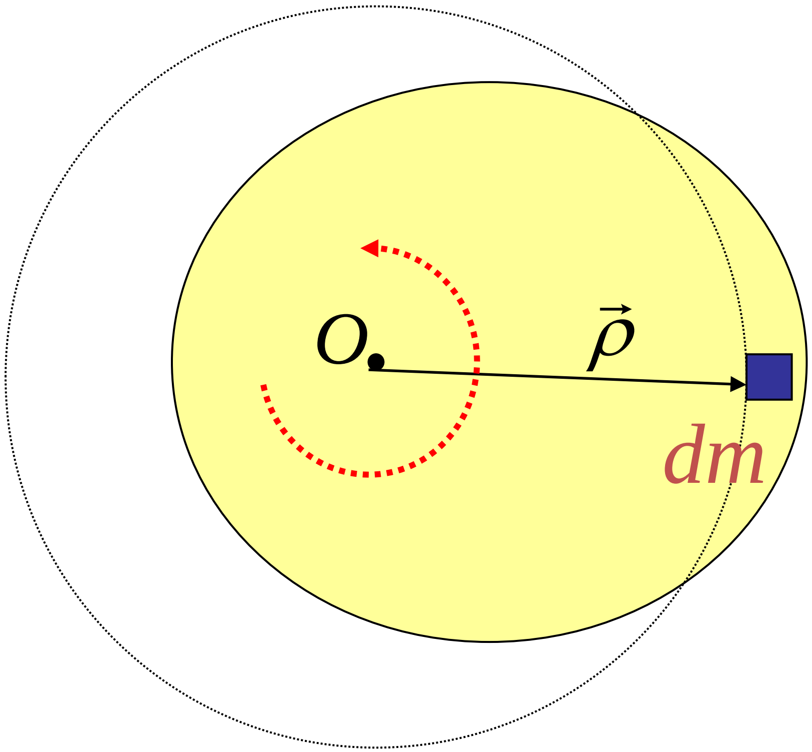
$$I \equiv \sum_i m_i \rho_i^2$$

No caso de uma distribuição contínua de massa:

$$I \equiv \int \rho^2 \, dm$$

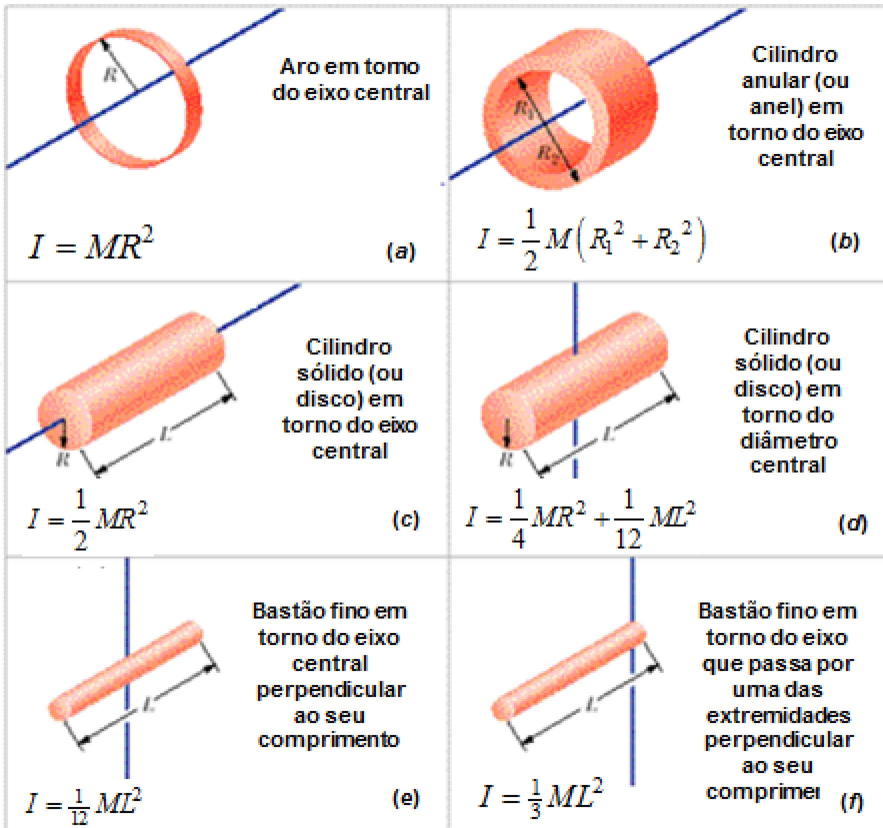
dm é uma massa infinitesimal

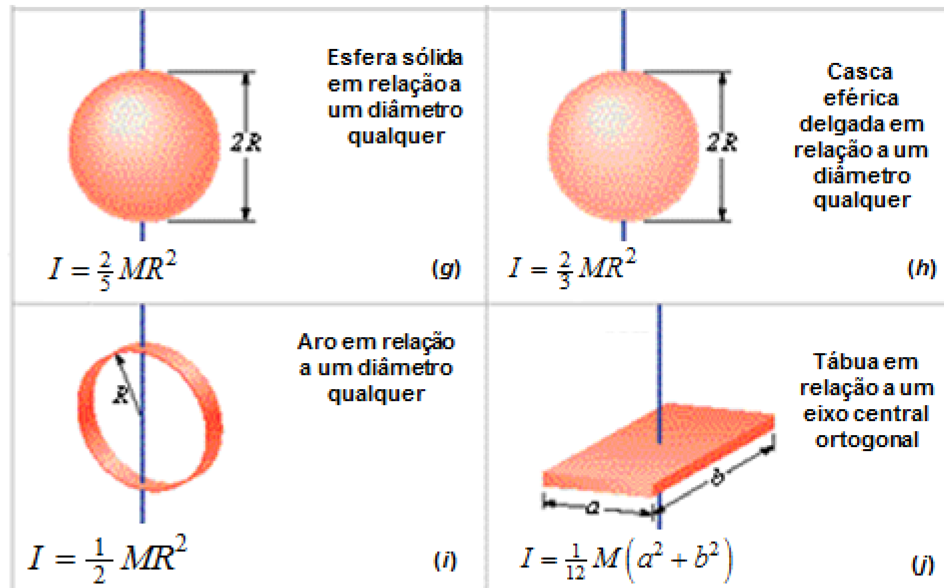
$$dm = \begin{cases} \lambda \, dl \;\; em \; 1\text{dim} \\ \sigma \, ds \;\; em \;\; 2\,\text{dim} \\ \rho_d \, dV \; em \; 3\,\text{dim} \end{cases}$$



$$\rho_d = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho_d V \Rightarrow dm = \rho_d \, dV$$

Momento de Inércia



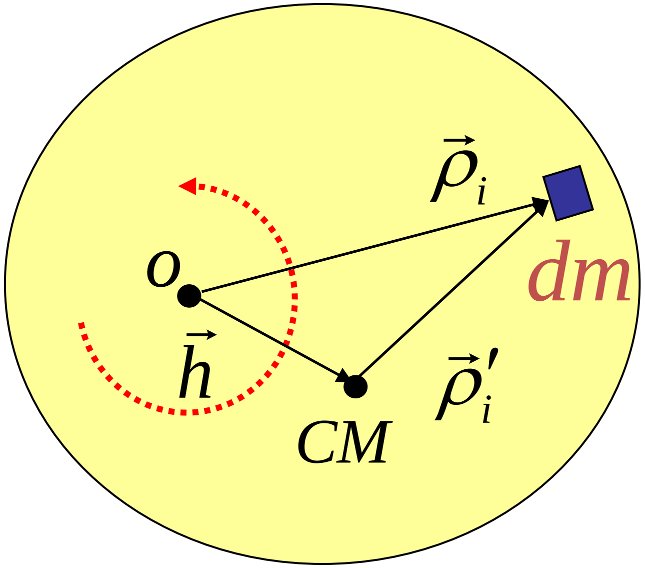


O Teorema dos Eixos Paralelos

$$\vec{\rho}_i = \vec{h} + \vec{\rho}\,'_i$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_i m_i \rho_i^{\,2} = \sum_i m_i h^2 + \sum_i m_i \rho_i'^{\,2} + 2\vec{h}\cdot\sum_i m_i \vec{\rho}\,'_i$$



Mas:

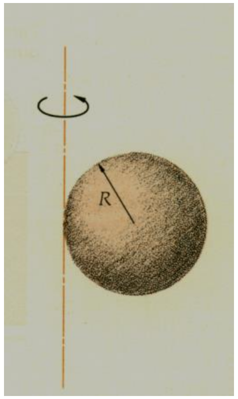
$$\vec{h} = \frac{\sum_i m_i \vec{\rho}_i}{M} \Rightarrow \sum_i m_i(\vec{\rho}_i - \vec{h}) = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{\rho}\,'_i = 0$$

Então:

$$\boxed{I = \sum_i m_i \rho_i^{\,2} = I_{CM} + Mh^2}$$

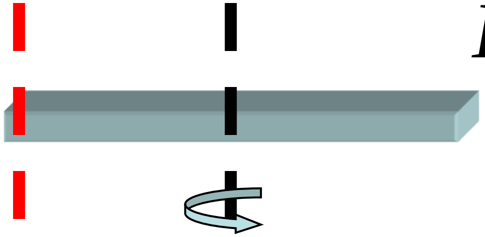
Exemplo

Momento de Inércia de uma esfera maciça e homogênea em relação a um eixo tangente a sua superfície



$$I = I_{CM} + Mh^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$

Para uma barra homogênea de massa M e comprimento L, o momento de inércia em relação a um eixo perpendicular ao plano da barra e que passa por uma extremidade é $I = 1/3\ M\ L^2$. Calcular o momento de inércia em relação ao eixo que passa pela metade da barra.

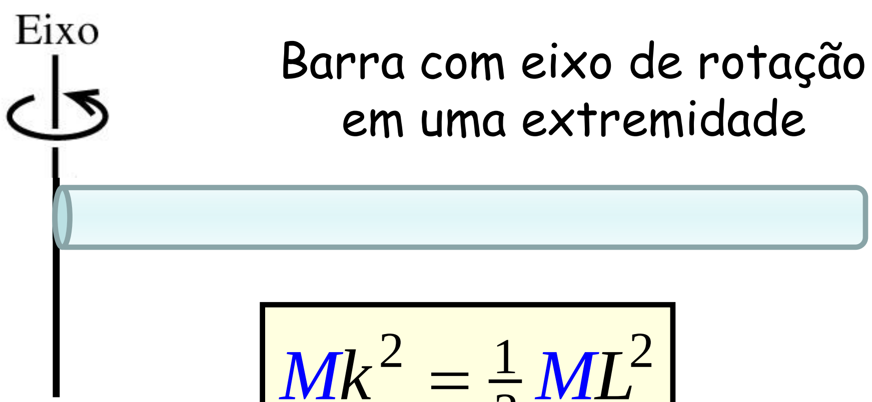


$$I_{CM} = I - Mh^2 = \frac{1}{3}ML^2 - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2$$

Raio de giração

$$k^2 = \frac{I}{M}$$

Raio de giração é a distância ao eixo em que deveria estar um ponto material de massa *M* para ter o mesmo momento de inércia, *I*, que o corpo, em relação ao mesmo eixo.



Barra com eixo de rotação em uma extremidade

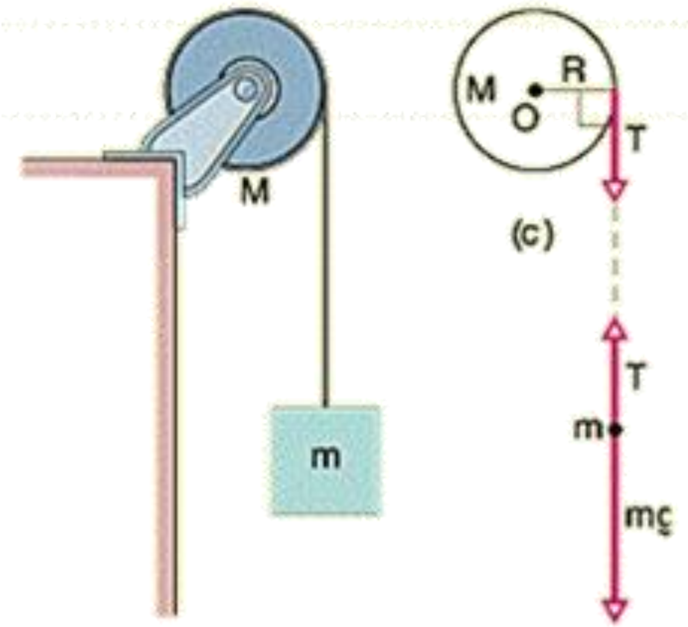
$$Mk^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

$$\Rightarrow k = \frac{L\sqrt{3}}{3}$$

Comparação entre o movimento retilíneo e o movimento de rotação

Movimento retilíneo		Movimento de rotação	
Deslocamento linear	Δx	Deslocamento angular	$\Delta\varphi$
Velocidade escalar	$v = \frac{dx}{dt}$	Velocidade angular	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Aceleração	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Aceleração angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Equações da aceleração constante	$v = v_0 + at$ $\Delta x = \bar{v}\Delta t$ $\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$	Equações da aceleração angular constante	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\Delta\varphi = \bar{\omega}\Delta t$ $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha\Delta\varphi$
Massa	m	Momento de inércia	I
Força	$\vec{F}$	Torque	$\vec{\tau}$
2ª Lei de Newton	$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	2ª Lei de Newton	$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$

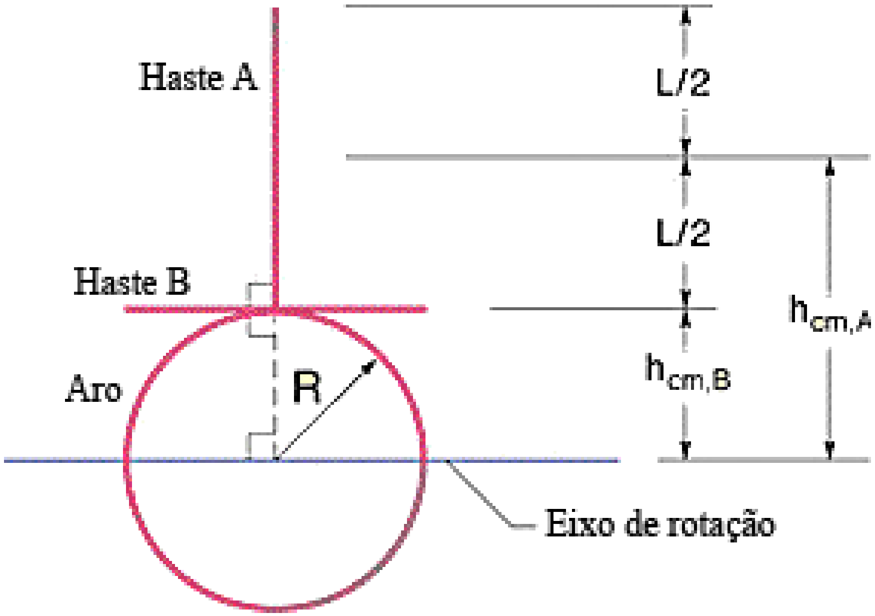
Exemplo 1



A figura ao lado mostra uma polia uniforme de massa M = 2,5 kg e raio R = 20 cm fixada por um eixo horizontal. Um bloco de massa m = 1,2 kg está suspenso por uma corda, de massa desprezível, enrolada em volta da polia.

Após 2,5 s, de qual ângulo a polia girou? Suponha que o sistema parta do repouso.

Exemplo 2

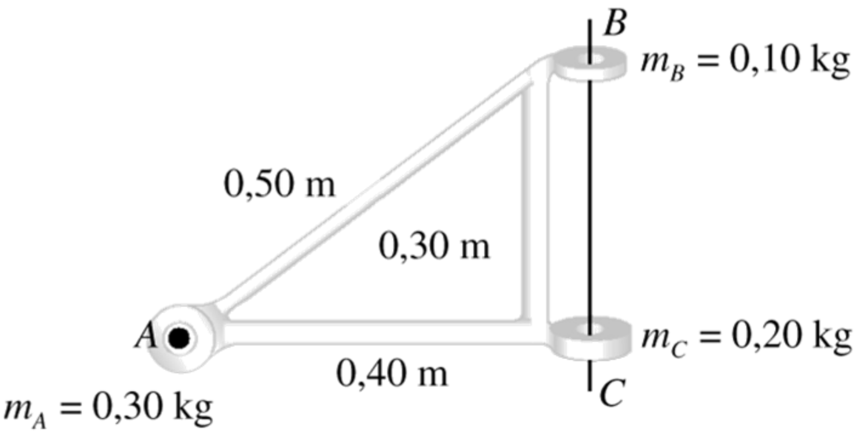


Uma escultura rígida, formada por um aro de metal (de massa *m* e raio *R* = 0,15 m) e duas hastes delgadas (de massa *m* e comprimento *L* = 2,0 *R*) pode girar em torno de um eixo horizontal, no plano do aro, passando pelo seu centro.

(a) Qual o momento de inércia da escultura, em relação ao eixo de rotação, em função de *m* e *R*?

(b) Partindo do repouso, a escultura gira em torno do eixo de rotação mostrado na figura. Qual a sua velocidade angular, ω, em volta do eixo quando é invertida?

Exemplo 3



(a) Qual é o momento de inércia do corpo da figura ao lado em relação ao eixo perpendicular ao plano do desenho e que passa pelo centro do disco *A*?

(b) Qual é o momento de inércia em torno de um eixo que coincide com o disco *B* e *C*?

(c) Se o corpo gira em torno de um eixo perpendicular ao plano do desenho e passa por *A*, com velocidade angular *ω* = 4,0 rad/s, qual é a sua energia cinética?

a) $I_A = \sum_i m_i \rho_i^2 = 0{,}3 \cdot 0^2 + 0{,}1 \cdot 0{,}5^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}057\,\mathrm{kg \cdot m^2}$

b) $I_{B,C} = \sum_i m_i \rho_i^2 = 0{,}3 \cdot 0{,}4^2 + 0{,}1 \cdot 0^2 + 0{,}2 \cdot 0^2 = 0{,}048\,\mathrm{kg \cdot m^2}$

c) $\omega_A = 4\,\mathrm{rad/s} \Rightarrow K = \frac{1}{2} I_A \omega_A^2 = \frac{1}{2} 0{,}057 \cdot 0{,}048^2 = 0{,}456\,\mathrm{J}$

Bibliografia

Serway, R. A.; Jewett Jr., J. W. *Princípios de Física - Mecânica Clássica*, Vol. 1, cap. 10, Cengage Learning, 2004.

Young, H. D.; Freedman, R. A. *Sears & Zemansky, Física I - Mecânica*, vol. 1, cap. 8, Pearson Education do Brasil, 2008.