Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)
Universidade Federal do ABC (UFABC)

Fenômenos Mecânicos

Aula 12

Prof. Marcelo A. Leigui de Oliveira
(leigui@ufabc.edu.br)

26/04/2023

Universidade Federal do ABC

O que veremos hoje...

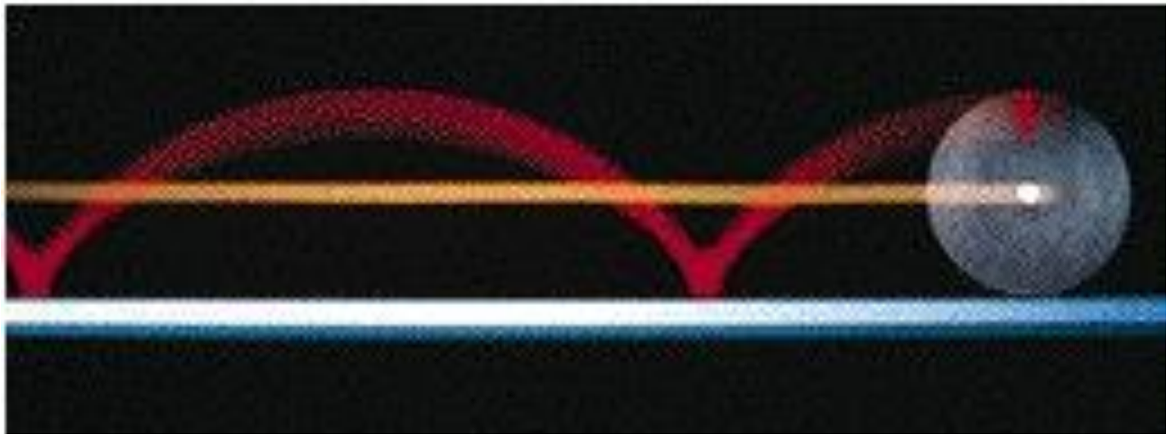
- Rolamento
- Momento angular
- Conservação do momento angular

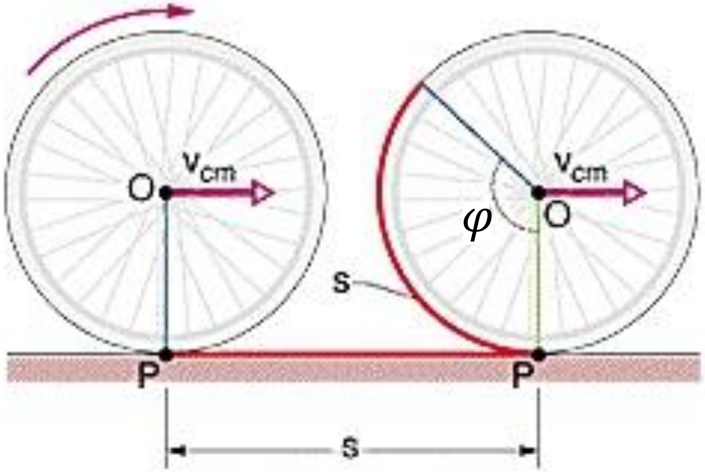
Comparação entre o movimento retilíneo e o movimento de rotação

Movimento retilíneo		Movimento de rotação	
Deslocamento linear	Δx	Deslocamento angular	$\Delta\varphi$
Velocidade escalar	$v = \frac{dx}{dt}$	Velocidade angular	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Aceleração	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Aceleração angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Massa	m	Momento de inércia	I
Força	$\vec{F}$	Torque	$\vec{\tau}$
Momento linear	$\vec{p} = m\vec{v}$	Momento angular	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
2ª Lei de Newton	$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	2ª Lei de Newton	$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$
Trabalho	$W = \int F dx$	Trabalho	$W = \int \tau d\varphi$
Potência	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	Potência	$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$
Energia cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Energia cinética	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
T.E.C.	$W = \Delta K$	T.E.C.	$W = \Delta K$

Rolamento

Ciclóide:

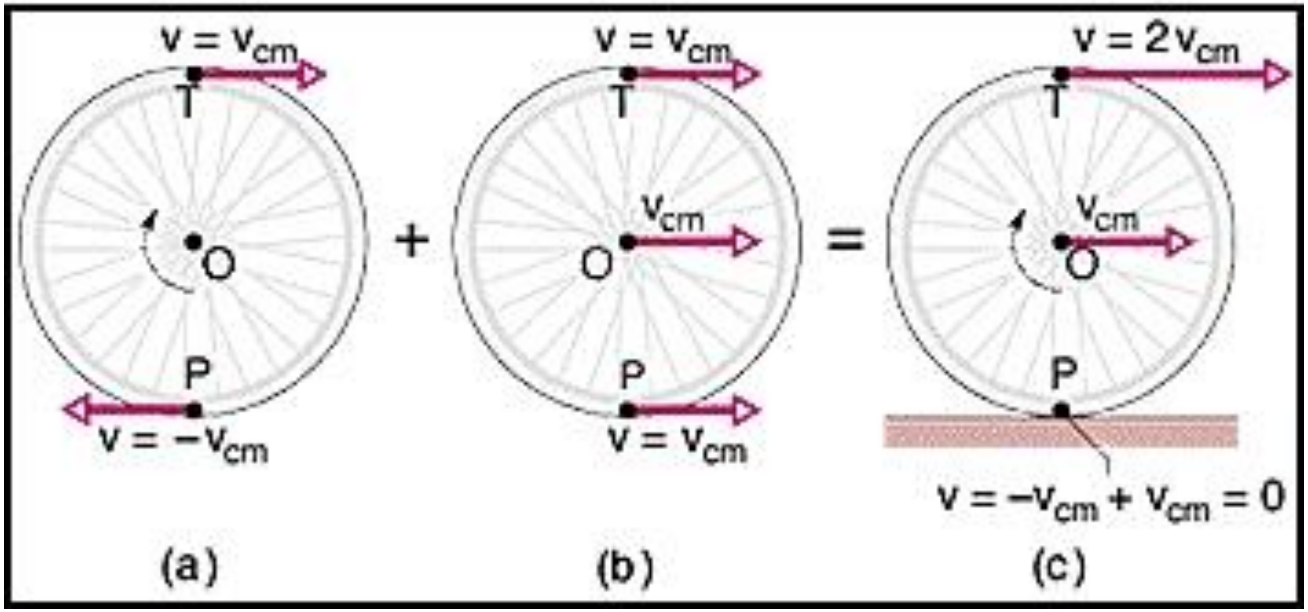




$s = \varphi R$, onde $[\varphi] = \text{rad}$

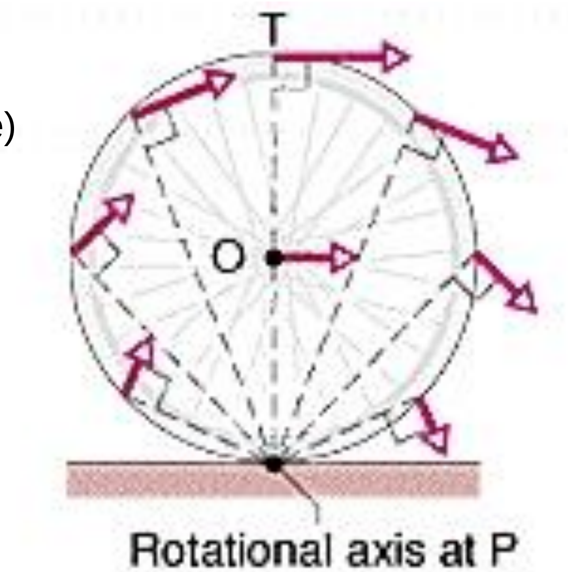
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}s = \frac{d}{dt}(\varphi R) = R\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \boxed{v_{\text{cm}} = \omega R}$$

(a) Rotação + (b) Translação = (c) **Rolamento**

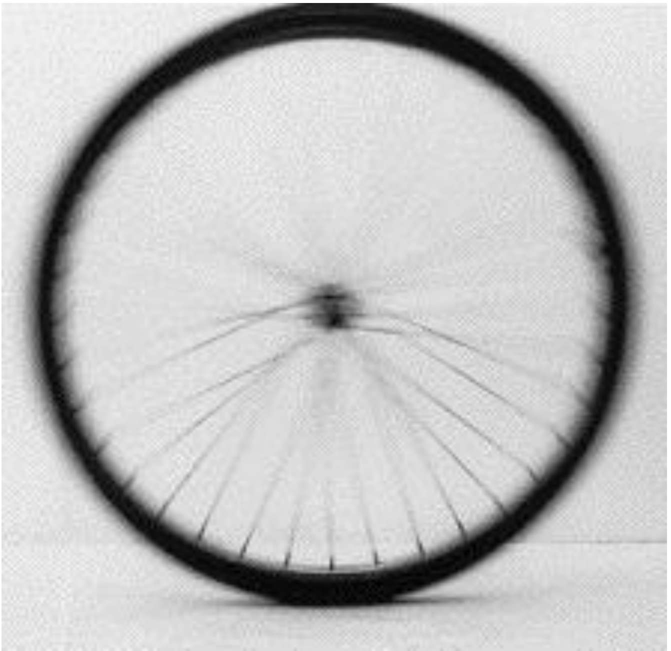


Rolamento como Rotação Pura

(Instantaneamente)



ω em todos os pontos



$$v_T = \omega(2R) = 2\omega R = 2v_{cm}$$

$$v_O = \omega R = v_{cm}$$

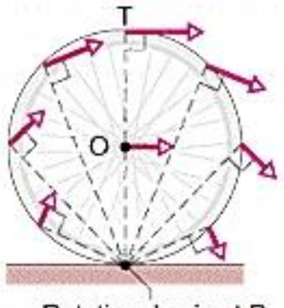
$$v_P = \omega \cdot 0 = 0$$

T. Eixos Paralelos

Energia Cinética:

$$K = \tfrac{1}{2} I_P \omega^2 = \tfrac{1}{2}(I_{cm} + MR^2)\omega^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \tfrac{1}{2} MR^2\omega^2 \Rightarrow$$



$$\boxed{K = \tfrac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_{cm}^2}$$

Rotação Pura

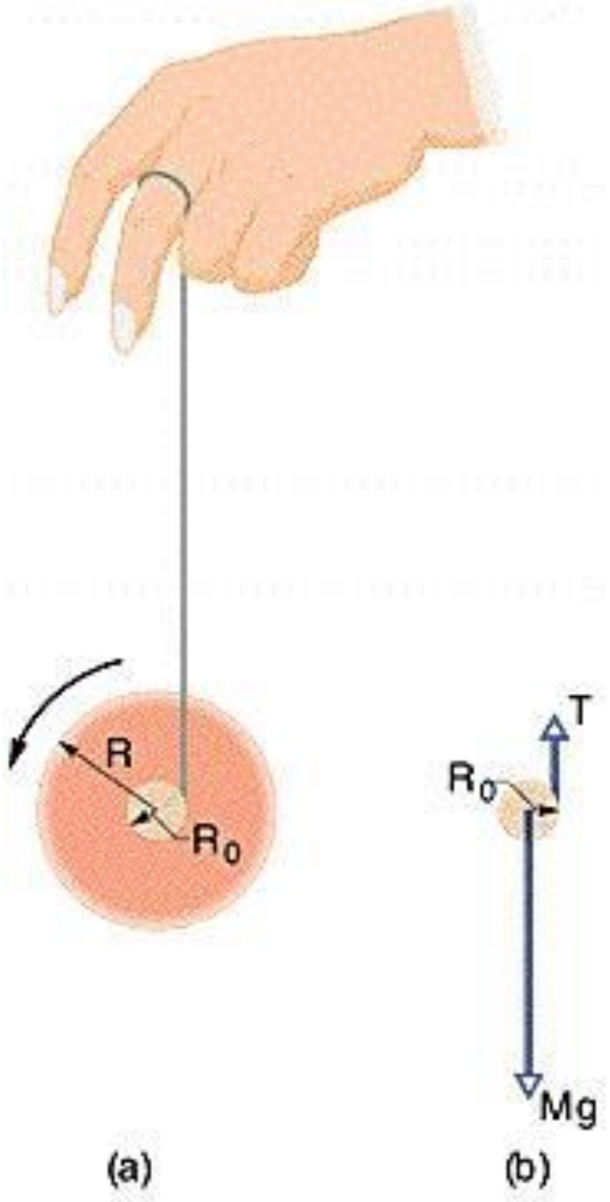
Translação Pura

Exemplo: Ioiô

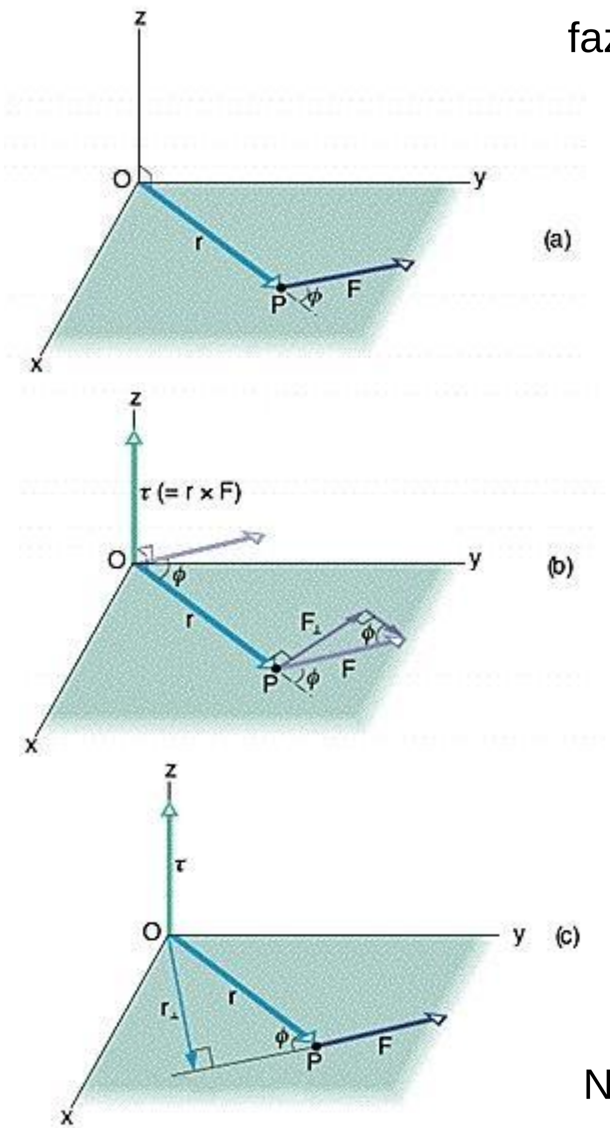
$$\sum F = Ma = T - Mg$$

$$\sum \tau = I\alpha \Rightarrow TR_0 = I\left(-\frac{a}{R_0}\right) \Rightarrow T = -\frac{Ia}{R_0^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{Ia}{R_0^2} - Mg = Ma \Rightarrow \boxed{a = \frac{-g}{\left(1 + \frac{I}{MR_0^2}\right)}}$$



Torque



Seja uma força **F** atuando sobre uma partícula no ponto P, fazendo-a girar em torno do ponto O a um raio **r** deste ponto.

A rotação é tão maior quanto maior for a componente perpendicular da força: $F_{\perp} = F sen\phi$

por isso definimos o ***torque***:

$$\tau = rF sen\phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F$$

com a convenção:

$$\tau > 0 \text{ no sentido anti-horário}: \vec{\tau} = \tau\ \hat{z}$$

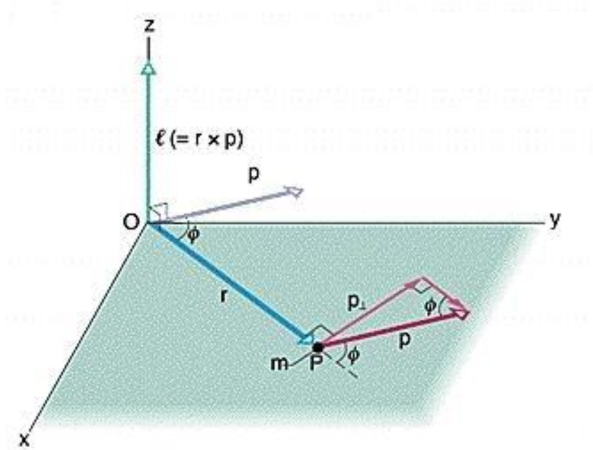
$$\tau < 0 \text{ no sentido horário}: \vec{\tau} = -\tau\ \hat{z}$$

assim:

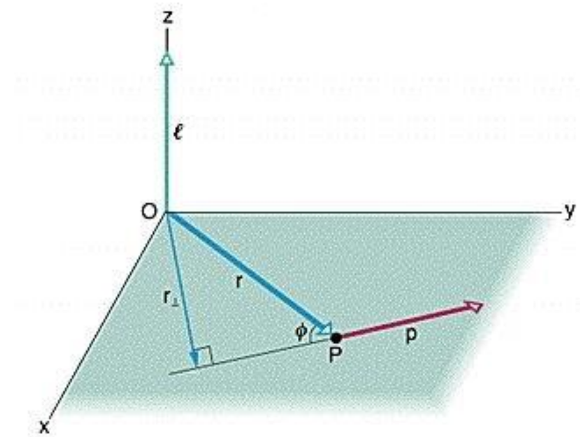
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

No sistema internacional de unidades (SI): $[\tau] = N \cdot m$

Momento angular



(a)



(b)

Uma partícula de massa m no ponto P tem momento linear **p** = m **v**, que vamos assumir está no plano xy. A componente tangencial do momento linear que é responsável pela rotação em torno do eixo Oz, assim definimos o **momento angular** com magnitude:

$$l = r\ p_{\perp} = r\ p\ sen\phi = r\ m\,v\ sen\phi = r\ m\,v_{\perp} = r_{\perp}\ m\,v$$

na direção perpendicular e sentido dado pela regra da mão direita, então:

$$\boxed{\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

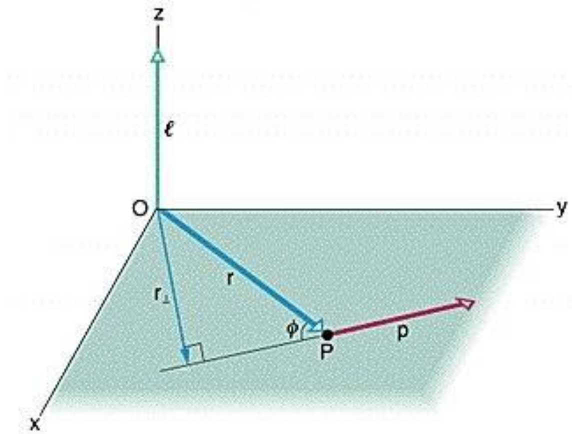
Mais sobre momento angular

- As unidades no SI do momento angular são

  $(kg \cdot m^2)/\ s = J \cdot s$

- Tanto o módulo quanto a direção de $\boldsymbol{\ell}$ dependem da escolha da origem

- O módulo de $\boldsymbol{\ell} = mvr \operatorname{sen} \phi$
  - ϕ é o ângulo entre $\mathbf{p}$ e $\mathbf{r}$



(b)

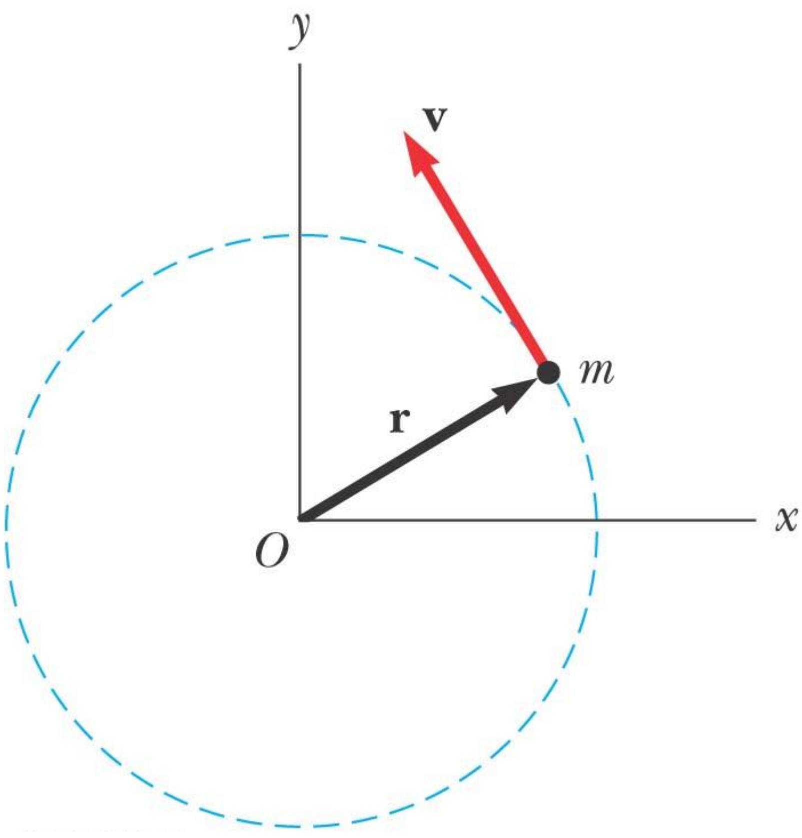
- A direção de $\boldsymbol{\ell}$ é perpendicular ao plano formado por $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$

Momento angular de uma partícula em MCU - exemplo

- O vetor $\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ está direcionado para fora do diagrama
- Seu módulo é

  $l = mvr \text{ sen } 90^o = mvr$

  - sen 90^o é usado uma vez que v é perpendicular a r
- Uma partícula em movimento circular uniforme tem um momento angular constante sobre um eixo que passa pelo centro de sua trajetória



Torque e momento angular

- O torque está relacionado ao momento angular
  - De maneira similar àquela em que a força está relacionada com o momento linear

$$\Sigma\tau = \frac{dl}{dt}$$

- Esta é a analogia rotacional da 2ª Lei de Newton
  - $\Sigma\tau$ e $\boldsymbol{l}$ devem ser medidos na mesma origem
  - Isto é válido para qualquer origem fixa no referencial inercial

2ª Lei de Newton (caso rotacional):

$$\frac{d}{dt}\vec{l} = \frac{d}{dt}\vec{r} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d}{dt}\vec{v} =$$

$$= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = 0 + \vec{r} \times m\vec{a} =$$

$$= \vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum \vec{r} \times \vec{F} =$$

$$= \sum \vec{\tau} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum \vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{l}}$$

Conservação do momento angular

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{l}$$

Se $\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{l} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{l} = const.}$

Momento angular de um sistema de partículas

- O momento angular total de um sistema de partículas é definido como o vetor soma do momento angular das partículas individuais

$$\mathbf{L}_{\mathrm{tot}} = \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \ldots + \boldsymbol{l}_n = \Sigma \boldsymbol{l}_i$$

- Diferenciando com respeito ao tempo

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_{tot} = \frac{d}{dt}\Sigma_i \boldsymbol{l}_i = \Sigma_i \boldsymbol{\tau}_i$$

Momento angular de um sistema de partículas

- Quaisquer torques associados com forças internas atuando num sistema de partículas são zero
- Portanto,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{tot}}}{dt}$$

  - O torque externo resultante num sistema sobre qualquer eixo que passa através de uma origem num referencial inercial é igual à taxa temporal da mudança do momento angular do sistema sobre aquela origem

Conservação do momento angular (sistema de partículas)

Para um Sistema de Partículas:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_1^{\,ext} + \vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{13} + \cdots + \vec{\tau}_2^{\,ext} + \vec{\tau}_{21} + \vec{\tau}_{23} + \cdots + \vec{\tau}_3^{\,ext} + \vec{\tau}_{31} + \vec{\tau}_{32} + \cdots =$$

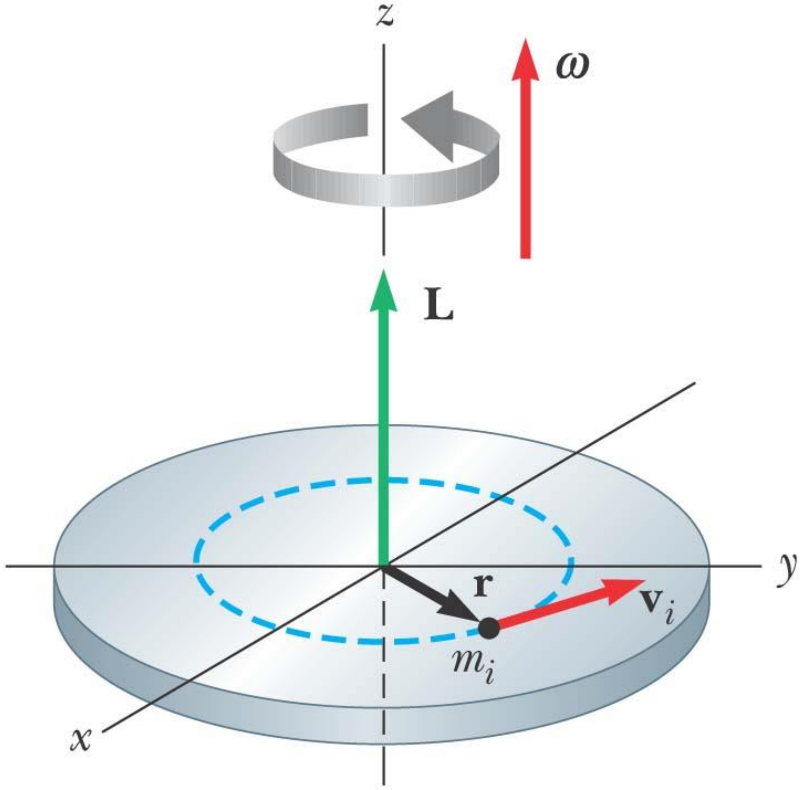
$$= \vec{\tau}_1^{\,ext} + \vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{13} + \cdots + \vec{\tau}_2^{\,ext} - \vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{23} + \cdots + \vec{\tau}_3^{\,ext} - \vec{\tau}_{13} - \vec{\tau}_{23} + \cdots =$$

$$= \sum_i \vec{\tau}_i^{\,ext}$$

Se $\sum \vec{\tau}^{\,ext} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = const.}$

Momento angular de um objeto rígido rodando

- Cada partícula do objeto gira no plano xy em torno do eixo z com velocidade angular ω
- O momento angular de uma partícula individual é $L_i = m_i\, r_i^2\, \omega$
- $\mathbf{L}$ e $\boldsymbol{\omega}$ estão direcionados ao longo do eixo z

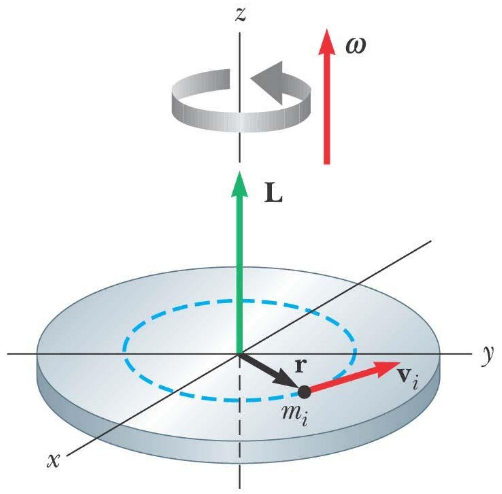


Momento angular de um objeto rígido rodando

Para um Corpo Rígido:

$$L_z = \sum l_z = \sum \Delta m\, v\, r_\perp = \sum \Delta m\,(\omega\, r_\perp)\, r_\perp =$$

$$= \omega\,(\sum \Delta m\; r_\perp^2) = \omega\, I_z$$



Então a conservação do momento angular se traduz em:

$$L_z = \omega\, I_z = const. \Rightarrow \boxed{\omega^i\; I_z{}^i = \omega^f\; I_z{}^f}$$

Conservação do momento angular

- Se a massa de um sistema isolado sofre redistribuição, o momento de inércia mudará
  - A conservação do momento angular requer uma mudança compensadora na velocidade angular

$$\boxed{I_i \, \omega_i = I_f \, \omega_f}$$

    - Isto se aplica para rotação ao redor de um eixo fixo e para rotação sobre um eixo que passe pelo centro de massa de um sistema em movimento
    - O torque resultante deve ser zero em qualquer caso

Exemplo – Período de rotação de uma estrela de nêutrons

Uma estrela sofre uma explosão de supernova. O material remanescente forma uma esfera de raio de $8{,}0 \times 10^6$ m logo após a explosão com um período de rotação de 15 h. Esse material remanescente se transforma em uma estrela de nêutrons de raio de 8,0 km. Qual é o período de rotação T da estrela de nêutrons?

Exemplo – Período de rotação de uma estrela de nêutrons

Uma estrela sofre uma explosão de supernova. O material remanescente forma uma esfera de raio de 8,0 x 10^6 m logo após a explosão com um período de rotação de 15 h. Esse material remanescente se transforma em uma estrela de nêutrons de raio de 8,0 km. Qual é o período de rotação *T* da estrela de nêutrons?

A estrela pode ser modelada como um sistema isolado, de modo que o momento angular seja conservado. Quando o momento de inércia do núcleo estelar diminui durante o colapso, a velocidade angular aumenta. Assim:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

Utilizando o momento de inércia de uma esfera com densidade uniforme:

$$\left(\tfrac{2}{5} M R_i^2\right)\omega_i = \left(\tfrac{2}{5} M R_f^2\right)\omega_f \Rightarrow \omega_f = \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2 \omega_i$$

Como $\omega = 2\pi / T$, temos:

$$\frac{2\pi}{T_f} = \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2 \frac{2\pi}{T_i} \Rightarrow T_f = \left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2 T_i$$

Substituindo os valores numéricos:

$$T_f = \left(\frac{8{,}0 \times 10^3\,\text{m}}{8{,}0 \times 10^6\,\text{m}}\right)^2 (15\,\text{h}) = 1{,}5 \times 10^{-5}\,\text{h} = 0{,}054\,\text{s}$$

Resumo das leis de conservação

- Para um sistema isolado
- (1) Conservação de Energia:

$$E_i = E_f$$

- (2) Conservação do Momento Linear:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$$

- (3) Conservação do Momento Angular:

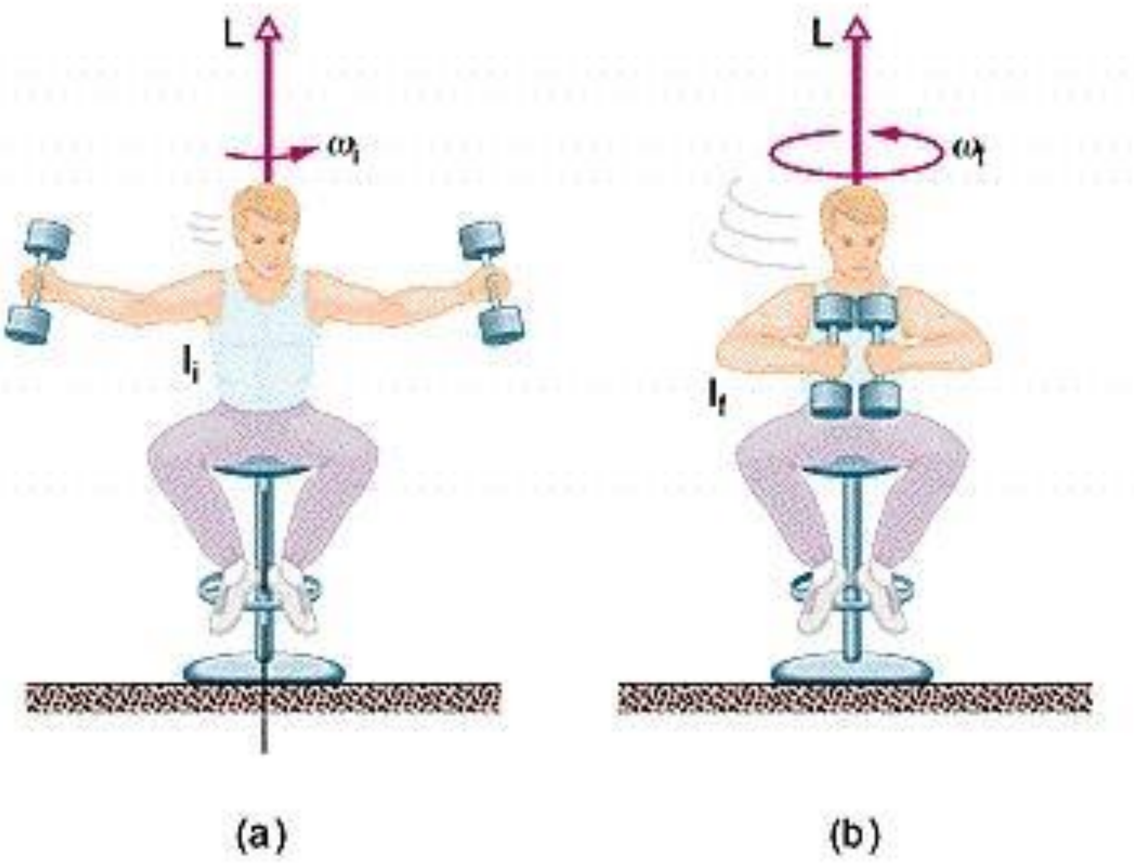
$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f$$

“Para cada simetria da natureza existe uma lei de conservação associada.”

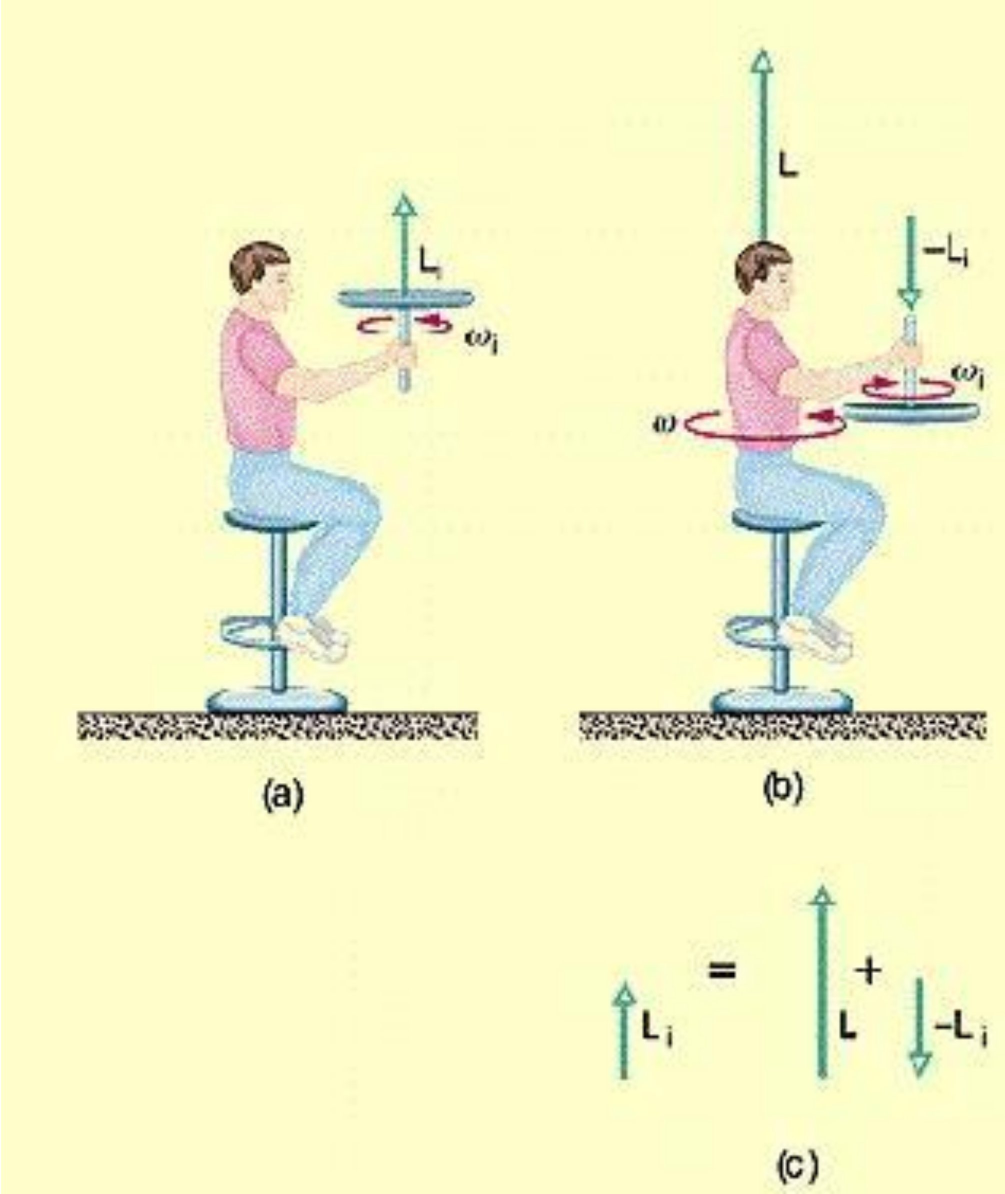
Simetria	Lei de conservação	Mecânica quântica
Temporal	Energia ($E = const.$)	$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$
Translação	Momento linear ($\vec{p} = const.$)	$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$
Rotação	Momento angular ($\vec{L} = const.$)	$\Delta L \cdot \Delta \varphi \geq \hbar/2$

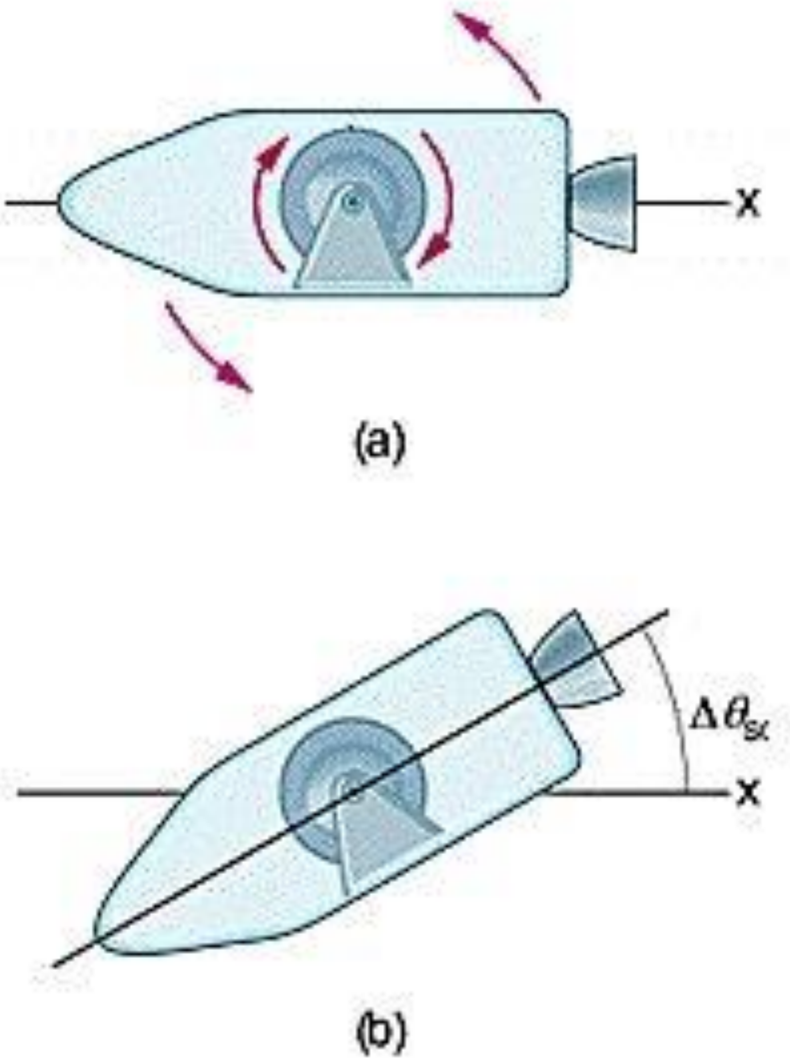
Amalie Emmy Noether
(1882-1935)

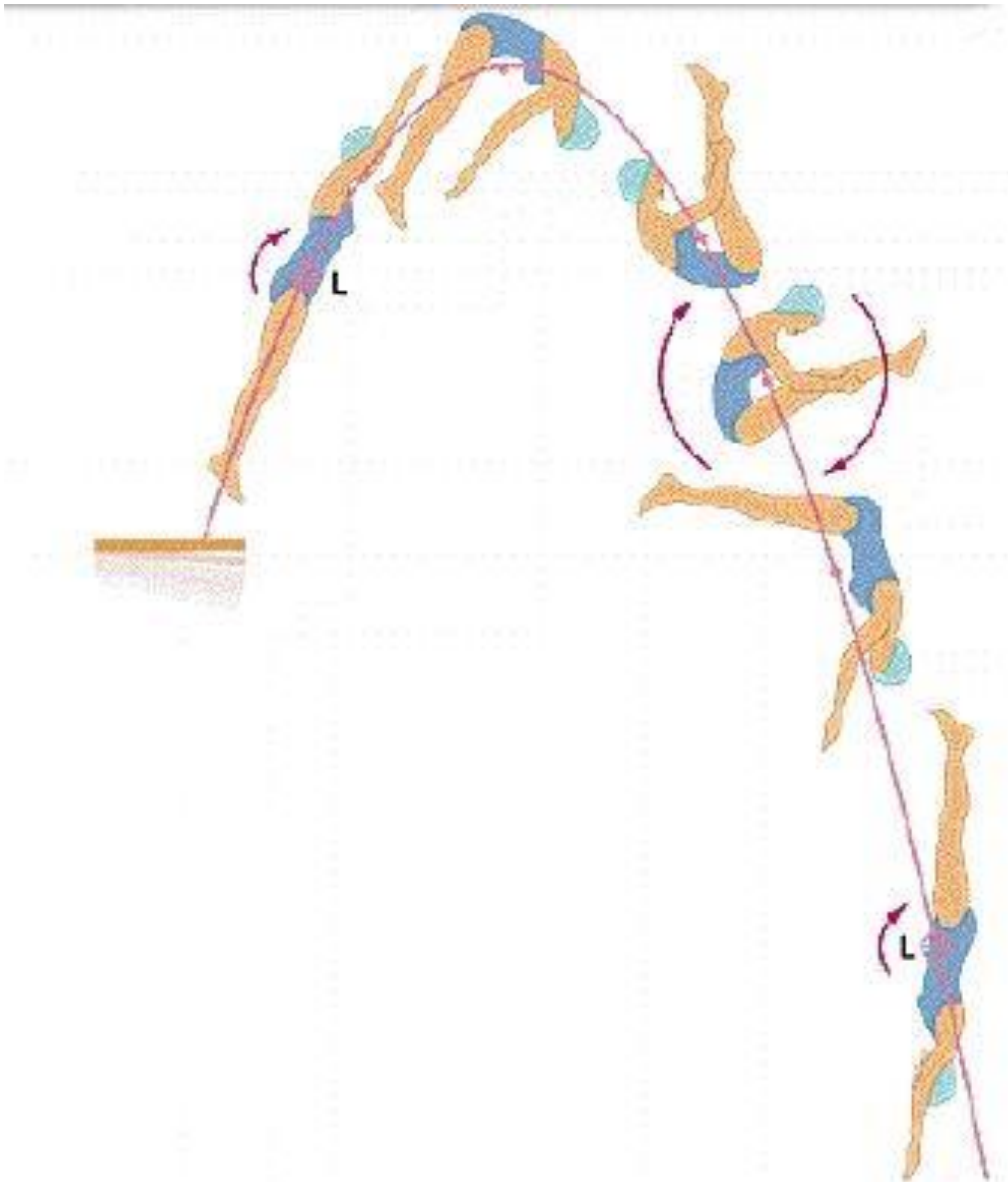
Exemplos



Exemplos

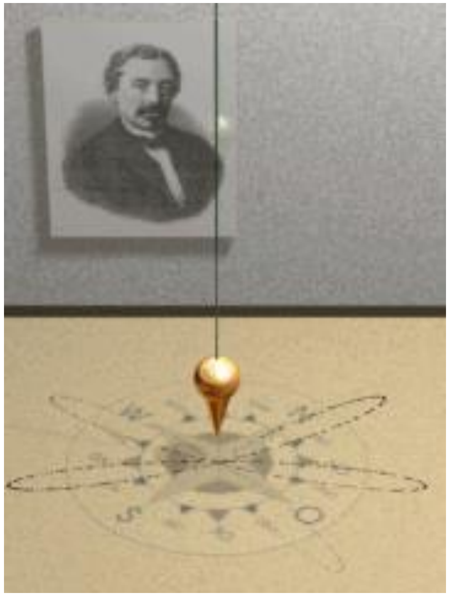


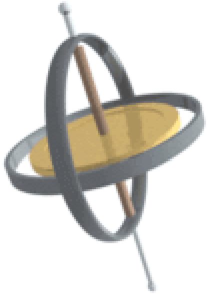

x
(a)
x
(b)

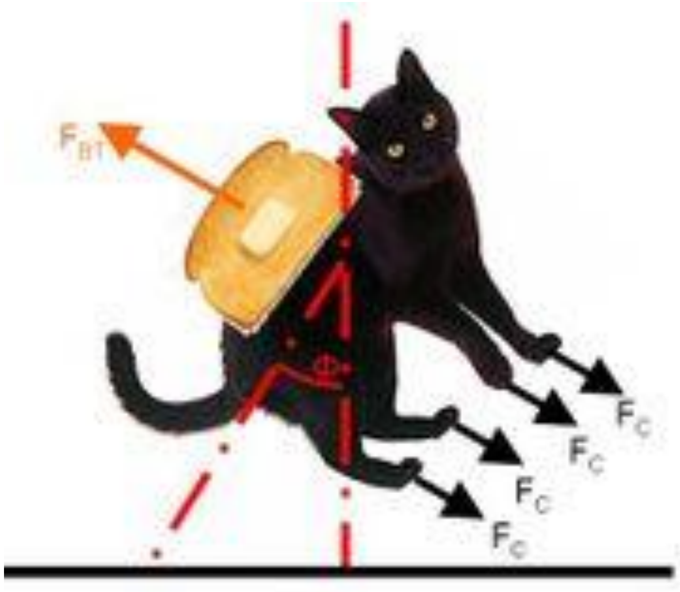

L
L

Jean Foucault (1851)


Le Petit Parisien
SUPPLÉMENT LITTÉRAIRE ILLUSTRÉ
AU PANTHÉON
Expériences du Pendule de Foucault






F_{BT}
Φ
F_C
F_C
F_C
F_C

?


MakeAGIF.com

Bibliografia

Serway, R. A.; Jewett Jr., J. W. *Princípios de Física - Mecânica Clássica*, Vol. 1, cap. 10, Cengage Learning, 2004.

Young, H. D.; Freedman, R. A. *Sears & Zemansky, Física I - Mecânica*, vol. 1, cap. 8, Pearson Education do Brasil, 2008.